

A kvantumelmélet alapjai II.

0) zm.: $G \ni g \xrightarrow{1. \text{ora}}$

a) Alr. m. $\mapsto D(g): V \rightarrow V \ni \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ fizikai mennyiségek

eg. Hilbert
ter.: $U(g): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \ni |\psi\rangle$

$$|\psi'\rangle = \hat{U}(g) |\psi\rangle$$

$\hookrightarrow$ invariáns állapot?

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ik } \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi\rangle \\ \text{ik } \frac{d|\psi'\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi'\rangle \end{array} \right. \text{ szimmetria esetén}$$

$$(\hat{H}, \hat{U}(g)) = 0$$

$$\hat{U}: U^\dagger = U$$

U maga a fiz.
mennyiség.

(pl. paritás, ...)

$$\hat{U}(g) = e^{i\alpha \hat{A}}$$

$\uparrow$
generátor

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

a generátor bnz fiz.

mennyiség

$$\frac{d\hat{F}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}]$$

A szilveszter-féle felbontás a Hamilton invariáns állapotaira, melyek a szim. operátorok is invariáns állapotok lesznek.

Keressük azt a (hipotetikus) operátort, melynek egyenes (1D- $\rightarrow$) állási vannak.

Gyakorlatban egymással kommutáló operátorok sajátértékeit (kvantumszámait) keressük, pl. $\hat{H}, \hat{L}^2, L_z \rightarrow n, l, m$
 $+ S_z (\text{spin}) \rightarrow +\frac{1}{2}$

h) Forgácsoló ábrázolási (GL(V)-n):

$$j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$$

$$m \in \underbrace{\{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}}_{d=2j+1}$$

$$F \Rightarrow F(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\alpha \mathcal{F}^{(1)}} e^{i\beta \mathcal{F}^{(2)}} e^{i\gamma \mathcal{F}^{(3)}} \quad \mathcal{F}_{lm}^{(k)} = -i\epsilon_{lmn} \mathcal{F}^{(n)}$$

$$\mathcal{F}^{(k)\dagger} = \mathcal{F}^{(k)}$$

$$[\mathcal{F}^{(k)}, \mathcal{F}^{(l)}] = i\epsilon_{klm} \mathcal{F}^{(m)}$$

$$\downarrow$$

$$D(F(\alpha, \beta, \gamma)) = e^{i\alpha S^{(1)}} e^{i\beta S^{(2)}} e^{i\gamma S^{(3)}}$$

$$S: V_n \rightarrow V_n$$

$$S^{(k)\dagger} = S^{(k)}$$

$$[S^{(k)}, S^{(l)}] = i\epsilon_{klm} S^{(m)}$$

$$C = \sum_k S^{(k)} S^{(k)} \quad [C, S^{(k)}] = 0$$

(Casimir - operátor)

$$S_0 := S^{(3)} \quad S_{\pm} = S^{(1)} \pm i S^{(2)}$$

$$S^{(3)} = S_0 \quad S^{(1)} = \frac{S_+ + S_-}{2} \quad S^{(2)} = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$[S_0, S_{\pm}] = \pm S_{\mp} \quad [S_+, S_-] = 2S_0$$

$$C = S_+ S_- + S_0 + S_0^2$$

$$S_+^\dagger = S_- \quad S_0^\dagger = S_0 \quad C^\dagger = C$$

$$C |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle$$

$$S_0 |jm\rangle = m |jm\rangle$$

$$S_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} |j, m\pm 1\rangle$$

- $\hookrightarrow$ Mekkora az albrndások fizikai mennyiségekben:

$j=0 \rightarrow 10$ albrndás

$j=1 \rightarrow 30$ albrndás: ugyanolyan dim.-je, mint az eredeti ~~albrndások~~ mennyiségek (helyvektor)

$\Downarrow$
önalbrndás

$j=2 \rightarrow 50$ alr. $\rightarrow$ nincs!

$\downarrow$
"ellbrújik" egy reducibilis tenzoralbrndásban

$3^n \rightarrow n=2$ (2 indexes tenzorok) $\begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 5 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 5 \end{matrix}} \right\} 3 \text{ ined. kompon.}$
(Spur-talan szimmetria)

$SU(3)$ lokális fedéscsoportja az $SU(2)$

$\Downarrow$

keves indexű ábr. klassz. fizikában nem jön elő.

- Milyen az ábr. a Kibék-tér? Megjelenik az 50, ... ábrákban is.

• Koord. reprezentáció: Találjuk olyan kv.-eket (Δ op. függő)

$\downarrow$
 L, S diffop. lesz

évek), melyek az egyes állapotok ^{koord. repr.} valószínűsége meg: $\langle \vec{r} | j m \rangle = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

• Láttuk, hogy:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sum_m c_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad \text{fogadás}$$

Elfogadás felírható ~~gömbfelületen~~ ilyen mátrixokkal.

• A gömbkv.-ek a gömbfelületen teljes rendszer alkotnak

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad \text{Fourier - sorfejtés}$$

$$c_{lm} = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \cdot f(\vartheta, \varphi) \quad \text{inverted Fourier}$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = N_{lm} (\sin \vartheta)^{|m|} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$2-|m|$

1) Áll: Elemi objektumok abszolútban olyan text kell

választani, hogy:
gömbfkt.-es ábr. $\Psi(r)$

j indexű ind. abszolút

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathbb{L}^{(2)}(\mathbb{R}^3)}_{\text{negyzetesen int. fr.-ektér} (\infty \text{ dim})} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^{2j+1}}_{\substack{\downarrow \\ 2j+1 \text{ dim komplex tér}}}$$

$\mathcal{H}$ is egy skálázott tér

$(r+\epsilon)\psi \rightarrow$ a gömbfkt.-ektér is
↑
alján bármikor lehet le

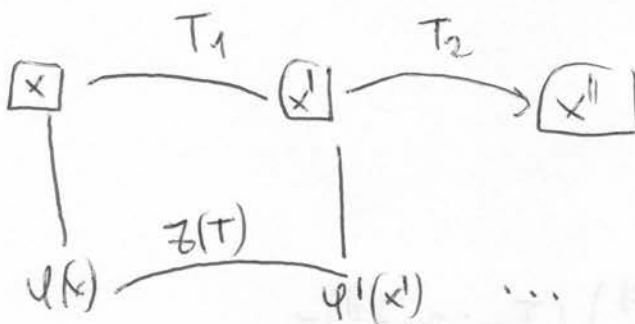
$$\sum_k \psi_k \otimes \psi_k$$

fr.-tér bázisa $\rightarrow |x\rangle$ (hely sajátáll.)

$\Rightarrow$ leegyeztesítendő bázis

$$\begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \\ \vdots \\ \psi_{2j+1}(r) \end{pmatrix}$$

$\psi_i(r) \infty \text{ dim.} \rightarrow$
 $\approx$ miatt



$$U'(x') = Z(T) U(x)$$

$$U'(Tx) = Z(T) U(x)$$

$$\boxed{U'(x) = Z(T) U(T^{-1}x)}$$

$\rightarrow$ így az exakti térben kell leírni
az állapotaikat

$S(3) \ni F(\alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{\quad} R(F) : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$
 (hangzó) $\nwarrow \quad \nearrow$
 $D^{(j)}(F) : \mathbb{C}^{2j+1} \rightarrow \mathbb{C}^{2j+1}$

pontosan
 → enél meg nem volt szó
 (hangzó hogyan?
 alv. - nek fr. tén.)

$A \in 1 \dots 2j+1$

$\Psi_A'(x) = D^{(j)}(F)_{AB} \Psi_B(F^{-1}x)$

$\Psi'(x) = T(T^{-1}x)$

$B = 1, 2, \dots, 2j+1$

operator

fr. tén

tén. határozat
 így hívjuk le
~~nem hívjuk le~~

→ az már réstűk (S)

matricák

↓
fogható

link a

S-generátorok

generátorok

(matricák)

váltak

(diffon.)

itt tudjuk

exp.-ni

← ezeket kéne

exponencializálni

$F = e^{i\alpha J^{(1)}} e^{i\beta J^{(2)}} e^{i\gamma J^{(3)}}$

$D(F) = e^{i\alpha S^{(1)}} e^{i\beta S^{(2)}} e^{i\gamma S^{(3)}}$

$(S^{(1)}, S^{(2)}) = i\hbar \text{Elem } S^{(3)}$

↳ a k-t beledefiniálom az S-ekbe

S-ek a j indexes alv.-hoz tartozó, $(2j+1) \times (2j+1)$ -es

matricák

~~Def~~

Def Ha α kicsi!

