## III.Fizika BSC *Kondenzált anyag fizika*

## *2010. ZH-k.*

## *Zárthelyi dolgozat I.*

***1.)*** A szilárd anyag állapotegyenlete (egy mólnyi mennyiségre, ***n=1***):

$p = -D\,(V-V_o) + AT$, ahol az ***A, D,*** pozitív anyagi állandók!

A szilárdtestet, mely kezdetben $p_1$, $T_1$ intenzív állapothatározókkal rendelkezik, **izoterm** módon összenyomjuk, $p_1$-ről $\rightarrow$ $p_2$-re növelve nyomását.

***a)*** Határozd meg a belsőenergia növekedését ebben az **izoterm** folyamatban **($\Delta E$ =?)**! ***15 pont***

***b)*** Mekkora az entrópia növekedés ugyanekkor? **($\Delta S$ =?)** ***15 pont***

*Útmutató:* $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, ahol $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ **=A/D.**

### *Megoldás:*

***a)*** A belsőenergia növekedés az **izoterm** folyamatban:

$$\Delta E = \int T\,dS - \int p\,dV\,;$$

$$\Delta E = \int dE = T_1 \int dS - \int p\,dV\,;$$

$$\int dS\Big|_{T=áll.} = \int\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = -\int\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp\;;\text{ és }\;\int p\,dV\Big|_{T=áll.} = \int p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$$

$$T_1\int dS = -T_1\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp = -T_1\left(A/D\right)p\Big|_{p_1}^{p_2} = -T_1\left(A/D\right)(p_2-p_1);$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1/D;\quad -\int p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = 1/D\int_{p_1}^{p_2} p\,dp = \frac{p_2^{\,2}-p_1^{\,2}}{2D};$$

$$\Delta E = -T_1\frac{A(p_2-p_1)}{D} + \frac{p_2^{\,2}-p_1^{\,2}}{2D} = \frac{(p_2-p_1)}{D}\left(\frac{p_2+p_1}{2} - AT_1\right);$$

***15 pont***

*Második megoldás:*

Korábbról tudható a második állapotegyenlet: $E = BT + D/2\,(V-V_o)^2$;

$$\Delta E = \frac{D\left((V_2-V_o)^2-(V_1-V_o)^2\right)}{2} = D\frac{\left(V_2^{\,2}-V_1^{\,2}+2V_o(V_2-V_1)\right)}{2} =$$

$$= D(V_2-V_1)\left(\frac{V_2+V_1}{2}-V_o\right) = (p_2-p_1)\left(V_o-\frac{V_2+V_1}{2}\right) = \ldots\text{mint fent!}$$

***b)*** $\Delta S = \int dS = -\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp = -\left(A/D\right)p\Big|_{p_1}^{p_2} = -\left(A/D\right)(p_2-p_1)$ ***15 pont***

**2.)** Egy ionkristály kohéziós potenciálja: $U(r)^{ion} = -\left(\frac{\alpha}{r}\right) + \left(\frac{\lambda}{r^n}\right)$, ahol adott $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{R_o}$ és $\boldsymbol{n}$.

***a)*** Mekkora az egyensúlyi **taszító** erő ***($F_t(R_o)$=? )?*** ***5 pont***

***b)*** Hányszorosára nő a **taszító** erő, ha $\boldsymbol{R^*/R_o = 0.95}$ atom-távolságúra „préselem" a kristályt (**$F_{-5\%}/F_t$ =?** )? ***10 pont***

***c)*** A polinomiális taszító tagot cseréljük le Born-Mayer féle /exponenciális/ taszító tagra, hogy sem az energiaminimum helye ($\boldsymbol{R_o}$ ), sem értéke ($\boldsymbol{U_{min}}$) ne változzék!

$$U(r)^{ion} = -\left(\frac{\alpha}{r}\right) + C\exp\left(-\frac{r}{\rho}\right)$$

Mekkora ezen új potenciára, az új helyen (R*) az „összepréselt" **taszító erő** és a **vonzó** erő arány ***($F_t(R^*)/ F_v(R^*)$=?)?*** ***20 pont***

## *Megoldás:*

***a)*** Az erő a potenciál negatív gradiense: ***F = -grad U;***

Az egyensúlyban a ***taszító erő = a vonzó erő***vel!

