QM gyakorló feladatok 1.

1. feladat. Bizonyítsa be, hogy hermitikus operátor sajátértékei valósak, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonálisak!

2. feladat. Határozzuk meg egy merev falú, a, b, c élhosszúságú téglatest alakú dobozba zárt tömegpont lehetséges energiaértékeit a Bohr–Sommerfeld-kvantumfeltétel alapján!

? **3. feladat.** Határozzuk a 3D harmonikus oszcillátor lehetséges energiaértékeit a Bohr–Sommerfeld-kvantumfeltétel alapján!

4. feladat. Legyen $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ egy, a differenciálható és az $[a, b]$ értelmezési tartomány végpontjaiban eltűnő $\varphi(x)$ függvények terén definiált operátor. Bizonyítsa be, hogy $\hat{p}$ lineáris és önadjungált operátor!

5. feladat. Számítsa ki a következő kommutátorokat, ahol $\hat{x} = x$, $\hat{p}$ az előző feladatban szereplő operátor, míg $\hat{A}(x)$ csakis az x-től függő operátor!

i) $[\hat{p}, \hat{x}] =?$

ii) $[\hat{p}, \hat{A}(x)] =?$

6. feladat. Határozza meg a tükrözési operátor ($P\varphi(x) = \varphi(-x)$) sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

7. feladat. Legyen $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x$ és $B = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x$ egy-egy, differenciálható függvényeken értelmezett operátor. Mi az A operátor spektruma, és mik az 1-re normált sajátfüggvényei? Határozza meg A^2, B^2, AB és $[A, B]$ operátorokat!

8. feladat. Fejezze ki a $[ABC, DEF]$ kommutátort csak $[X, Y]$ alakú kommutátorok segítségével, ahol X és Y az A, B, C, D, E, F operátorok valamelyike!

9. feladat. Legyen $H(\underline{r})$ egy a $\psi(\underline{r})$ hullámfüggvények terén ható operátor és O egy koordináta transzformáció operátora: $\underline{r}' = O\underline{r}$. Az O felfogható a hullámfüggvények terén ható operátorként is: $O\psi(\underline{r}) = \psi(\underline{r}')$. Mutassa meg, hogy ha $H(\underline{r})$ invariáns az O transzformációval szemben, akkor a $[H, O]$ kommutátor zérus!

10. feladat. Fejtse sorba λ hatványai szerint az $(A - \lambda B)^{-1}$ operátort, feltételezve, hogy A inverze létezik! Hogy néz ki a sorfejtés, ha $[A^{-1}, B] = 0$?

11. feladat. Igazolja, hogy ha az A és B operátorokra fennáll, hogy $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, akkor teljesül, hogy

$$e^{A+B} = e^A \, e^B \, e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$$

12. feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A és H operátorokra teljesül a Kubo-azonosság:

$$[A, e^{-\beta H}] = e^{-\beta H} \int_0^\beta e^{\lambda H} [H, A] \, e^{-\lambda H} \, \mathrm{d}\lambda.$$

13. feladat. Bizonyítsa be Ehrenfest tételét:

$$\frac{\mathrm{d}\langle p \rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle.$$

14. feladat. Egy m tömegű részecske a

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

állapotban van, ahol A és a pozitív, valós konstansok. Határozza meg az A-t, amivel a hullámfüggvény normája 1! Milyen $V(x)$ potenciálra teljesíti Ψ az 1D Schrödinger-egyenletet? Számítsa ki az $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ és a $\langle p^2 \rangle$ várható értékeket! Számítsa ki a σ_p és σ_x mennyiségeket, és ellenőrizze, hogy teljesül-e a Heisenberg-féle határozatlansági reláció!

15. feladat. Tegyük fel, hogy a potenciális energiához hozzáadunk egy V_0, x-től és t-től nem függő konstanst. Klasszikus mechanikában ez nem változtat semmit a fizikán, de mi a helyzet kvantummechanikában? Mutassa meg, hogy a hullámfüggvény felszed egy $\exp(-iV_0 t/\hbar)$ fázisfaktort! Milyen hatással van ez a dinamikai változók várható értékeire?

16. feladat. Végtelen mély potenciálvölgyben mozgó részecske esetén számolja ki a σ_p és σ_x mennyiségeket tetszőleges n kvantumszámmal jellemzett stacionárius állapotban, és ellenőrizze, hogy teljesül-e a Heisenberg-féle határozatlansági reláció!

17. feladat. Végtelen mély potenciálgödörben a részecske a

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x)$$

hullámfüggvénnyel jellemzett állapotban van. Normálja $\Psi(x,0)$-t! Vázolja fel a hullámfüggvény alakját! Melyik stacionárius állapot hasonlít leginkább ehhez? Határozzuk meg az $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ és a $\langle H \rangle$ várható értékeket $t = 0$-ban! Hogyan viszonyul $\langle H \rangle$ a $\Psi(x,0)$-hoz leginkább hasonló, stacionárius állapot energiájához?