$e^{i\alpha J} \sim I + i\alpha J$

$F(\alpha, \beta, \gamma) = (I + i\alpha J^{(1)})(I + i\beta J^{(2)})(I + i\gamma J^{(3)}) =$

$= I + i(\alpha J^{(1)} + \beta J^{(2)} + \gamma J^{(3)}) \dots$ (lin. rendig) $= I + i\mathcal{J} J$

$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \mathcal{J} := \begin{pmatrix} J^{(1)} \\ J^{(2)} \\ J^{(3)} \end{pmatrix}$

$$D^{(j)}(F) = \left(I_{2j+1} + \frac{i}{\hbar} \alpha S^{(1)} \right) \left(I + \frac{i}{\hbar} \beta S^{(2)} \right) \left(I + \frac{i}{\hbar} \gamma S^{(3)} \right) = \\ = I + \frac{i}{\hbar} \left(\alpha S^{(1)} + \beta S^{(2)} + \gamma S^{(3)} \right) = I + \frac{i}{\hbar} \underline{U} \cdot \underline{S}$$

II

$$\psi_A'(r) = D^{(j)}(F)_{AB} \psi_B(\underline{r}) = \left(I + \frac{i}{\hbar} \underline{U} \cdot \underline{S} \right)_{AB} \psi_B \left((I - i \underline{U} \cdot \underline{S}) \underline{r} \right) = \\ = \left(\delta_{AB} + \frac{i}{\hbar} U_k S_{AB}^{(k)} \right) \psi_B \left(\underline{r} - i \underline{U} \cdot \underline{S} \underline{r} \right) =$$

$$= \left(\delta_{AB} + \frac{i}{\hbar} U_k S_{AB}^{(k)} \right) \left[\psi_B(\underline{r}) + \frac{\partial \psi_B}{\partial r_\ell} \underbrace{\left(-i \underline{U} \cdot \underline{S} \right)_\ell}_{\text{az egy matrix}} \right] =$$

$$U_k S_{lm}^{(k)} x_m$$

$$= \psi_A(\underline{r}) + \frac{i}{\hbar} U_k S_{AB}^{(k)} \psi_B(\underline{r}) + \delta_{AB} \cdot \frac{\partial \psi_B}{\partial r_\ell} (-i) U_k S_{lm}^{(k)} x_m$$

$$+ \underbrace{O(U^2)}_{\text{elhagyjuk } (U \text{ kicsi})} =$$

$$= \psi_A(\underline{r}) + \frac{i}{\hbar} U_k \left[S_{AB}^{(k)} - \underbrace{\delta_{AB} S_{lm}^{(k)} x_m \frac{\partial}{\partial x_\ell}}_{\text{az egy diffop. -bol (is málból) lelt matrix}} \right] \psi_B =$$

az egy diffop. -ból (is málból)
lelt matrix

$$S_{lm}^{(k)} = -i \epsilon_{klm}$$

$$= \psi_A(\underline{r}) + \frac{i}{\hbar} U_k \left(S_{AB}^{(k)} - \delta_{AB} \cdot (-i \epsilon_{klm}) x_m \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) \psi_B =$$

$$= \Psi_A(r) + \frac{i}{\hbar} \psi_B \left[\int_{AB}^{(k)} + \int_{AB} \sum_{kml} \times_m \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right] \Psi_B$$

$\uparrow$
 negative
 or indexed

$$\hat{L}_k = \epsilon_{kmn} \hat{x}_m \hat{p}_n$$

$$\Psi'_A(r) = \Psi_A(r) + \frac{i}{\hbar} \psi_B \left[\int_{AB}^{(k)} + \int_{AB} \hat{L}_k \right] \Psi_B(r)$$

$\swarrow$
 $L^2 \otimes C^{2j+1}$ then has
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\hat{L}_k \quad \int_{AB}$

$$\underline{J} := "L+S" = L \otimes 1 + 1 \otimes S$$

bits:

(direkt summiert über alle n -de

$$\forall \psi \in W \Rightarrow u = \sum \sum \alpha_{kl} e^{(k)} \otimes f^{(l)}$$

$$\hat{A}: V \rightarrow V \quad \hat{A} u = \sum \sum \alpha_{kl} (\hat{A} e^{(k)}) \otimes f^{(l)}$$

$$\hat{B}: W \rightarrow W \quad \hat{B} u = \sum \sum \alpha_{kl} e^{(k)} \otimes (B f^{(l)})$$

$$" \hat{A} + \hat{B} " = A \otimes I_2 + I_1 \otimes B$$

bil. über hat operator "isomorph")
 normal über

$\underline{J}$: normal über hat op.

$$\psi'_A(r) = \psi_A(r) + \frac{i}{\hbar} \mathcal{Q}_n \mathcal{T}_{AB} \psi_B = \psi_A(r) + \frac{i}{\hbar} (\mathcal{Q} \mathcal{T})_{AB} \psi_B$$

$$\psi' = \left(\mathbf{I} + \frac{i}{\hbar} (\mathcal{Q} \mathcal{T}) \right) \psi$$

a mondat ténis ez általánosan a forgatást kis növekedés!

(generátoroknál nem kell expon.-ni)

ha $\mathcal{Q}$ nem kicsi:

$$(F(\mathcal{Q}) = 1 + \frac{i}{\hbar} \mathcal{Q} \mathcal{T}) \quad \#$$

$$\rightarrow F\left(\frac{\mathcal{Q}}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{Q} \mathcal{T} \right) \text{ ez igaz, ha } n \text{ nagy}$$

$$F(\mathcal{Q}) = \left(F\left(\frac{\mathcal{Q}}{n}\right) \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{Q} \mathcal{T} \right) \right)^n \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{Q} \mathcal{T}}$$

$\Downarrow$

$$\psi' = \left(\mathbf{I} + \frac{i}{\hbar} (\mathcal{Q} \mathcal{T}) \right) \psi \rightarrow \boxed{\psi' = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{Q} \mathcal{T}} \psi}$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{L} + \mathcal{S}$$

("Lie-algebra a csoport logaritmus")

$\Rightarrow$ ez direkt mondat ténis is igaz

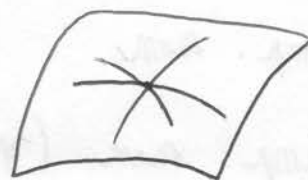
nem kommutálóak $S^{(A)}$ -k!

$$\left(\begin{array}{c} i \alpha S^{(1)} \\ e \\ i \beta S^{(2)} \\ e \\ i \gamma S^{(3)} \\ e \end{array} \right) \downarrow i(\alpha S^{(1)} + \beta S^{(2)} + \gamma S^{(3)}) \approx e$$

↑
csak akkor igaz, ha α, β, γ kicsi

- g -

$\rightarrow$ precízén ezzel is foglalkozni kellett volna,



de kis növekedés és jó

$$\underline{\psi}' = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{L} \cdot \underline{\Xi}} \underline{\psi}$$

a forgásmozgató generátorának alkalmazása a direkt szorzat
terén lenni és

• $\underline{\Xi}$ itt már lehet felejtés is!

($L^2(\mathbb{R}^3)$ tényleg vektortér, de $\mathbb{C}^{2j+1}$ lehet felejtés is)

• $\underline{\Xi}$ is ~~hermitikus~~ hermitikus, teljesíti a kommutátor ~~relációkat~~ relációkat

• $\underline{\psi}$ - k spinorok

(mivel itt minden csak $j = \frac{1}{2}$ ~~teret~~ teret hirtelen spinorok)

fel:
 Az elektronok viselkedését akkor lehet leírni, ha
 ilyen spinorokat alkalmazunk!

✓
 pl. több
 energiaszint
 van, mint
 $L = \hbar l$

↘
 vagy $\underline{\Xi}$ kommutál, de $\underline{L}$ és $\underline{S}$ nem
 ($\underline{L}$ és $\underline{S}$ nem marad külön)
 pl. spin-pályák.

$\underline{L}$: pályaimp. mom.

$\underline{S}$: belsőimp. mom. (spin)

• Mi az imp. mom. operátor?

az, ami a forgatáshoz általánosan generalja!

direkt szorzat lesz az 7!

• (Kisjelek: forgatások $\rightarrow$ traktor $\rightarrow$ 7)

• Kvantummechanikailag nem az az összeadott rendszer, ha Hilbert-térket direkt összeadjuk, hanem direkt szorzat!

• Elemi részecske: $D: \mathbb{C}^{2j+1} \rightarrow \mathbb{C}^{2j+1}$ irreducibilis (nem igaz, de most jó lesz)
Elektron: $j = \frac{1}{2}$

Elektron spinje $\sim$ mágneses momentum

pl. kristályokban atomon (kötött rögz.) "kötött" elektronok (szabadon mozgó elektronok)

↑ visszajelzés

↓ nem $\approx$ függő (levegőtjűk)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$S_- = \dots$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow S^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^{(k)} = \frac{1}{2} \sigma^{(k)}$$

($\sigma^{(k)}$: Pauli-matrixek)

Def. tegyük meg a piro!



erre a tengelyre milyen m. - el kapok $\frac{+1}{2} / -\frac{1}{2}$ -et?

