Kvantummechanika gyakorlat

UV Zh

2016. jan. 08., péntek

1. Tekintsük a $\hat{H} = E_0\big[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\big]$ kétállapotú rendszert, ahol E_0 konstans, valamint $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, $(i, j = 1, 2)$. A $t = 0$ időpillanatban az $\hat{O} = \Omega_0\big[3|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\big]$ megfigyelhető mennyiség operátorának várható értéke $\langle\hat{O}\rangle = -\Omega_0$, ahol Ω_0 konstans. Határozza meg a rendszer $|\psi(0)\rangle$ állapotát a $t = 0$ időpillanatban, valamint írjuk fel az időfejlődését, vagyis $|\psi(t)\rangle$-t!

(5 pont)

2. Igazolja, hogy az egydimenziós harmonikus oszcillátorra vonatkozó Heisenberg-féle határozatlansági relációban az impulzus és a koordináta operátor szórásának szorzata a legalacsonyabb értékét az alapállapotban veszi fel!

(5 pont)

3. Határozza meg az $\langle L_z\rangle$ és $\langle L^2\rangle$ várhatóértékeket a

$$\psi(x,y,z) = R(r)\,\frac{z(x-y)}{x^2+y^2+z^2}$$

állapotban, ahol

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2\,\mathrm{d}r = 1\,.$$

Néhány gömbfüggvény:

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\\
Y_1^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\\
Y_1^{\pm1}(\theta,\phi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}\\
Y_2^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)\\
Y_2^{\pm1}(\theta,\phi) &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}\\
Y_2^{\pm2}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\phi}
\end{aligned}$$

(5 pont)

4. Határozzuk meg az e töltésű, térbeli harmonikus oszcillátor alapállapoti energiájának eltolódását perturbacioszámtással, ha bekapcsolunk egy gyenge B nagysagú homogén mágneses teret. A Hamilton operátor az $\mathbf{A}$ vektorpotenciállal felírva:

$$H = \frac{(\mathbf{p}-e\,\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{1}{2}m\,\omega^2\,\mathbf{r}^2\,.$$

Számoljunk asszimetrikus mértékben: $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$

(7 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi potenciálban mozgó egydimenziós részecske állapotait ($a > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \le 0 \, , \\ -\gamma\delta(x-a) & 0 < x \end{cases}$$

Használjuk fel, hogy a hullámfüggvény első deriváltja az alábbi módon ugrik a Dirac-deltánál:

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left(\psi'(a+\epsilon) - \psi'(a-\epsilon)\right) = -\frac{2m}{\hbar^2}\gamma\psi(a) \, .$$

(8 pont)

6. Tekintsünk a következő kétállapotú rendszert:

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \varepsilon K(t) \\ \varepsilon K(t) & 2E_0 \end{pmatrix} ,$$

ahol $K(t) = V_0 \, \mathrm{e}^{-\kappa t}$, $\kappa > 0$ és $\varepsilon \ll 1$. Mi a valószínűsége első rendben annak, hogy a $t = 0$ időpontból és az E_0 energiához tartozó állapotból indulva $t = \infty$-ben a rendszer úgyanabban az állapotban marad?

(5 pont)

Jó munkát!