18. feladat. Számítsa ki a $V(x) = -\alpha\delta(x)$ potenciál kötött állapotára a $\sigma_x\sigma_p$ mennyiséget, és hasonlítsa össze az eredményt a Heisenberg-féle határozatlansági relációval!

19. feladat. Határozza meg egy m tömegű részecske

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

alakú potenciálban kötött állapotainak energiáit és normált hullámfüggvényeit! (Ügyeljen a páros és a páratlan megoldásokra!)

20. feladat. Határozza meg a

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } 0 \le x \le a \\ V_0 > 0, & \text{ha } x > a \end{cases}$$

alakú potenciálgödörben kötött m tömegű részecske energiáit és hullámfüggvényeit!

21. feladat. Mutassa meg, hogy egy a

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0, & \text{ha } n(a+b) < x < n(a+b) + a, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

alakú (n tetszőleges egész szám), periódikus potenciálban mozgó részecske energiaspektruma sávszerkezetű!

22. feladat. Egy, a $-\infty$-ből érkező m tömegű részecske a

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ -V_0, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

alakú potenciálon szóródik ($E > 0$, $V_0 > 0$). Mekkora valószínűséggel halad át a részecske a potenciállépcsőn, és mekkora valószínűséggel verődik róla vissza? Határozza meg a T transzmissziót és az R reflexiót!

23. feladat. Számítsa ki harmonikus oszcillátor energiasajátállapotok bázisán a következő mátrixelemeket!

i) $\langle k|x^2|n\rangle =?$

ii) $\langle k|x^3|n\rangle =?$

iii) $\langle x^2\rangle =?$

24. feladat. Határozza meg az energianívókat a

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

potenciálvölgyben!

25. feladat. Becsülje meg az alapállapot energiáját a határozatlansági összefüggés alapján

i) végtelen mély, derékszögű potenciálvölgyben mozgó részecske,

ii) valamint harmonikus oszcillátor esetében!

26. feladat. Határozza meg az impulzus valószínűségeloszlását harmonikus oszcillátor ψ_0 alapállapota esetében!

27. feladat. Számítsa ki a $[p^2, L_k]$ kommutátort!

28. feladat. Igazolja, hogy az $\vec{L}$ pályaimpulzusmomentumú $V(\vec{r})$ potenciálban mozgó részecske esetén teljesül a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{L}\rangle = \langle\vec{N}\rangle$$

összefüggés, ahol $\vec{N} = \vec{r} \times (-\vec{\nabla}V)$.

29. feladat. A részecskét leíró hullámfüggvény $2(x^2 + y^2)\, f(x^2 + y^2 + z^2)$. Milyen valószínűséggel vesz fel L_z meghatározott értékeket?

30. feladat. Határozza meg az energianívókat és a normált sajátfüggvényeket a

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } r > a, \\ 0, & \text{ha } r \leq a \end{cases}$$

centrális potenciálban $l = 0$ impulzusmomentumú állapotban!

31. feladat. Határozza meg az S_i $(i = 1, 2, 3)$, S^2, $S_\pm$ operátorokat reprezentáló mátrixokat 1 és 3/2 spinű részecske esetén!

32. feladat. Végezze el a 3/2 és az 1/2 spinek összeadását! Határozza meg a megfelelő Clebsch–Gordan-együtthatókat!

33. feladat. Az $\vec{n}$ irány körüli ϕ szöggel való forgatás operátora $\exp\left(i\vec{L}\vec{n}\phi/\hbar\right)$, ahol $\vec{L}\vec{n}/\hbar$ az $\vec{n}$ irány körüli forgatás generátora. Analóg módon spin esetén a „forgatás" generátora $\vec{S}\vec{n}/\hbar$. Ennek értelmében 1/2 spin esetén a spinorok

$$\chi \longrightarrow \chi' = \exp\left(i\vec{\sigma}\vec{n}\phi/2\right)\chi$$

módon transzformálódnak, ahol $\vec{\sigma}$ a Pauli-mátrixok.

i) Határozza meg az x-tengely körüli π szöggel való elforgatás 2×2-es mátrixát, és mutassa meg, hogy ez alatt a χ_+ a χ_- spinorba transzformálódik!

ii) Határozza meg az y-tengely körüli $\pi/2$ szöggel való elforgatás 2×2-es mátrixát, és keresse meg, hogy ez alatt a χ_+ spinor hogyan transzformálódik!

iii) Határozza meg a z-tengely körüli 2π szöggel való elforgatás 2×2-es mátrixát, és értelmezze az eredményt!