= Spin algebra (ez már nem csatolom, hanem kvantummechanika)

2. ora

0) 1. m.:

elemi részecske: spinor $\leftarrow$ L^2 térben $(\frac{1}{2})$ r.e.-ei helyi m. r. fok

I. Most a spin részecske logalkorunk! $\leftarrow$ L^2 térben $(\frac{1}{2})$ r.e.-ei helyi m. r. fok

$$1) F \approx SO(3) \ni F(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J^{(1)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}}$$

$$D^{(j)}(F(\alpha, \beta, \gamma)) = e^{-i\alpha J^{(1)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}}$$

$$C = J^{(1)2} + J^{(2)2} + J^{(3)2} \quad [C, J^{(k)}] = 0 \quad (\forall k=1,2,3)$$

$$J^{(3)}|jm\rangle = m|jm\rangle$$

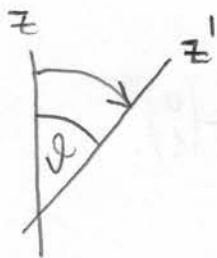
$$C|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle$$

$$\downarrow \\ [C, D(F)] = 0$$

Ha j -t rögzítjük, a rendszer ~~állapota~~ állapotai:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j c_m |jm\rangle$$

$$W_\psi(J^{(3)}=m) = |c_m|^2$$



Ka ~~át~~írjuk másik tengelyre, hogy lehet az előzőt átírni?

- Operátorokat írjuk át
- Állapotokat írjuk át, megőrzi forgatással

$$|jm\rangle_{z'} = D^{(j)}(F) |jm\rangle_z = \sum_{m'} c_{m'm} |jm'\rangle_z$$

$$c_{m'm} = \langle jm' | D^{(j)}(F) | jm \rangle$$

• x ~~g~~ tengely, θ szög, $j = \frac{1}{2}$ (spec. eset):

$$\begin{aligned} D^{1/2}(F_x(\theta)) &= e^{-i \frac{\theta}{2} J_x} D^{(1/2)}(F_z(1)) = e^{-i \frac{\theta}{2} \sigma^{(1)}} = \cos \frac{\theta}{2} \mathbb{I} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma^{(1)} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

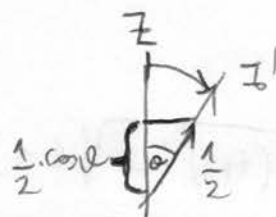
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{z'} = D^{(1/2)}(F) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_z + (i \sin \frac{\theta}{2}) \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_z$$

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$w\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$



~ Előredefiniált-tétel
 $\langle \text{kvantum} \rangle \rightarrow \text{klassz.}$
 $\downarrow$

$$\overline{J_z} = \left(+\frac{1}{2}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos \theta$$

→ várható értékben klasszikusan értelmezhető!! eredményt kapunk

$$\left| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle_I = D^{1/2}(\varphi) \left| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -i \sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \sin \frac{\varphi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \frac{\varphi}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = \sin \frac{\varphi}{2} \quad w\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\varphi}{2}$$

(Akkor lesz 100% a w.r., ha $\varphi = 0, 180^\circ$.)

j=1:

$$2) \quad \mathcal{J}^{(1)} = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \quad \mathcal{J}^{(2)} = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix} \quad \mathcal{J}^{(3)} = \begin{pmatrix} i & -i \\ & \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{lm}^{(k)} = -i \hat{L}_{lm}$$

↓

abszolva $j=1$ ($\dim=3$) tén

$$\hookrightarrow S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{J}^{(1)}, \mathcal{J}^{(2)}, \mathcal{J}^{(3)}$$

az önállóak nem lehetünk a $\mathcal{J}$ -s helyre

vektor az, ami olyan, mint az $\frac{r}{r}$ vektor

• Kvantumban nem tényleg nincs, mert fontos a hely a v. l.-ek miatt!

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} j & & \\ & \ddots & \\ & & -j \end{pmatrix} \rightarrow S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad j=1 \rightarrow$$

Mik lesznek $S^{(1)}$ és $S^{(2)}$?

$$S_+ |j m\rangle = j(j+1) - m(m+1) |j, m+1\rangle$$

$$S_+ |1 1\rangle = 0$$

$$S_+ |1 0\rangle = \sqrt{1(1+1) - 0} |1 1\rangle = \sqrt{2} |1 1\rangle \rightarrow \text{nek } \sim \text{vektorok}$$

$$S_+ |1 -1\rangle = \sqrt{1(1+1) - (-1)(0)} |1 0\rangle = \sqrt{2} |1 0\rangle$$

$$\begin{aligned}
 |1,1\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 |1,0\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 |1,-1\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \Rightarrow S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{S_+ + S_-}{2}$$

$$S^{(2)} = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & & \\ 1 & & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

S_z s. vektorainak
bázisban

Eladatok: x tengely körüli, φ mögött forgatás

$$\rightarrow D^{(j=1)}(F_x(\varphi)) = e^{-i\varphi D^{(1)}_x} F^{(1)} = e^{-i\varphi S^{(1)}} \quad (\text{mögött forgatás, mint az előbb})$$

(csak mi tüntettük ki a z tengelyt)

$S^{(1)}$ s. l. -ei ugyanazok! ~~minis~~

$S^{(1)}$ s. vektorai:

$$\lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}} = u^{(1)}$$

$$\lambda = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = u^{(2)}$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = u^{(3)}$$

$$f^{(1)} = 1 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(f(\vartheta)) = e^{-i\vartheta \cdot 1} \rho^{(1)} + e^{-i\vartheta \cdot 0} \rho^{(2)} + e^{-i\vartheta \cdot (-1)} \rho^{(3)} =$$

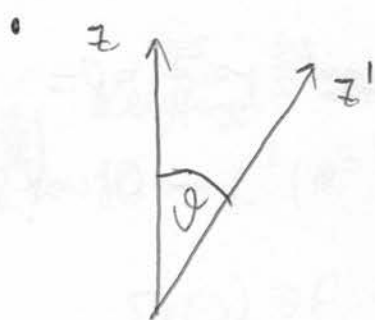
$$= e^{-i\vartheta} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{i\vartheta} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} & -\sqrt{2}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) & e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} \\ -\sqrt{2}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) & 2(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) & -\sqrt{2}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) \\ e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} & -\sqrt{2}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) & e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -i\sqrt{2} \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ -i\sqrt{2} \sin \vartheta & 2 \cos \vartheta & -i\sqrt{2} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & -i\sqrt{2} \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta & -i\sqrt{2} \sin \vartheta & -1 + \cos \vartheta \\ -i\sqrt{2} \sin \vartheta & 2 \cos \vartheta & -i\sqrt{2} \sin \vartheta \\ -1 + \cos \vartheta & -i\sqrt{2} \sin \vartheta & 1 + \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} & -i\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} & -\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ -i\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} & \cos \vartheta & -i\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ -\sin^2 \frac{\vartheta}{2} & -i\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} & \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$



$$S_{z'} = 1$$

$$|1\ 1\rangle_{z'} = U(F) |1\ 1\rangle_z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\sin^2 \frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2} |1\ 1\rangle_z + (-i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}) |1\ 0\rangle_z + (-\sin^2 \frac{\theta}{2}) |1\ -1\rangle_z$$

$$w(1) = \cos^4 \frac{\theta}{2}$$

$$w(0) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$w(-1) = \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

$$\sum w = \cos^4 \frac{\theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2} =$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 = 1$$

$$\overline{S_z} = 1 \cdot \cos^4 \frac{\theta}{2} + 0 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + (-1) \sin^4 \frac{\theta}{2} = \cos^4 \frac{\theta}{2} - \sin^4 \frac{\theta}{2} =$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \underbrace{\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}_1 = \cos \theta$$

$$S_{z'} = 0$$

$$|1\ 0\rangle_{z'} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta \\ -i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |1\ 1\rangle_z +$$

$$+ \cos \theta |1\ 0\rangle_z + (-i\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}) |1\ -1\rangle_z$$

$$w(1) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$w(0) = \cos^2 \theta$$

$$w(-1) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sum w = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \theta = \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\bar{S}_z = \sum m w(m) = 1 \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 0 \cdot \cos^2 \vartheta + (-1) 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = 0 =$$

$$= 0 \cdot \cos \vartheta$$

$$\bullet |1 -1\rangle_{z^1} = \dots$$

$$\bar{S}_z = -1 \cdot \cos \vartheta$$

3). A $j = \frac{1}{2}$ spinálgebra általánosítható 2 állapotú rendszerekre,
pl. isospin (p^+, n^0)

• $j = 1 \rightarrow$ 3 áll. rz. $\rightarrow$ pionok

DE itt a superpozíciók (forgatás) ^{nagy pl.} nem valósulnak meg
a töltésmegmaradás miatt (nem lehet p^+ és n^0 superpozíciója)

DE pl. $j = \frac{3}{2} \rightarrow$ kaonok: a 2 db 0 töltésű kaon } keveredhetnek
 $j = \frac{1}{2} \rightarrow$ neutronok: a 3 db $\checkmark$

• fotonok $\rightarrow$ polarizált (v. $\rightarrow$) állapotok $\leftrightarrow$ Jones-mátrixok
($\rightarrow$)
(berendezés $\leftrightarrow$ mátrixos leírás megvalósítható)

Miért van ez? Hamilton $\rightarrow$ 2×2 -es hermitikus mátrix

$\rightarrow \forall$ ilyen mátrix felírható a 3 Pauli és az egységmátrix segítségével

