

## 2. zárthelyi dolgozat

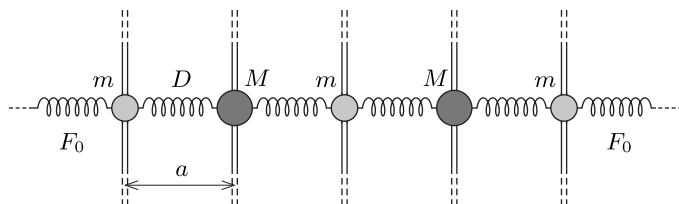
### Kondenzált anyagok fizikája gyakorlat

2016. december 19. (hétfő)

#### Fontosabb tudnivalók

- Ne felejtse el minden lapra ráírni a nevét!
- A feladatok megoldási ideje 75 perc.
- A rajzos feladatoknál nyugodtan használhat ceruzát, egyébként használjon tollat!
- A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, mobilkészülék, laptop stb.) **nem** használható.

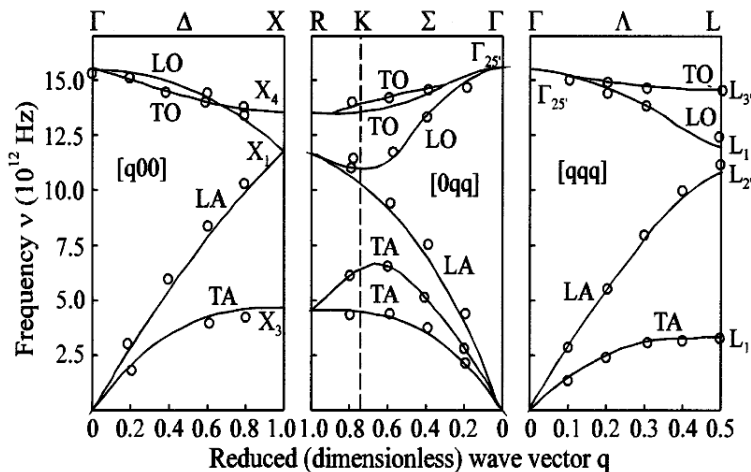
1. (30 pont) Vízszintes síkban egyenlő távolságra fekvő, párhuzamos rudakra apró, felváltva  $m$  és  $M$  tömegű gyöngyöket fűztünk, melyek súrlódásmentesen mozoghatnak a rudak mentén. A gyöngyöket egyforma  $D$  rugóállandójú rugókkal kötöttük össze az *ábrán* látható módon. A rugók egyensúlyi állapotban  $F_0$  erővel előfeszítettek, a szomszédos rudak távolsága  $a$ .



a) Használjuk ezt a rugós rendszert egy szilárdtest rácsrezgéseinek modellezésére! Periodikus határfeltételt használva ( $N + N = 2N$  darab gyöngy esetén) határozzuk meg a modell transzverzális rezgéseinek lehetséges  $\omega(q)$  sajátfrekvenciáit a hullámszám(vektor) függvényében!

b) Ábrázoljuk az eredményt grafikonon az első Brillouin-zónán belül (ügyelve a Brillouin-zóna méretére)! Hány diszperziós relációt kapunk? Melyik az optikai ág, és melyik az akusztikus ág? Egy kis rajzzal érzékeltesse, hogyan rezegnek a gyöngyöcskék az akusztikai és az optikai módusban!

2. (10 pont) Az *ábrán* egy kristályos anyag fononspektruma látható (azaz a lehetséges sajátfrekvenciák a sajátmódus hullámszámának függvényében) a Brillouin-zóna jellegzetes, magas szimmetriájú irányai mentén. (A kis körök a mért értékeket, a folytonos vonalak pedig az elméleti jóslatot jelölik.) Hány dimenziós a kristály szerkezete, és hány atom van az elemi cellájában? Nevezzen meg egy anyagot, amely ilyen tulajdonságokkal rendelkezik!



**3. (15 pont)** Egy *egydimenziós*,  $a$  rácsállandójú kristályban az egyik optikai fononág diszperziós relációja közelítőleg  $\omega(q) = \sqrt{\omega_0^2 + c^2 q^2}$ , ahol  $c$  és  $\omega_0$  konstansok. Rajzoljuk fel vázlatosan a diszperziós relációt! Írjuk fel ezen optikai fononok  $g(\omega)$  állapotossűrűségét!

*Emlékeztető:* A  $g(\omega)$  állapotossűrűség megadja, hogy egységnyi térfogatú mintában az  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$  (kör)frekvenciaintervallumban  $g(\omega)\Delta\omega$  darab rezgési állapot lehetséges.

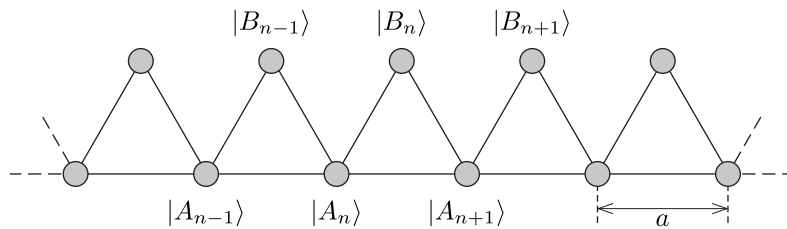
**4. (20 pont)** Egy szilárdtest egydimenziós modelljében a rácsperiodikus potenciált az  $x$  koordináta függvényében a következő függvény írja le ( $d$  és  $V_0$  állandók):

$$V(x) = V_0 \left[ \cos^2 \left( \frac{4\pi}{d} x \right) + 2 \sin \left( \frac{4\pi}{d} x \right) - \frac{1}{2} \right].$$

a) Mekkora az  $a$  rácsállandó?

b) A közel szabad elektronok közelítését használva ábrázoljuk vázlatosan a diszperziós relációt a redukált zónák sémájában! Határozzuk meg, melyik  $k$ -pontokban oldódik fel a sávok degenerációja, és mekkora a kialakuló tiltott energiasávok (gapek) nagysága.

**5. (25 pont)** Egy hosszú,  $2N$  atomból álló láncmolekulát szoros kötésű közelítésben az *ábrán* látható módon modellezünk. Az *egyforma* rácson az egymás mellé helyezett,  $a$  oldalú szabályos háromszögek csúcaiban helyezkednek el, az on-site energia mindenhol  $\varepsilon_0$ . Az ábrán folytonos vonallal összekötött szomszédok közötti hopping mátrixelemek nagysága  $t$  (valós), a többi hoppingot elhanyagoljuk. A rácspontokra lokalizált állapotokat  $|A_n\rangle$  és  $|B_n\rangle$  módon jelöltük az ábra szerint.



Tételezzünk fel periodikus határfeltételt. Határozzuk meg az elektronok  $E(k)$  diszperziós relációját a  $k$  hullámszámvektor függvényében a szoros kötésű közelítésben! Ábrázoljuk vázlatosan a diszperziós reláció(ka)t, legyen mondjuk  $\varepsilon_0 = 0$  egység,  $t = 1$  egység!

*Útmutatás.* Írjuk fel a Hamilton-operátor mátrixát, ügyelve a hermitikusságra! A sajátvektort keressük a következő alakban:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ Ae^{ikna} \\ Be^{ikna} \\ Ae^{ik(n+1)a} \\ Be^{ik(n+1)a} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

ahol  $A$  és  $B$  konstansok. A diszperziós relációnak két ága lesz, ami két sávnak felel meg.

*Jó munkát, kellemes ünnepeket! VM.*