

Kvantummechanika

1. zárthelyi dolgozat

2012. október 24.

1. feladat. Tekintsünk egy kétállapotú rendszert, például Schrödinger bal-sorsú macskáját! A két lineárisan független állapot:

$$|\oplus\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad |\ominus\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A macska legáltalánosabb állapota ezek normált lineárkombinációja:

$$|\Psi\rangle = a|\oplus\rangle + b|\ominus\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

A macska kezdetben él; $|\Psi(t=0)\rangle = |\oplus\rangle$. Hogyan viszonyul az élethez t idővel később, vagyis mi lesz a macska $|\Psi(t)\rangle$ állapota, ha a Hamilton-operátor

$$H = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}, \quad (h, g \text{ valós konstansok})$$

alakú? (10 p)

2. feladat. Oldja meg az időfüggetlen Schrödinger-egyenletet a következő potenciálra:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x), & \text{ha } -a < x < a, \\ \infty, & \text{ha } |x| \geq a. \end{cases}$$

Vizsgálja külön a páros és a páratlan megoldásokat! Normálja a hullámfüggvényeket, keresse meg a hozzájuk tartozó energiákat (grafikusan, ha szükséges), és hasonlítsa őket össze a Dirac-delta nélküli esettel! Vizsgálja meg az $\alpha \rightarrow 0$ és az $\alpha \rightarrow \infty$ határeseteket! (10 p)

3. feladat. Számítsa ki harmonikus oszcillátor esetén az $\langle x^4 \rangle$ várhatóértéket! (5 p)

4. feladat. Határozza meg az $\langle L_x \rangle$ és az $\langle L^2 \rangle$ várhatóértékeket a

$$\psi(x, y, z) = R(r) \frac{z(x-y)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

állapotban, ahol

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1.$$

(5 p)

5. feladat. Egy m tömegű részecskét helyezünk a

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r \leq a, \\ V_0 > 0, & \text{ha } r > a \end{cases}$$

centrális potenciálba. Határozza meg az alapállapotot az $l = 0$ impulzusmomentumú állapotban! Mutassa meg, hogy nem létezik kötött állapot, ha $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$! (10 p)

A harmonikus oszcillátor léptetőoperátorai:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega x + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega x - ip)$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$

Az első néhány gömbi harmonikus, $Y_l^m(\theta, \phi)$:

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_2^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^{\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$Y_3^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 3}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$$

A radiális Schrödinger-egyenlet:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = 0, \quad u(r) \equiv rR(r)$$