II) Helikopter rot (imp. mom.)
 $\mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \ni \psi(\underline{r})$

$$SO(3) \ni F \rightarrow \hat{R}(F): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\psi(\underline{r}) \mapsto \psi'(\underline{r}) = \psi(\underline{F}^{-1}\underline{r})$$

$$\begin{aligned} F(\alpha\beta\gamma) &= e^{-i\alpha\hat{J}^{(1)}} e^{-i\beta\hat{J}^{(2)}} e^{-i\gamma\hat{J}^{(3)}} \\ \hat{R}(F) &= e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{L}_1} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{L}_2} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{L}_3} \end{aligned}$$

$$\hat{L}_k = \epsilon_{klm} \hat{x}_l \hat{p}_m = \epsilon_{klm} x_l \frac{\hbar}{i} \nabla_m$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_1, \hat{L}_2] &= [\hat{x}_2 \hat{p}_3 - \hat{x}_3 \hat{p}_2, \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_1 \hat{p}_3] = (\hat{x}_2 \hat{p}_3 \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_3 \hat{p}_2 \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_3 \hat{p}_2 \hat{x}_1 \hat{p}_3 + \hat{x}_1 \hat{p}_3 \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_2 \hat{p}_3 \hat{x}_1 \hat{p}_3 + \hat{x}_1 \hat{p}_3 \hat{x}_3 \hat{p}_2 - \hat{x}_3 \hat{p}_2 \hat{x}_2 \hat{p}_1 + \hat{x}_2 \hat{p}_3 \hat{x}_2 \hat{p}_1) \\ &= \hat{x}_2 \hat{p}_3 \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_3 \hat{p}_2 \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_3 \hat{p}_2 \hat{x}_1 \hat{p}_3 + \hat{x}_1 \hat{p}_3 \hat{x}_3 \hat{p}_1 - \hat{x}_2 \hat{p}_3 \hat{x}_1 \hat{p}_3 + \hat{x}_1 \hat{p}_3 \hat{x}_3 \hat{p}_2 - \hat{x}_3 \hat{p}_2 \hat{x}_2 \hat{p}_1 + \hat{x}_2 \hat{p}_3 \hat{x}_2 \hat{p}_1 \\ &= \hat{x}_2 \hat{p}_1 (\hat{p}_3 \hat{x}_3 - \hat{x}_3 \hat{p}_3) + \hat{p}_2 \hat{x}_1 (\hat{x}_3 \hat{p}_3 - \hat{p}_3 \hat{x}_3) = \frac{\hbar}{i} \hat{L}_3 \end{aligned}$$

$[\hat{L}_k, \hat{L}_l] = i\hbar \epsilon_{klm} \hat{L}_m$ Lie-algebra generatoren ✓
 $\left[\frac{\hat{L}_k}{\hbar}, \frac{\hat{L}_l}{\hbar}\right] = i \epsilon_{klm} \frac{\hat{L}_m}{\hbar}$ → $\frac{\hat{L}_k}{\hbar}$ is $\mathfrak{so}(3)$ algebra a spin-1 algebra a fr. (L^2) then

3. ora

$$1) \hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} \quad (\hat{L}_a, \hat{L}_b) = i \hbar \epsilon_{abc} \hat{L}_c$$

$$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2 = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vartheta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\Psi(x, y, z) = \Psi(r(x, y, z), \vartheta(x, y, z), \varphi(x, y, z))$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \cdot \frac{1}{z} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \vartheta}{r^2} \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{r \sin \vartheta} =$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \cdot \frac{1}{z} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r} = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\frac{\sin \vartheta}{r}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2/x^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin \varphi}{r \sin \varphi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \varphi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

$$L_3 \psi = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

L_3 z tengely körüli forgatás generátora. Így választhatjuk a k. rendűt, hogy a part a ψ röggel leírható ki.

$$L_2 = \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar}{i} y \frac{\partial}{\partial x}$$

L_1 x tengely körüli forgatás)
 $L_2 \dots \rightarrow$ ezek rendűek

$$L^2 \psi = L_1(L_1 \psi) + L_2(L_2 \psi) + L_3(L_3 \psi) =$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \text{dgl.} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \rightarrow \Delta \text{ rögfüggő r-re}$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (\dots)$$

Mi köre a Δ -nak L^2 -hez?

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r_r^2 + r_\perp^2$$



Ugyanígy a $\hat{p}$ operátor is átirható ilyen formában (rad. + tangenciális)

$$J = mr^2 \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \dots + \frac{1}{2} \frac{J^2}{mr^2}$$

$$\overline{E_k} = \langle \psi | \hat{E}_k | \psi \rangle = \int dV \psi^* \hat{E}_k \psi$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

$$\int dV - \frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \underbrace{\nabla^2}_{\Delta} \psi$$

$$J^2 \longleftrightarrow \text{riöflygga } p_{\phi}$$

$$\Delta \psi = \lambda \psi \quad \psi = R(r) Y(\vartheta, \varphi)$$

$$L_1 S_z \rightarrow |jm\rangle$$

$$L_3 \rightarrow Y_{lm} = \chi(\vartheta) e^{im\varphi}$$

(2)

2) Clebsch - Gordon - együtthatók, spinösszeadás

pl. He atom $\rightarrow 2e^-$ spinje

vagy $L^2 + S^2$

"ismertebb endomorf" leírása direkt szorzatként ismét fel

$\Rightarrow$ direkt szorzat $\rightarrow 2$ endomorf leírása

$\rightarrow$ bizonyítható m. Hilbert tér (l.

2.óra $\rightarrow$ spin is befüggő lesz)

2 m. van: olyan operátorokat szeretnénk, melyek ezekre külön-külön tudnánk hatni

$\Downarrow$

direkt szorzat tér

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2D tér

$$\hat{A} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\hat{A}$ tetsz. herm. operator $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
(2x2-es)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = e^{-i\alpha J^1} e^{-i\beta J^2} e^{-i\gamma J^3}$$

$\hookrightarrow$

$$D(F) = e^{-i\alpha S^1} e^{-i\beta S^2} e^{-i\gamma S^3}$$

$$S^k = \frac{1}{2} \sigma^k$$

$\rightarrow$ Pauli-matrix

2 ^(2. sz. fokú) allapotok endorek mindig leírhatóak spinálgénál
(pl. isospin, polarizáció), az állók állentas miatt!

3 sz. fokú endorek is már nem igaz, mert $j=1$ - es
ábr. mátrixok ^{lin. komb. -ra} már nem adják ki az összes ^{hermitikus} 3×3 - as mátrixot!

$$C = (S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2$$

C kommutál S^1, S^2, S^3 -al $\Rightarrow$ Lie-algebra összes elemével $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Lie-izopot $\forall$ elemével

$\Downarrow$

$$C = \lambda \cdot I \quad (\text{Schur lemma})$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \quad S(S+1) = \frac{3}{4}$$

$$C = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_0 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$S_0 \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$S_0 |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle$$

$$S_0 |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{##} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

$$|\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\uparrow\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\downarrow\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma^3$$

$$S_{\pm} |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} |j m\pm 1\rangle$$

$$S_+ |\uparrow\rangle = 0$$

$$S_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$S_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

$$S_- |\downarrow\rangle = 0$$

$$S_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{(1)} = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma^1$$

$$S^{(2)} = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma^2$$

$$\Rightarrow |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$$

$$S_0 |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle$$

$$S_0 |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle$$

$$S_+ |\uparrow\rangle = 0$$

$$S_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$S_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

$$S_- |\downarrow\rangle = 0$$

$$C |\uparrow\rangle = \frac{3}{4} |\uparrow\rangle$$

$$C |\downarrow\rangle = \frac{3}{4} |\downarrow\rangle$$

- Másik spin:

$$|\uparrow\rangle_2 \quad (L: \text{nem feltétlenül a pályamomentum})$$

$$\begin{matrix} L_0 \\ \vdots \\ L_+ \\ \vdots \\ L_- \end{matrix}$$

- Direkt szorzat tér: 4×4

• bázisvektorok:

$$|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 = |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 = |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$L = I_1 \otimes \hat{L}$$

$$S = \hat{S} \otimes I_2$$

• az egyes térre ható S, L operátorok itt is kifejezhetők

• Legyen $\underline{J} = \underline{S} + \underline{L}$, vagyis:

$$\boxed{J^{(k)} = \hat{S}^{(k)} \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{L}^{(k)}}$$

$$\begin{aligned} J^{(3)} |\uparrow\uparrow\rangle &= (S^{(3)} |\uparrow\rangle_1) \otimes (I_2 |\uparrow\rangle_2) + (I_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (L^{(3)} |\uparrow\rangle_2) \\ &= \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 \otimes \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_2 = |\uparrow\uparrow\rangle \end{aligned}$$

$$J^{(3)} |\downarrow\downarrow\rangle = (-\frac{1}{2} |\downarrow\rangle_1) \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes (-\frac{1}{2} |\downarrow\rangle_2) = -|\downarrow\downarrow\rangle$$

$\Rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\downarrow\rangle$ sajátvektorok

$$J^{(3)} |\uparrow\downarrow\rangle = \left(\frac{1}{2} |\uparrow\rangle_1\right) \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 \otimes \left(-\frac{1}{2} |\downarrow\rangle_2\right) = 0 = 0 |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$J^{(3)} |\downarrow\uparrow\rangle = 0$$

$J^{(3)}$ -nak a $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ ^{basis} vektorok s. vektorai,
m-k özeandódnak!

$$[J^{(k)}, J^{(l)}] = i \sum_m \epsilon_{klm} J^{(m)} \quad (\text{mert } \underline{L} \text{ és } \underline{S} \text{ egymáshoz nem} \\ \text{zavargak})$$

J is impulzusmomentum (spin)!

