Kvantummechanika 1. Zh

2015. okt. 19., hétfő

1. Határozzuk meg grafikusan az alábbi potenciálban mozgó részecske kötött állapotait ($E < 0$):

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq -a \ , \\ -\gamma\delta(x) & -a < x < a \ , \\ \infty & x \geq a \ , \end{cases}$$

Használjuk fel, hogy a hullámfüggvény első deriváltja az alábbi módon ugrik a Dirac-deltánál:

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right) = -\frac{2m}{\hbar^2}\gamma\psi(0) \ .$$

Tárgyaljuk külön a páros és páratlan megoldásokat.

(10 pont)

2. Adott az alábbi hullámfüggvény:

$$\psi(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda|x|} \ ,$$

ahol λ egy pozitív valós paraméter. Határozzuk meg a C normálási faktort és fejtsük ki síkhullámok szerint (Fourier-trafó), majd adjuk meg a k hullámszám szerinti valószínűségsűrűség függvényt.

(4 pont)

3. Adjuk meg az alábbi potenciállal jellemzett rendszer szórásállapotainak ($E > 0$) transzfermátrixát (elég csak mátrix szorzat alakban felírni):

$$V(x) = \alpha\big(\delta(x) + \delta(x-a)\big)$$

(6 pont)

4. Tekintsük a

$$H(\mathbf{r}; a) = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}; a)$$

Hamilton operátort, ahol a egy folytonos paraméter. A sajátenergiák és a normált sajátfüggvények természetesen ugyancsak az a paraméter függvényei:

$$H(\mathbf{r}; a)\Psi(\mathbf{r}; a) = E(a)\Psi(\mathbf{r}; a) \ .$$

Bizonyítsuk be az ún. Hellmann–Feynman tételt:

$$\frac{\mathrm{d}E(a)}{\mathrm{d}a} = \left\langle \Psi(a) \middle| \frac{\partial V(a)}{\partial a} \middle| \Psi(a) \right\rangle \ .$$

Kihasználhatjuk azt is, hogy a sajátátfüggvények normája mindig egy, így független az a paramétertől.

(5 pont)

Jó munkát!