*(Utóbbit sokkal könnyebb meghatározni, mert λ nincs megadva!)*

$$F_{tasz.}(R_o) = F_{vonz.}(R_o) = -\left(\partial U_{vonz.}/\partial r\right)_{R_o} = \left|\left(\partial\left(\frac{\alpha}{r}\right)\Big/\partial r\right)_{R_o}\right| = \frac{\alpha}{R_o^{\,2}}$$ ***5 pont***

***b)*** Nem egyensúlyi helyen (R*) nincs a fenti kényelem, λ kiküszöbölendő!

$$F_{tasz.}(R^*) == -\left(\partial U_{tasz.}/\partial r\right)_{R^*} = \left|\left(\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{r^n}\right)}{\partial r}\right)_{R^*}\right| = \frac{n\lambda}{(R^*)^{n+1}} = \frac{n\lambda}{(R_o)^{n+1}}\frac{(R_o)^{n+1}}{(R^*)^{n+1}} =$$

$$= \frac{\alpha}{(R_o)^2}\frac{(R_o)^{n+1}}{(R^*)^{n+1}} = F_{tasz.}(R_o)\frac{(R_o)^{n+1}}{(R^*)^{n+1}}$$

$$\frac{F_{tasz.}(R^*)}{F_{tasz.}(R_o)} = \frac{(R_o)^{n+1}}{(R^*)^{n+1}} = \left(R^*/R_o\right)^{-(n+1)}$$ ***10 pont***

***c)***

$$F^{B.M.}(R^*) = -\left(\partial U^{B.M.}/\partial r\right)_{R^*} = \left|\left(\frac{\partial\left(C\exp(-r/\rho)\right)}{\partial r}\right)_{R^*}\right| = C/\rho\,\exp(-R^*/\rho) =$$

$$F_{t.}(R_o) = F_{v.}(R_o)\ \text{ alapján : } F^{B.M.}(R_o) = -C/\rho\,\exp(-R_o/\rho) = \frac{\alpha}{R_o^{\,2}}$$

$$U_{tasz.}(R_o) = \frac{1}{n}\left|U_{vonz.}(R_o)\right|\ \text{ alapján : } U^{B.M.}(R_o) = C\exp(-R_o/\rho) = \frac{\alpha}{nR_o}; \Rightarrow \rho = R_o/n$$

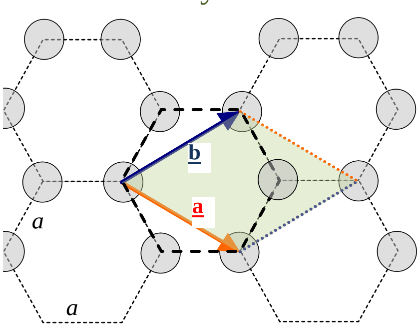
$$\frac{F_{t.}(R^*)}{F_{v.}(R^*)}=\left[\frac{F_t(R^*)}{F_t(R_o)}\right]\left\{\frac{F_v(R_o)}{F_{v.}(R^*)}\right\}=\left[\exp\left(-\left\langle {R^*}/{\rho}-{R_o}/{\rho}\right\rangle\right)\right]\left\{\frac{R^{*2}}{R_o^{\;2}}\right\}$$

$$\frac{F_{t.}(R^*)}{F_{v.}(R^*)}=\left[\exp\left(-n\left\langle {R^*}/{R_o}-{R_o}/{R_o}\right\rangle\right)\right]\left\{\left(\frac{R^*}{R_o}\right)^2\right\}=\left[\exp\left(n\left\langle 1-\left({R^*}/{R_o}\right)\right\rangle\right)\right]\left\{\left(\frac{R^*}{R_o}\right)^2\right\}$$

<u>***20 pont***</u>

***3.)*** A kétdimenziós *a* oldalú méhsejt (hatszög) rács (**h**oney**c**omb) és az elemi cellája az az alábbi ábrán látható.

honeycomb




***a)*** Mekkora a méhsejt rácsban a kitöltés?
(A kitöltés 2 dim.-ban: $K = T_{kör}/T_{cella}$) ***10 pont***

***b)*** Hányadrésze ez a kitöltés a szoros pakolású háromszög rács kitöltésének ($K^{hc.}/K^{tr.}=?$) ***5 pont***

***c)*** Rajzold meg az ***a***, ***b*** rácsvektorok alkotta pontrácsot és a hozzá tartozó Wigner-Seitz cellát! ***10 pont***