Ennek is van Casimir operátora!

$$C = \sum J^{(k)2}$$

$$(\underline{J} = \underline{S} + \underline{L}) \quad J^2 = (\underline{S} + \underline{L})^2 = S^2 + L^2 + 2 \underline{S} \underline{L}$$

↑
skaláris szorzat!
 $(\sum S^{(k)} L^{(k)})$
NEM mátrisszorzat,
mert $\underline{S}$ és $\underline{L}$ nem
keverednek



megjegyzés: egyike latin, másik görög betűs indexek hat

↓ megjegyzés:

$$J^2 = \sum_k J^{(k)} J^{(k)} = \sum_k (S^{(k)} \otimes I_2 + I_1 \otimes L^{(k)}) (S^{(k)} \otimes I_2 + I_1 \otimes L^{(k)}) =$$

$$= \sum_k \left(S^{(k)} S^{(k)} \otimes I_2 I_2 + (I_1 S^{(k)}) \otimes L^{(k)} I_2 + S^{(k)} I_1 \otimes I_2 L^{(k)} + I_1 I_1 \otimes L^{(k)} L^{(k)} \right) =$$

$$= \left(\sum_k S^{(k)} S^{(k)} \right) \otimes I_2 + I_1 \otimes \left(\sum_k L^{(k)} L^{(k)} \right) + 2 \sum_k S^{(k)} \otimes L^{(k)} =$$

$$= \underline{\underline{C_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes C_2 + 2 \sum_k S^{(k)} \otimes L^{(k)} = \mathcal{F}^2}}$$

$$(C_1 = S^2, C_2 = L^2)$$

$$\underline{S} \underline{L} = \sum_k S^{(k)} \otimes L^{(k)} = S^{(1)} \otimes L^{(1)} + S^{(2)} \otimes L^{(2)} + S^{(3)} \otimes L^{(3)} =$$

$$= \frac{S_+ + S_-}{2} \otimes \frac{L_+ + L_-}{2} + \frac{S_+ - S_-}{2i} \otimes \frac{L_+ - L_-}{2i} + S_0 \otimes L_0 =$$

$$= \frac{\cancel{S_+} \otimes \cancel{L_+}}{4} - \frac{\cancel{S_+} \otimes \cancel{L_-}}{4} + \frac{\cancel{S_-} \otimes \cancel{L_+}}{4} - \frac{\cancel{S_-} \otimes \cancel{L_-}}{4} + \frac{S_- \otimes L_+}{2} + \frac{S_+ \otimes L_-}{2} + S_0 \otimes L_0$$

||

$$\boxed{\mathcal{F}^2 = S^2 + L^2 + S_- \otimes L_+ + S_+ \otimes L_- + 2 S_0 \otimes L_0}$$

also:

$$\mathcal{F}^2 = \sum_k \mathcal{F}^{(k)} \mathcal{F}^{(k)} = C_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes C_2 + S_- \otimes L_+ + S_+ \otimes L_- + 2 S_0 \otimes L_0$$

$$\begin{aligned}
 J^2 |\uparrow\uparrow\rangle &= (C_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (I_2 |\uparrow\rangle_2) + (\pm_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (C_2 |\uparrow\rangle_2) + \\
 &+ (\pm_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (L_+ |\uparrow\rangle_2) + (\pm_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (L_- |\uparrow\rangle_2) + 2(\pm_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (L_0 |\uparrow\rangle_2) \\
 &= \frac{3}{4} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 \otimes \frac{3}{4} |\uparrow\rangle_2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \cancel{|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2} = 2 |\uparrow\uparrow\rangle
 \end{aligned}$$

↑
 az j^2 az $j(j+1)$ alaknak lehetnek

$$J^2 |\downarrow\downarrow\rangle = 2 |\downarrow\downarrow\rangle \quad \checkmark$$

NOTE:

$$\begin{aligned}
 J^2 |\uparrow\downarrow\rangle &= (C_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (I_2 |\downarrow\rangle_2) + (I_1 |\uparrow\rangle_1) \otimes (C_2 |\downarrow\rangle_2) + \\
 &+ \underbrace{S_+ |\uparrow\rangle_1}_{|\downarrow\rangle_1} \otimes \underbrace{L_+ |\downarrow\rangle_2}_{|\uparrow\rangle_2} + \underbrace{S_+ |\uparrow\rangle_1}_0 \otimes \underbrace{L_- |\downarrow\rangle_2}_0 + 2 \underbrace{S_0 |\uparrow\rangle_1}_{\frac{1}{2} |\uparrow\rangle_1} \otimes \underbrace{L_0 |\downarrow\rangle_2}_{-\frac{1}{2} |\downarrow\rangle_2} \\
 &= \frac{3}{4} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{3}{4} |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle = \\
 &= \underline{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\uparrow\downarrow\rangle$ nem sajátvektor !

$$J^2 |\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \Rightarrow |\downarrow\uparrow\rangle \text{ sem sajátvektor !}$$

even a basis $(|1\uparrow\rangle, |1\downarrow\rangle, |1\downarrow\uparrow\rangle, |1\downarrow\downarrow\rangle \rightarrow \text{ortogonálisak})$

$\Rightarrow \langle 1\downarrow | F^2 | 1\uparrow \rangle, \dots$ 16 db mátrixelem

~~$(1\downarrow)$~~ F^2 nem diagonális!

$$F^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ diagonalizáljuk!

DE $F^{(3)}$ diagonális volt!

$\Rightarrow$ akkor az ~~alt~~ lehet csak diagonalizálni, ~~ahd~~

$F^{(3)}$ ugyanaz az ~~alt~~ lesz fel!

Belátható, hogy ezekben az ~~alt~~ben elég diagonalizálni

$\Rightarrow F^2$ is diagonális lesz.

Módsz:

$11\rangle$ $ 1\uparrow\rangle$	F_0	F^2
$ 10\rangle$	1	2
$\frac{ 1\uparrow\downarrow\rangle + 1\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$	0	2
$ 1-1\rangle$ $ 1\downarrow\downarrow\rangle$	-1	2
$\frac{ 1\uparrow\downarrow\rangle - 1\downarrow\uparrow\rangle}{2}$	0	0

$\Rightarrow$ a direkt szorzat ⁽⁴⁰⁾ felbontlik egy 30 és egy 10
~~de~~ direkt összegre (reducibilis ~~dr.~~ $\rightarrow$ ined. ^{dr.})

$$\Rightarrow j = \frac{1}{2} \otimes j = \frac{1}{2} \begin{matrix} \nearrow j=1 & (3D) & \text{triplet} \\ \searrow j=0 & (1D) & \text{singlet} \end{matrix}$$

$\Rightarrow 2e^-$ együttes rendszer egy singlet és egy triplet állapottal!

$\rightarrow$ ~~NINCS~~ külön hullámfn., nincs külön energia!
Együttes hullámfn. van, nem lehet felbontani ~~szorot~~
hullámfn.-ek szorzatára!

Ehhez kell az ábrázolás kidolgozása!

$\rightarrow$ Kincs 1-es spinű rész. se! Csak olyan állapotok van
a közös rendszernek, ami így ábrázolható (transzformálható)

$$\Rightarrow \begin{matrix} \int (j_1) & \int (j_2) \end{matrix}$$

$$H_1 \ni |j_1 m_1\rangle$$

$$H_2 \ni |j_2 m_2\rangle$$

$$m_1 \in \underbrace{-j_1 \dots j_1}_{d_1 = 2j_1 + 1}$$

$$m_2 \in \underbrace{-j_2 \dots j_2}_{d_2 = 2j_2 + 1}$$

$$H = H_1 \otimes H_2 \ni |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle, \text{ de ezek önmagukban } J^2\text{-nek nem vektorai}$$

$$J^{(3)} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = (m_1 + m_2) |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

$$|jm\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

$$\text{pl. } |10\rangle = \underbrace{C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{10}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\uparrow\downarrow\rangle + \underbrace{C_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cancel{|\uparrow\uparrow\rangle} \quad \cancel{|\downarrow\downarrow\rangle}$$

$$|00\rangle = \underbrace{C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{00}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\uparrow\downarrow\rangle + \underbrace{C_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00}}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cancel{|\uparrow\downarrow\rangle} \quad \cancel{|\downarrow\uparrow\rangle}$$

Ezek már sajátvektorek!
(F^2 -re is)

