Kvantummechanika gyakorlat 2015
1. Beadandó feladatsor
Határidő: 4. heti gyakorlatok eleje

1. Mutassuk meg, hogy A és B tetszőleges operátorokra igaz, hogy

$$e^{B} A\, e^{-B} = A + [B, A] + \frac{1}{2!}[B, [B, A]] + \ldots .$$

(Ötlet: A gyakorlaton szerepelt feladat mintájára definiáljuk az

$$A(s) = e^{Bs} A\, e^{-Bs}$$

operátort és fejtsük sorba.)

(3 pont)

2. Egy gumilabda rugalmasan pattog a föld homogén gravitációs terében. Legyen a maximális magasság, ameddig felpattan, a. Kvantáljuk meg a Bohr–Sommerfeld kvantálási feltétellel. Milyen lehetséges a magasságokat kapunk, illetve mekkora a legkisebb nem nulla a magasság, amivel tud pattogni?

(3 pont)

3. Bizonyítsuk be az alábbi Ehrenfest-tételt a Schrödinger egyenlet felhasználásával:

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{p} \rangle = -\left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle$$

(2 pont)

4. Legyen a végtelen falú potenciálgödörben, aminek a potenciálja

$$V(x) := \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases} ,$$

egy részecske a

$$\Psi(x, 0) = A\,[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

állapotban, ahol ψ_1 és ψ_2 az előadáson szerepelt

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left(\frac{n\pi}{a}\, x\right)$$

függvények.

a) Határozzuk meg az A normálási faktort (*Megj.: Nehogy valaki nekiálljon integrálni.*)

b) Írjuk fel Ψ időfejlődését, vagyis $\Psi(x, t)$-t, és számoljuk ki $|\Psi(x, t)|^2$-t *(Ehhez használhatjuk az Euler-formulát:* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.*)* Vezessük be az $\omega = \pi^2\hbar/2ma^2$ jelölést.

c) Számoljuk ki $\langle \hat{x} \rangle$-t. Vegyük észre, hogy oszcillál. Mi az oszcilláció frekvenciája és amplitúdója? *($a/2$-nél nem jöhet ki több).*

d) Számoljuk ki $\langle \hat{p} \rangle$-t. *(Az előadáson tanultak alapján van egy gyors módszer rá.)*

e) Számoljuk ki az energiájának várható értékét: $\langle \hat{H} \rangle$-t. Fejezzük ki E_1-gyel és E_2-vel.

f) Egy klasszikus részecske csak oda-vissza pattogna a falak között. Ha ennek a klasszikus részecskének ugyanannyi lenne az energiája mint az **e)**-részben a kvantumosnak, mi lenne a klasszikus mozgás frekvenciája? Hasonlítsuk össze a kvantumoséval, ami **c)**-ben szerepel.

(6 pont)

5. Fizikai operátorok szórását egy adott állapotban így definiáljuk:

$$\sigma_A \;:=\; \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}\;.$$

Tekintsük az alábbi hullámcsomagot:

$$\Psi(x,t=0) \;=\; A\,\mathrm{e}^{-x^2/4a^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}\;,$$

a és k_0 konstansokkal és A normálási faktorral.

a) Határozzuk meg a normálási faktort és mutassuk meg, hogy ez a hullámcsomag minimalizálja a Heisenberg-féle határozatlansági relációt:

$$\sigma_{\hat{x}}\,\sigma_{\hat{p}} \;\geq\; \frac{\hbar}{2}\;.$$

(Ötlet: Használhatjuk az előadáson szerepelt módszereket, mint pl. a Fourier-transzformációt.)

b) Írjuk fel az időfejlődését a hullámcsomagnak, ha tudjuk, hogy az energiája

$$E \;=\; \hbar\omega \;=\; \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\;,$$

ahol k a hullámszám, vagyis a Fourier-tér változója.

(6 pont)

Össz. pont: 20

Jó munkát!

QM 2015 beadandó feladatok 2.

beadási határidő: 6. heti gyakorlatok eleje

1. feladat. Egy m tömegű részecske a

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

állapotban van, ahol A és a pozitív, valós konstansok. Határozza meg az A-t, amivel a hullámfüggvény normája 1! Milyen $V(x)$ potenciálra teljesíti Ψ az 1D Schrödinger-egyenletet? Számítsa ki az $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$ és a $\langle p^2\rangle$ várható értékeket! Számítsa ki a σ_p és σ_x mennyiségeket, és ellenőrizze, hogy teljesül-e a Heisenberg-féle határozatlansági reláció!

6p

2. feladat. Tegyük fel, hogy a potenciális energiához hozzáadunk egy V_0, x-től és t-től nem függő konstanst. Klasszikus mechanikában ez nem változtat semmit a fizikán, de mi a helyzet kvantummechanikában? Mutassa meg, hogy a hullámfüggvény felszed egy $\exp(-iV_0t/\hbar)$ fázisfaktort! Milyen hatással van ez a dinamikai változók várható értékeire?

2p

3. feladat. Határozza meg a

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } 0 \le x \le a \\ V_0 > 0, & \text{ha } x > a \end{cases}$$

alakú potenciálgödörben kötött m tömegű részecske energiáit és hullámfüggvényeit!

4p

4. feladat. Határozza meg, hogy egy a

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0, & \text{ha } n(a+b) < x < n(a+b)+a, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

alakú (n tetszőleges egész szám), periodikus potenciálban mozgó részecske energiaspektrumát! (Mivel a potenciál eltolásra invariáns, ezért a valószínűségsűrűség is periodikus.)

