Kvantummechanika gyakorlat

1. zárthelyi

1. Tekintsük a végtelen mély potenciálgödörben

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -a < x < a \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

a következő hullámfüggvényt:

$$\psi(x) = B\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right),$$

ahol $\psi_i(x)$ az i. sajátállapota a potenciálnak. ($i = 1$ a legalacsonyabb energiás állapotot jelzi és az állapotok energiája növekszik az i-vel)

   (a) Számoljuk ki a B normálási tényezőt!

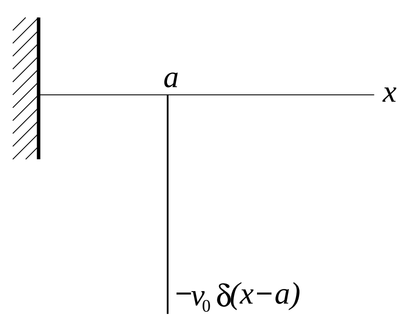
   (b) Számoljuk ki az energia várhatóértékét ebben az állapotban!

   (c) Az állapotok időfejlődésének ismeretében, hogy változik a részecske megtalálási valószínűsége az időben? (Rajzzal szemléltethető)

   (d) Számoljuk ki a $\hat{x}$ és $\hat{p}$ operátor várható értékét $\psi(x,t)$ állapotban!

2. Egy m tömegű részecske csak az $x \geq 0$ félegyenesen tud mozogni. A potenciális energia

$$V(x) = -v_0\,\delta(x-a) \qquad (v_0 > 0, a > 0).$$



Az $x = 0$-nál lévő falnak speciális tulajdonságú. Hány kötött állapota van a rendszernek, ha

   (a) a részecske „szereti" a falat (azaz a határfeltétel a falnál: $\Psi'(0) = 0$), ill. ha

   (b) a részecske „nem szereti" a falat (azaz a határfeltétel a falnál: $\Psi(0) = 0$)?

   (c) Ha mindkét esetben van legalább egy kötött állapot, akkor melyik esetben alacsonyabb az alapállapot energiája?

3. Mi a feltétele annak, hogy kötött állapot alakulhasson ki végtelen sok, egymástól d távolságra lévő, α erősségű Dirac-δ-k által alkotott potenciálban?

4. Hogy néz ki a hullámfüggvénye egy linerási potenciálban lévő részecskének? (Elég a hullámfüggvény Fourier-előllítását megadni.)

   Csak akinek jut rá ideje, nem kötelező: Nagy távolságoknál a Fourier-integrálban alkalmazhatjuk a stacionáris fázis módszerét, így a hullámfüggvény kiszámítható ebben az esetben. Határozzuk meg az L szélességű végtelen mély potenciálgödör energiaszintjeit, amikor a potenciál alja lineáris, és L nagynak tekinthető.

5. Számoljuk ki koherens állapotokban a $e^{\lambda\hat{x}}$ operátor várhatóértékét! (Emlékezzünk, hogy $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$, amennyiben $[A,B]$ egy szám.)

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\beta\delta(x) \Longrightarrow T_\delta = \begin{pmatrix} 1+\frac{\beta}{2ik} & \frac{\beta}{2ik} \\ -\frac{\beta}{2ik} & 1-\frac{\beta}{2ik} \end{pmatrix}$$

$$E_d(k) = \begin{pmatrix} e^{ikd} & 0 \\ 0 & e^{-ikd} \end{pmatrix}$$