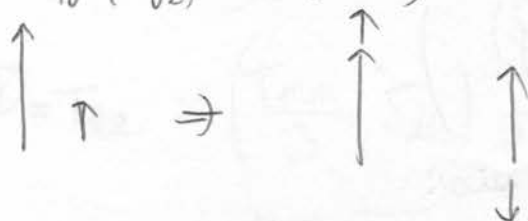
$$F^{(2)} |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle \quad j \in |j_1 - j_2| \dots (j_1 + j_2)$$

$$F_3 |jm\rangle = m |jm\rangle$$

$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$ = Clebsch - Gordon - együtthatók:

Hogy kell átírni a direkt szorzat altérben olyan új bázist, melyek F^2 -nek is saját (Casimirnak) és sajátvektorei

$$j \in (j_1 - j_2) \dots (j_1 + j_2)$$



semileletesen

(kötés állapotok: "nőgy zámok
ke" a spinerek)

$$D^{(\frac{1}{2})} \otimes D^{(\frac{1}{2})} = D^{(0)} \oplus D^{(3)}$$

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0 + 1 \right)$$

dimenzió: $2j+1$

$$(2 \cdot \frac{1}{2} + 1) (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1)$$

$$2 \cdot 2 = 1 + 3 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Összege

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)} \quad \text{Clebsch - sor}$$

Irreducibilis almodok direkt össze ~~felbont~~ már
reducibilis! $\rightarrow$ Irreducibilisre felbontható a direkt össze

the
(regisztrátorra igaz)

Ez most spec. est, mert ~~azonos~~ ^{adott} dim.-jú almodok

nem szerepelnek fölbeszár!

$$\left(\text{alt. lin.: } D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum m_j D^{(j)} \right)$$

↳ dimensionsmäßig stimmen hier, wie:

$$D^{(0)} \otimes D^{(j)} = D^{(j)}$$

$$1 \cdot (2j+1) = (2j+1) \quad \checkmark$$

$$D^{(3/2)} \otimes D^{(1)} = D^{(1/2)} \oplus D^{(3/2)} \oplus D^{(5/2)}$$

$$\text{dim.: } 4 \cdot 3 = 2 + 4 + 6$$

$$\text{alt. lin.: } D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$$

$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1)$$

$$D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(0)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(2)}$$

$$3 \cdot 3 = 1 + 3 + 5$$

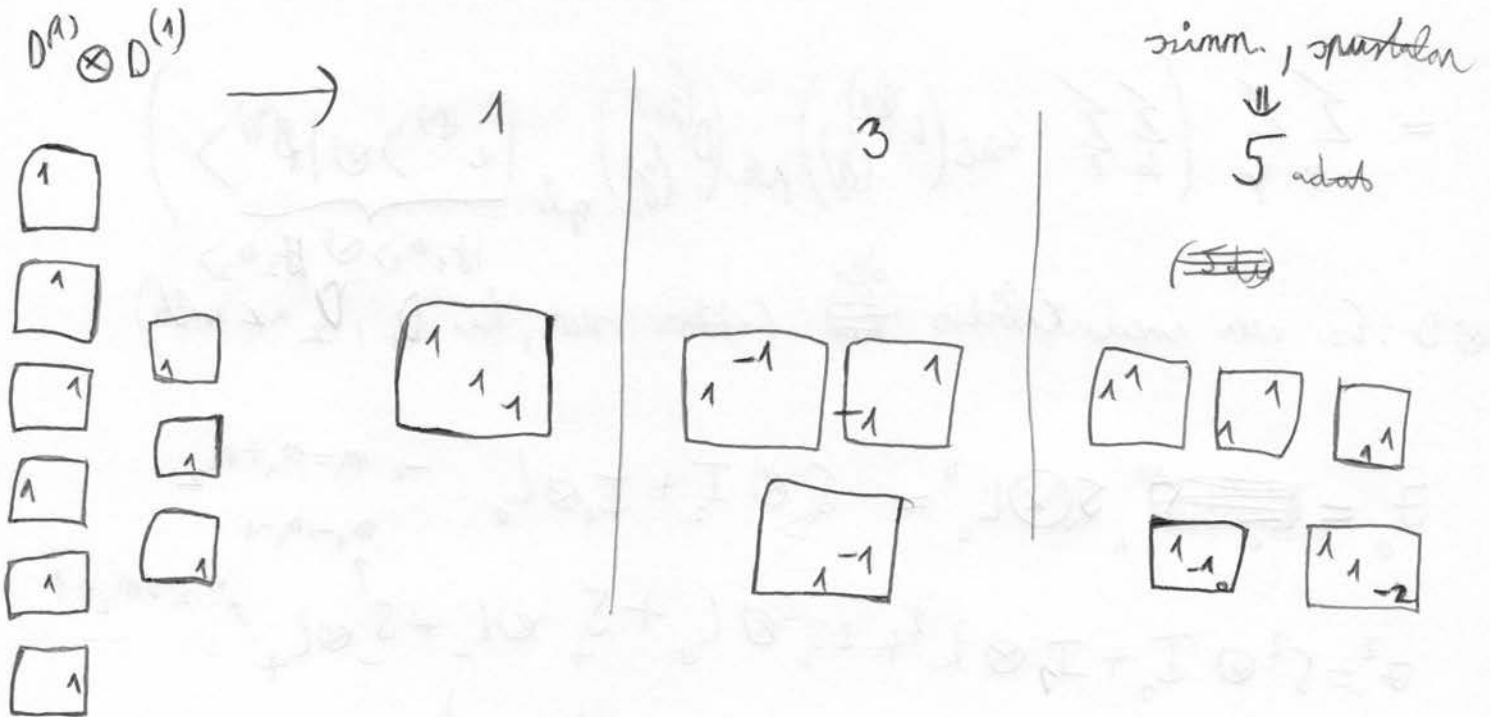
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{a.k.a.}) = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}_{T_{ee}}$$

$$T_{ee}^I = F_{eq} F_{eq} T_{Mr}$$

$$T_{ee} = \underbrace{\frac{T_{ee} + T_{ek}}{2}}_{T_{ee}} + \underbrace{\frac{T_{ee} - T_{ek}}{2}}_{A_{ee} = -A_{ek}} = \otimes$$

(symm. matrixe)
3x3 dim

$$\begin{aligned} \textcircled{*} = T_{ke} &= \underbrace{\left(\frac{T_{mm}}{3} S_{ee} \right)}_{D_{ee}} + \underbrace{\frac{T_{ee} - T_{kk}}{2}}_{A_{ee}} + \underbrace{\frac{T_{ee} + T_{kk}}{2} - T_{mm} S_{ee}}_{S_{ee}} \\ &\quad S_{ee} = S_{ee} \\ &\quad S_{mm} = 0 \end{aligned}$$



4.1.1 Dirac monst, Clebsch-Gordon alt, bar

$L \ni g \mapsto \rho^{(j_1)}(g) : V_1 \rightarrow V_1$ $V_1 \ni |e^{(k)}\rangle$ $V_1 \ni \underline{u} = \sum_k a_k |e^{(k)}\rangle$

$\rho^{(j_2)}(g) : V_2 \rightarrow V_2$ $V_2 \ni |f^{(l)}\rangle$ $V_2 \ni \underline{v} = \sum_l b_l |f^{(l)}\rangle$

Die-esp. (eddig) (folytatás)

$$W = V_1 \otimes V_2 \ni \underline{w} = \sum_k \sum_l c_{kl} |e^{(k)}\rangle \otimes |f^{(l)}\rangle$$

harminc azok
lin. komb. ja
- 35 -

↑
let. l. m. $\otimes$ let. l. m.
 $\neq$ a. l. m. $\otimes$ m. m.

$$D : D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$$

$$D(g) |w\rangle = \sum_k \sum_{\ell} c_{k\ell} \left(D^{(j_1)}(g) |e^{(k)}\rangle \otimes D^{(j_2)}(g) |f^{(\ell)}\rangle \right) =$$

$$A_{ee} = \langle e^{(a)} | \hat{A} | e^{(a)} \rangle \rightarrow \sum_k D^{(j_1)}(g)_{kk} |e^{(k)}\rangle \otimes \sum_{\ell} D^{(j_2)}(g)_{\ell\ell} |f^{(\ell)}\rangle$$

$$= \sum_k \sum_{\ell} \left(\sum_{k'} \sum_{\ell'} c_{k'\ell'} D^{(j_1)}(g)_{kk'} D^{(j_2)}(g)_{\ell\ell'} \underbrace{|e^{(k')}\rangle \otimes |f^{(\ell')}\rangle}_{|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle} \right)$$

$D \otimes D$: Ez nem irreducibilis ~~de~~ ^{de} (akkor sem, ha D_1, D_2 az volt)

$$J_0 = \cancel{S_0 \otimes L_0} = S_0 \otimes I_2 + I_1 \otimes L_0 \rightarrow m = m_1 + m_2$$

$$J^2 = S^2 \otimes I_2 + I_1 \otimes L^2 + 2S_0 \otimes L_0 + S_+ \otimes L_- + S_- \otimes L_+ \begin{matrix} \uparrow m_1 \rightarrow m_1 - 1 \\ \uparrow m_2 \rightarrow m_2 + 1 \\ \downarrow m_2 \rightarrow m_2 - 1 \\ \downarrow m_1 \rightarrow m_1 + 1 \end{matrix}$$

//

m -ek össze nem tartoznak! (retüllet összeadódik)

J^2 nem jön ki abból az altérből, ahol $m = \text{dél}$

(de abból igen, ahol $m_1, m_2 = \text{dél}$)

$$J^2 = \begin{pmatrix} \text{diagonal matrix} \\ \vdots \\ \text{diagonal matrix} \end{pmatrix}$$

$$D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(0)} \oplus D^{(1)}$$

Színösszeadás $\leftrightarrow$ direkt összeadás
?

