

## 2. pótzárthelyi dolgozat

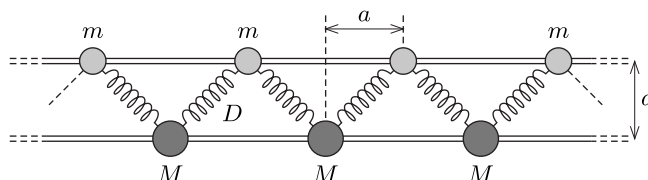
### Kondenzált anyagok fizikája gyakorlat

2016. december 22. (csütörtök)

#### Fontosabb tudnivalók

- Ne felejtse el minden lapra ráírni a nevét!
- A feladatok megoldási ideje 75 perc.
- A rajzos feladatoknál nyugodtan használhat ceruzát, egyébként használjon tollat!
- A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, mobilkészülék, laptop stb.) **nem** használható.

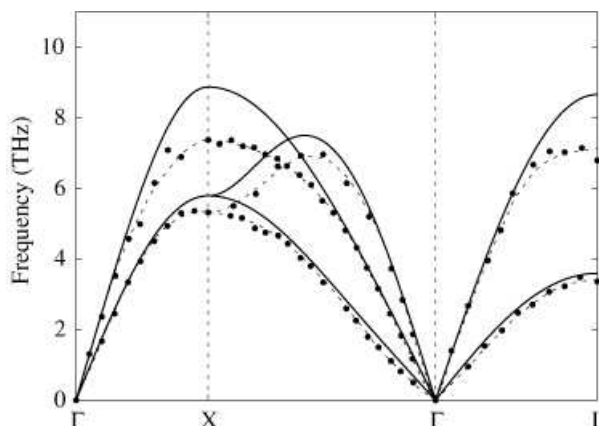
**1. (30 pont)** Vízszintes síkban  $a$  távolságra fekvő, két párhuzamos rúdra apró, felváltva  $m$  és  $M$  tömegű gyöngyöket fűztünk, melyek súrlódásmentesen mozoghatnak a rudak mentén. A gyöngyöket egyforma  $D$  rugóállandójú rugókkal kötöttük össze az *ábrán* látható módon. A rugók egyensúlyi állapotban feszítetlenek.



a) Használjuk ezt a rugós rendszert egy szilárdtest rácsrezgéseinek modellezésére! Periodikus határfeltételt használva ( $N + N = 2N$  darab gyöngy esetén) határozzuk meg a modell transzverzális rezgéseinek lehetséges  $\omega(q)$  sajátfrekvenciáit a hullámszám(vektor) függvényében!

b) Ábrázoljuk az eredményt grafikonon az első Brillouin-zónán belül (ügyelve a Brillouin-zóna méretére)! Hány diszperziós relációt kapunk? Melyik az optikai ág, és melyik az akusztikus ág? Egy kis rajzzal érzékeltesse, hogyan rezegnek a gyöngyöcskék az akusztikai és az optikai módusban!

**2. (10 pont)** Az *ábrán* egy kristályos anyag fononspektruma látható (azaz a lehetséges sajátfrekvenciák a sajátmódus hullámszámának függvényében) a Brillouin-zóna jellegzetes, magas szimmetriájú irányai mentén. (A kis pöttyök a mért értékeket, a folytonos vonalak pedig az elméleti jóslatot jelölik.) Hány dimenziós a kristály szerkezete, és hány atom van az elemi cellájában? Nevezzen meg egy anyagot, amely ilyen tulajdonságokkal rendelkezik!



**3. (15 pont)** Egy *háromdimenziós*, a rácsállandójú kristályban az egyik optikai fononág diszperziós relációja a Brillouin-zóna közepén jó közelítéssel az  $\omega(q) = \omega_0 + \alpha q^2$  összefüggéssel írható le, ahol  $\alpha$  és  $\omega_0$  konstansok. Határozzuk meg ezen optikai fononok  $g(\omega)$  állapotosűrűségét!

*Emlékeztető:* A  $g(\omega)$  állapotosűrűség megadja, hogy egységnyi térfogatú mintában az  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$  (kör)frekvenciaintervallumban  $g(\omega)\Delta\omega$  darab rezgési állapot lehetséges.

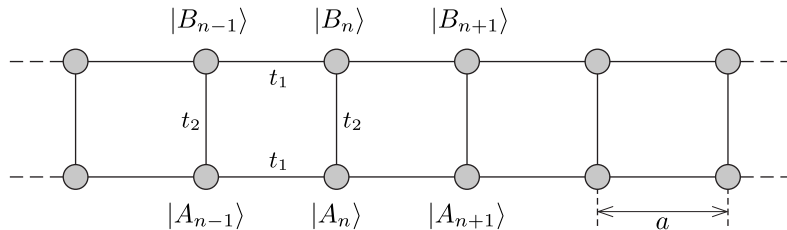
**4. (20 pont)** Egy szilárdtest egydimenziós modelljében a rácsperiodikus potenciált az  $x$  koordináta függvényében a következő függvény írja le ( $d$  és  $V_0$  állandók):

$$V(x) = V_0 \sin^3\left(\frac{\pi}{d}x\right).$$

a) Mekkora az  $a$  rácsállandó?

b) A közel szabad elektronok közelítését használva ábrázoljuk vázlatosan a diszperziós relációt a redukált zónák sémájában! Határozzuk meg, melyik  $k$ -pontokban oldódik fel a sávok degenerációja, és mekkora a kialakuló tiltott energiasávok (gapek) nagysága.

**5. (25 pont)** Egy hosszú,  $2N$  atomból álló láncmolekulát szoros kötésű közelítésben az *ábrán* látható módon modellezünk. Az on-site energia mindenhol  $\varepsilon_0$ . Az ábrán folytonos vonallal összekötött szomszédok közötti hopping mátrixelemek különböznek csak nullától, nagyságuk  $t_1$  és  $t_2$  (valós értékek) aszerint, hogy vízszintes vagy függőleges irányú szomszédokról van szó. A rácspontokra lokalizált állapotokat  $|A_n\rangle$  és  $|B_n\rangle$  módon jelöltük az ábra szerint.



Tételezzünk fel periodikus határfeltételt. Határozzuk meg az elektronok  $E(k)$  diszperziós relációját a  $k$  hullámszámvektor függvényében a szoros kötésű közelítésben! Ábrázoljuk vázlatosan a diszperziós reláció(ka)t, legyen mondjuk  $\varepsilon_0 = 0$  egység,  $t_1 = 1$  egység és  $t_2 = 2$  egység!

*Útmutatás.* Írjuk fel a Hamilton-operátor mátrixát, ügyelve a hermitikusságra! A sajátvektort keressük a következő alakban:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ Ae^{ikna} \\ Be^{ikna} \\ Ae^{ik(n+1)a} \\ Be^{ik(n+1)a} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

ahol  $A$  és  $B$  konstansok. A diszperziós relációnak két ága lesz, ami két sávnak felel meg.

*Jó munkát, kellemes ünnepeket! VM.*