5p

5. feladat. Egy, a $+\infty$-ből érkező m tömegű részecske a

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0 \\ -V_0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

alakú potenciálon szóródik ($E > 0$, $V_0 > 0$). Mekkora valószínűséggel halad át a részecske a potenciállépcsőn, és mekkora valószínűséggel verődik róla vissza? Határozza meg a T transzmissziót és az R reflexiót!

3p

QM 2015 beadandó feladatok 3.

beadási határidő: őszi szünet utáni első gyakorlatok

1. feladat. Határozza meg az energianívókat a

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

potenciálvölgyben!

2p

2. feladat. Határozza meg az elektrosztatikus potenciált a hidrogén atom 1s állapotában!

4p

3. feladat. Határozza meg a $\lambda_{ik} = [x_i, [L^2, x_k]]$ mátrix sajátértékeit!

4p

4. feladat. Határozza meg a rögzített tengely körül forgó, Θ tehetetlenségi nyomatékú merev test (síkrotátor, $H = \frac{L_z^2}{2\Theta}$) stacionárius állapotainak hullámfüggvényeit és energianívóit! Mit tudunk mondani a nívók degeneráltságáról? Egy síkrotátor hullámfüggvénye a $t = 0$ időpillanatban

$$\psi(\phi, t = 0) = A \cos^2 \phi,$$

ahol A normálási tényező. Határozza meg A értékét és a hullámfüggvényt tetszőleges $0 < t$-re!

6p

5. feladat. A részecskét leíró hullámfüggvény $2(x^2 - y^2)\, f(x^2 + y^2 + z^2)$. Milyen valószínűséggel vesz fel L_z meghatározott értékeket?

4p

Kvantummechanika gyakorlat 2015
4. Beadandó feladatsor
Határidő: 13. hét szerdáig

1. Koherens állapot (Harmonikus oszcillátor)

   Jelölje $|\alpha\rangle$ az a léptető operátor sajátállapotát: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, ahol α tetszőleges komplex szám.

   a) Mutassuk meg, hogy az $|\alpha\rangle$ sajátállapot a következőképpen állítható elő:

   $$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\alpha a^+}|0\rangle$$

   b) Létezhet-e a^+-nak jobboldali sajátállapota?

   c) Hogyan módosítanánk az $\mathrm{e}^{\alpha a^+}$ operátort egy U unitér operátorra, hogy szintén generálja az $|\alpha\rangle$ koherens állapotokat a $|0\rangle$ alapállapotból, vagyis $|\alpha\rangle = U|0\rangle$.
   (Ötlet: Használhatjuk az első háziban belátott $\mathrm{e}^{A+B} = \ldots$ formulát.)

(5 pont)

2. Moshinsky-atom

   Tekintsük a következő két elektron állapotát leíró Hamilton operátort:

   $$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\,\Omega^2\,(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}m\,\omega^2\,(x_1 - x_2)^2$$

   a) Vezessük be az $X = x_1 + x_2$ és $x = x_1 - x_2$ koordinátákat, és mutassuk meg, hogy az új változókkal szétesik a Hamilton operátor két független harmonikus oszcillátor Hamilton operátorának összegére.

   b) Figyelembe véve a részecskék feles spinjét (fermionok!), írjuk fel a rendszer hullámfüggvényeit!

(5 pont)

3. Impulzus összeadás

   Egy $s_1 = \frac{3}{2}$ és egy $s_2 = 1$ spinű részecskét dobozba zárunk. A második részecskének milyen z irányú spin értékeket, és ezeket milyen valószínűséggel mérhetek, ha a két részecske az $s = \frac{3}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$ teljes spin kvantumszámokkal jellemzett együttes állapotban van.

(4 pont)

4. Perturbációszámítás alkalmazása

   Egy paramágneses ion állapotai kristályrácsban – a paramágneses rezonancia elmélete szerint – az alábbi Hamilton operátor sajátállapotai:

   $$\begin{aligned} H_S = {} & a\,\mathcal{H}\,S_z + b\,\mathcal{H}\,I_z + \frac{1}{2}D\,(3\cos^2\theta - 1)\,(S_z^2 - \frac{1}{3}S^2) + \frac{1}{2}D\,\sin 2\theta \left[S_+\left(S_z + \frac{1}{2}\right) + S_-\left(S_z - \frac{1}{2}\right)\right] + \\ & + \frac{1}{4}D\sin^2\theta\,(S_+^2 + S_-^2) + A\,S_z\,I_z + \frac{A}{2}\,(S_+\,I_- + S_-\,I_+) \end{aligned}$$

   ahol S és I spinoperátorai az elektronnak és az atommagnak, a, b, D, A konstansok, $a \ll b$, és θ pedig a kristály szimmetriatengelye és a $\mathcal{H}$ mágneses tér között bezárt szög.

   Legyen a $H^{(0)} = a\mathcal{H}S_z + b\mathcal{H}I_z$ perturbálatlan Hamilton operátor sajátállapota $|S, M_S\rangle|I, M_I\rangle$-vel jelölve, ahol $M_S = -S, \ldots, S$ és $M_I = -I, \ldots, I$. Számoljuk ki a teljes H_S Hamilton operátor első és másodrendű energiakorrekcióit, amikor A és D már nem nulla.

(6 pont)

Össz. pont: 20

Jó munkát!