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{|j_1 - j_2|} \oplus \dots \oplus D^{(j_1 + j_2)}$$

$\downarrow$
Ez csak a forgáscsoportra igaz!

$\checkmark$
spin a Lie-algebra eleme!

$\Downarrow$
a spin összeadódik,
ha a csoportelemek szorozhatók!

pl. $su(3)$ $3 \otimes 3' = 1 \oplus 8$
két antikvark mezonok

spec.-an forgáscsoportra:

- $|j_1 - j_2|$ és $(j_1 + j_2)$ között $\forall$ átváltás megjelenik
- $\forall$ átváltás csak 1-szer jelenik meg az ined. dekompozícióban! ($\rightarrow$ csoportelméletből belátható)

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{j} m_j D^{(j)} \quad \text{Clebsch - sor} \quad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

forgáscsoportra $\leftarrow$ ezek nem a Clebsch-Gordon-együtthatók!

$$m_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } j < j_1 + j_2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

csak a basisvektorok lineáris kombinációját adják le

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle$$

$$J^m |jm\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

$\uparrow$ $\downarrow$
Ez is
 $m_1 + m_2 = m$ Spec.-an forgáscsoportra

$$j_1 = \frac{3}{2}$$

$$j_2 = 1$$

$$d_1 = 4$$

$$d_2 = 3$$

$$V_1 \begin{array}{l} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \ 1 \rangle \\ 1 \ 0 \rangle \\ 1 \ -1 \rangle \end{array} \right.$$

$$m = m_1 + m_2$$

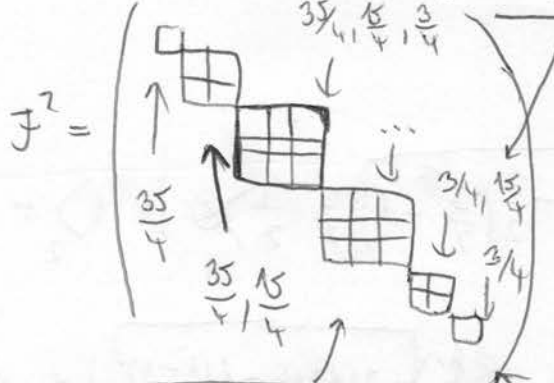
$$0 \otimes (3/2) \otimes 0^{(1)} = 0^{(1/2)} \oplus 0^{(3/2)} \oplus 0^{(5/2)}$$

$$4 \cdot 3 = 2 + 4 + 6 \quad \checkmark$$

		dim
$m = \frac{5}{2}$	$\left \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 1\rangle$	1
$m = \frac{3}{2}$	$\left \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 0\rangle \quad \left \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 1\rangle$	2
$m = \frac{1}{2}$	$\left \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \otimes 1 \ -1\rangle \quad \left \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 0\rangle \quad \left \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 1\rangle$	3
$m = -\frac{1}{2}$	$\left \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \otimes 1 \ -1\rangle \quad \left \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 0\rangle \quad \left \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 1\rangle$	3
$m = -\frac{3}{2}$	$\left \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes 1 \ -1\rangle \quad \left \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle \otimes 1 \ 0\rangle$	2
$m = -\frac{5}{2}$	$\left \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle \otimes 1 \ -1\rangle$	1
		$\frac{1}{12} \checkmark$

Ezek nem diagonálisak itteni J^2 -re

J^2 diagonalizálható és irreducibilis
 kell kijáratni



irreducibilis
 dekompozíció

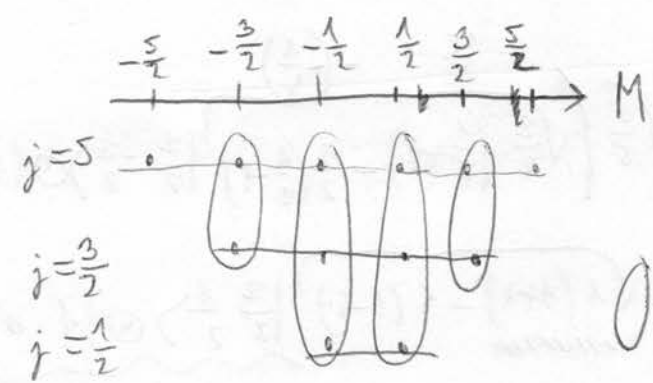
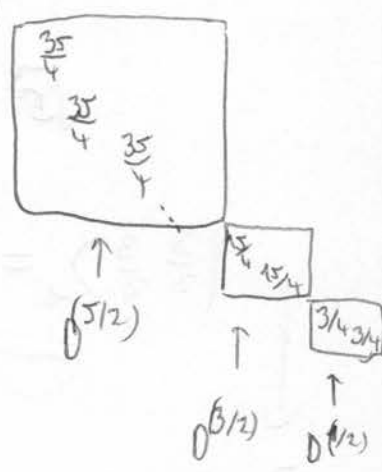
összerendszerezés az
 "szimmetrikus" sajátértékek
 lineárisvektorok

diag. nélkül így
 nem lehet J^2

még
 ezek nem az
 ined. állapotok!

$j(j+1)$ a sajátértékek

$\frac{3}{4}$ $\frac{15}{4}$ $\frac{35}{4}$
 $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $D^{(1/2)}$ $D^{(3/2)}$ $D^{(5/2)}$



0: ezek jöttek ki nekünk itt

— : átvándorlás

Eljárás:

a két rész "allapot" csak 1 félért jöhet ki (max. illetve min.
 vetületének összegeként)

$$J_- = J_- \otimes I_2 + I_2 \otimes L_-$$

$J = \frac{5}{2}$
 $M = \frac{5}{2}$

$$|\frac{5}{2} \frac{5}{2}\rangle = |\frac{5}{2} \frac{3}{2}\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$$

eredő az.

$$J_- |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

↓ J_- —————→

$$\sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)} \left| \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_e = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 1 \right\rangle_2 + \frac{35}{4} - \frac{15}{4} + \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_1 \otimes \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} \left| 1 0 \right\rangle_2$$

$$\sqrt{5} \left| \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_e = \sqrt{3} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 1 \right\rangle_2 + \sqrt{2} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 0 \right\rangle_2$$

↓

$$\left| \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_e = \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 1 \right\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 0 \right\rangle_2$$

↓ J_- —————→

$$\sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)} \left| \frac{5}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_e = \sqrt{\frac{3}{5}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 1 \right\rangle_2 + \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 0 \right\rangle_2 \right) + \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 0 \right\rangle_2 + \sqrt{1(1+1) - 0(0-1)} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 -1 \right\rangle_2 \right)$$

$$\sqrt{\frac{8}{5}} \left| \frac{5}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_e = \sqrt{\frac{3}{5}} \left(2 \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 1 \right\rangle_2 + \sqrt{2} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 0 \right\rangle_2 \right) + \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{3} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 0 \right\rangle_2 + \sqrt{2} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 -1 \right\rangle_2 \right)$$

$$= \sqrt{\frac{12}{5}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 1 \right\rangle_2 + \left(\sqrt{\frac{6}{5}} + \sqrt{\frac{6}{5}} \right) \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 0 \right\rangle_2 + \sqrt{\frac{4}{5}} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| 1 -1 \right\rangle_2$$

$$|\frac{5}{2} \frac{1}{2}\rangle_e = \sqrt{\frac{3}{10}} |\frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle \otimes |1 1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle \otimes |1 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle \otimes |1 -1\rangle$$

$$|\frac{5}{2} -\frac{1}{2}\rangle_e = (\dots) |\frac{3}{2} -\frac{3}{2}\rangle \otimes |1 1\rangle + (\dots) |\frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle \otimes |1 0\rangle + (\dots) |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle \otimes |1 -1\rangle$$

$$|\frac{5}{2} -\frac{3}{2}\rangle_e = 0 \quad |\frac{3}{2} -\frac{3}{2}\rangle \otimes |1 0\rangle \quad |\frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle \otimes |1 -1\rangle$$

$$|\frac{5}{2} -\frac{5}{2}\rangle_e = 0 + (\dots) |\frac{3}{2} -\frac{3}{2}\rangle \otimes |1 -1\rangle + \dots$$

= Ez az aljárás mechanikusan megoldja J^2 diagonalizációját!

+ egyértelműen megkaphatjuk az azonos j -hez tartozó

állapotokat (nem kell átrendezni!)

(más j -s állat)

- Hogyan megyünk a sorok között? Ortogonalitást felhasználva!

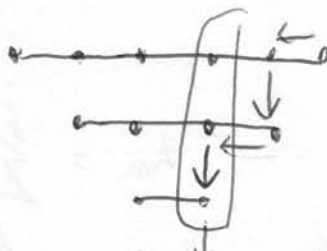
$$|\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle_e = \sqrt{\frac{2}{5}} |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle \otimes |1 1\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}} |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle \otimes |1 0\rangle$$

(megszámlálom az állapotokat, és az egyiknek 0-t adok)

J_- ↓

$$|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle_e = \dots$$

⋮



$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle_e = \dots$$

és a második 2 állapotra merőleges → lin. egy. sor.
(vagy vektoriális soros mátr.)

Irreducibilis tenzoroperátorok

(Alv. elmélet alapfeladatai:

Szimmetria ábrázolások

→ fizikai mennyiségek ~~értelmezés~~ lin. térben ható op.-kon (vektorok)

kvantummechanika: a fizik. -tér ^{ható op.-on is} ábrázolható! $\rightarrow \hat{R}$

NOTE: -||- ha is vannak fiz. mennyiségek ^{$\rightarrow \hat{A}$} (op.-ok)

$\rightarrow$ itt is ábrázolható a szimm. -ok ~~($\hat{A}$ op.-ok)~~ (vektor is transzformálják az ábrázolások?)

$$G \ni g \mapsto D^j(g) : V_{2j+1} \rightarrow V_{2j+1}$$

$$\mapsto R(g) : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

$$\mathcal{K} \ni |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = R(g) |\psi\rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{operátorok} \\ \text{transzformációja} \end{array} \right\} \begin{array}{l} |\psi\rangle = \hat{A} |\psi\rangle \\ \hat{R} \downarrow \\ |\psi'\rangle = \hat{R} \hat{A} \hat{R}^{-1} |\psi\rangle = \hat{R} \hat{A} \hat{R}^{-1} |\psi'\rangle = \hat{A}' |\psi'\rangle \end{array}$$

klassz. fiz:

$$A_m \rightarrow A_m' = \sum_{k=-j}^j D(g)_{mk} A_k$$

$m \neq j \dots j$

kvantum

$$\hat{A}_m \rightarrow \hat{A}_m' = \hat{R} \hat{A}_m \hat{R}^{-1} \rightarrow \text{a kül. m-ek nem keverednek}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & = \sum_k D^{(\hat{j})}(g)_{mk} \hat{A}_k \end{aligned}$$

Ka ez teljesül, akkor $\hat{A}$ j indexű irreducibilis tenzoroperátor
(fogásesqrst j indexű inep.-je rendű transzf.)

$\Uparrow$

$$\boxed{\sum_k D^{(\hat{j})}(g)_{mk} \hat{A}_k = \hat{R}(g) \hat{A}_m \hat{R}(g)^{-1} \quad \forall g \in G}$$

Ezt 4 csoportelemre meg lehet nézni

$\downarrow$

ehelyett

$$SO(3) \ni F = e^{-i\alpha J^{(1)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}} \approx I_3 - i(\alpha J^{(1)} + \beta J^{(2)} + \gamma J^{(3)})$$

ha α, β, γ kicsi (infinites.)

$$\begin{aligned} \downarrow D^{(\hat{j})} F &= e^{-i\alpha J^{(1)}} e^{-i\beta J^{(2)}} e^{-i\gamma J^{(3)}} \approx I - i(\alpha J^{(1)} + \beta J^{(2)} + \gamma J^{(3)}) \\ \downarrow \hat{R}(F) &= e^{-i\alpha \hat{L}_1} e^{-i\beta \hat{L}_2} e^{-i\gamma \hat{L}_3} \approx I - i(\alpha \hat{L}_1 + \beta \hat{L}_2 + \gamma \hat{L}_3) \end{aligned}$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$F \approx I_3 - i \underline{J} \underline{J}$$

$$D(F) \approx I_{2j+1} - i \underline{J} \underline{J}$$

$$\hat{R}(F) \approx I_{\infty} - i \underline{J} \underline{L}$$

$$R^{-1}(F) = R(F^{-1}) = I + i \underline{J} \underline{L}$$

$\Downarrow$

$$\sum_k (\mathbb{I} - i\psi \underline{S})_{mk} \hat{A}_k = (\hat{\mathbb{I}} - i\psi \hat{\underline{L}}) A_m (\hat{\mathbb{I}} + i\psi \hat{\underline{L}})$$

$\Downarrow$

$$\sum_k D(g)_{mk} \hat{A}_k = \hat{R}(g) \hat{A}_m \hat{R}(g)^{-1} \quad \forall g \in G$$

$$\hat{A}_m - i \sum_k (\psi \underline{S})_{mk} \hat{A}_k = \hat{A}_m - i(\psi \hat{\underline{L}}) \hat{A}_m + i A_m (\psi \hat{\underline{L}}) + \mathcal{O}(\psi^2)$$

$$\sum_k (\psi \underline{S})_{mk} \hat{A}_k = (\psi \hat{\underline{L}}) \hat{A}_m - \hat{A}_m (\psi \hat{\underline{L}})$$

ezt elhagyjuk
(ψ kicsi)

$$\sum_k \sum_l \psi_l S_{mk}^{(l)} \hat{A}_k = \sum_l \psi_l \hat{L}_l A_m - A_m \sum_l \psi_l \hat{L}_l \quad \forall \psi = x$$

$\downarrow l. (l \in \{1, 2, 3\})$

$$\sum_k S_{mk}^{(l)} \hat{A}_k = [\hat{L}_l, \hat{A}_m]$$

$$m \in \underbrace{-j \dots j}_{2j+1}$$

$\downarrow$ (S ismert mátrix, $\hat{L}$ ismert operátor)

ha $\hat{A}$ -ra ez teljesül ($\hat{A} \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$) (a kommutátorok
($\mathcal{K}$ -n ható

az $\hat{A}_k$ -k lin. kombinációi úgy, hogy az együtt hatók az
indep. S mátrixának elemei), akkor $\hat{A}$ j -indexű
indep. tenzoroperátor.

pl. $\hat{x} \quad j=1 \Rightarrow d=3$

$$(\hat{L}_l, \hat{x}_m) = i \epsilon_{lmk} x_k \quad (\text{használna } \hat{x} \text{ helyett } \hat{L})$$

↑
ez pont a $j=1$ ábrázolás
mátrixának elemei

⇓

amik szerint transformálódnak, def-szerint vektorok

$\Rightarrow \hat{x}, \hat{L}$ vektorszakozó

($\hookrightarrow$ ined. tenzorop.: a k tér és $2j+1$ dim. tér szorzatának kompatibilisnek kell lennie)

Wigner - Eckart tétel

$$|nlm\rangle \sim \psi_{nlm}(r) \sim f_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{H atom s. állapotai})$$

$$\hat{A}_M^{(\pm)}$$

$\leftarrow \pm$ indexű ined. tenzoroperátor (pontosabban $(M \in -\pm, \dots, \pm) \rightarrow$ annak egy komponense)

$$\langle n'l'm' | \hat{A}_M^{(\pm)} | nlm \rangle = ?$$

"fizika"

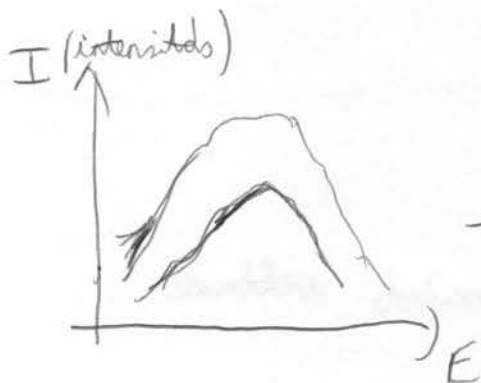
$$\text{All.: } \langle n'l'm' | \hat{A}_M^{(\pm)} | nlm \rangle = C_{\pm M l m}^{l' m'} \underbrace{\langle n'l' || \hat{A}^{(\pm)} || n l \rangle}_{\neq (E) \text{ (energia fr. -e)}}$$

$\delta_{m', M+m} \quad \leftarrow$

-45-

valószínű ha $M+m \neq m' \Rightarrow$ tiltott átmenet

a spektrumvonalak intenzitása $\langle \rangle$ ^{egységességével} ~~arányos~~ arányos



$\rightarrow$ a görbék arányosak egymással,
arányossági tényező ~~az~~ a
Clebsch - Gordon együtthatók

✓

így fedesték fel a kvarkokat is $\rightarrow$ $ch^0 \rightarrow$ csoport a
~~kvark~~ kísérletek ~~elő~~ mögött ($\neq SU(3)$)

(e^- lejt : forgáscsopots + permutáció

dominancia : isospin ($SU(2)$) + permutáció)

a fizika a $\langle || || \rangle$ rendszer van (ez adja meg az
energia szerinti eloszlást $\rightarrow$ hol (milyen E -nél) lehetnek
átmenetek), a Clebsch - G. - értékek esetlegesen (a rendszer
szám.-ját tükrözik).