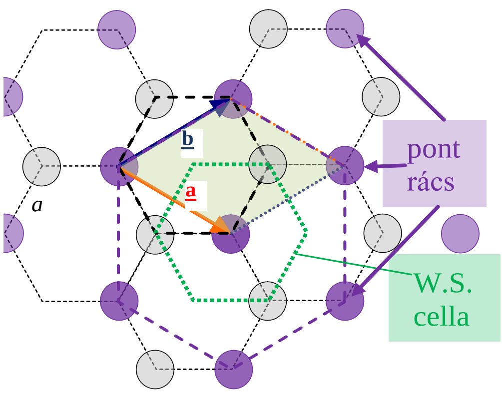
***d)*** Határozd meg, hogy e Wigner-Seitz cella **t**erületét és **k**erületét! ($T^{W.S}=?$ , $K^{W.S.}=?$) ***15 pont***

***e)*** Határozd meg, hogy a méhsejt rács üregeibe hányszor nagyobb atom fér be, mint a szoros pakolású rácsba! ($r^{hc.}/r^{tr.}=?$) ***10 pont***

***Megoldás:***

***a)***

honeycomb




***10 pont***

$$N^{h.c.}=6*{1}/{3}=2;T^{h.c.}=6*a^2\left({\sqrt{3}}/{4}\right);a=2R$$

***a)***

$$K^{h.c.}=\frac{N^{h.c.}*\left(R^2*\pi\right)}{T^{h.c.}}=\frac{2R^2\pi}{3\,{\sqrt{3}}/{2}\,(2R)^2}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

***5 pont***

$$N^{t.r.}=6*{1}/{3}+1=3;T^{t.r}=6*a^2\left({\sqrt{3}}/{4}\right);a=2R$$

***b)***

$$K^{t.r.}=\frac{N^{t.r.}*\left(R^2*\pi\right)}{T^{t.r.}}=\frac{3R^2\pi}{3\,{\sqrt{3}}/{2}\,(2R)^2}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

***10 pont***

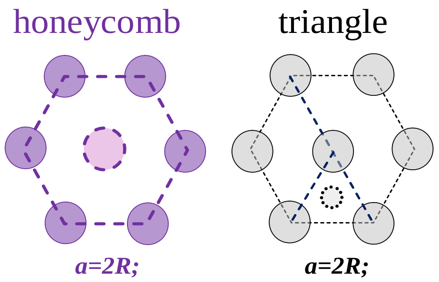
$$\frac{K^{h.c.}}{K^{t.r.}}=\frac{N^{h.c.}}{N^{t.r.}}=\frac{2}{3}$$

*c)* A pontrácsot a fenti rajz lila atomjai (minden második atom) alkotják.
Ez ***√3a*** oldalú háromszögrács (***tr***iangle), melynek a ***Wigner-Seitz*** cellája a ***zöld hatszög*.**

*d)* A hatszög éle ***a*,** ebből következően kerülete : $K^{W.S.}= 6a$ ; területe: $T^{W.S.}= 3\sqrt{3}\, a^2 /2.$

***15 pont***

*e)*




$r_{ü}=R$ $\qquad$ $r_{ü}=(2/\sqrt{3}-1)R$

-A méhsejt rács üregébe egy eredeti atomokkal egyező méretű atom fér be.

$r^{hc.}= R.$

-A háromszögrácsban a súlyvonal kétharmada a kis és a nagy sugár összege:

$r^{ü} +R= 2R/\sqrt{3}$ ; $r^{tr.}= (2/\sqrt{3} -1)R$ , tehát

$$\frac{r^{h.c.}}{r^{t.r.}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}-1} = (2\sqrt{3}+3)$$

***10 pont***

***Budapest**, 2010. Október 25.*

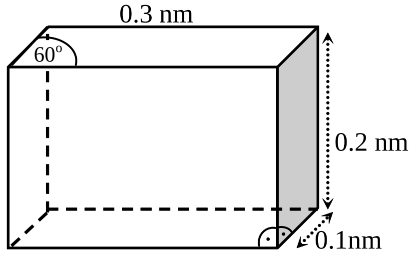
***dr. Kojnok József***

**III.Fizika BSC *Kondenzált anyag fizika***

# *Zárthelyi dolgozat II.A*

***1.)*** Egy pontrács primitív cellája az alábbi ábrán látható:

$\underline{\mathbf{a}}_x = 3a\ (\mathbf{1, 0, 0})$; $\underline{\mathbf{a}}_y = \tfrac{1}{2}a\ (\mathbf{1, \sqrt{3}, 0})$; $\underline{\mathbf{a}}_z = 2a\ (\mathbf{0, 0, 1})$ ; ($a = \mathbf{0.1\ nm}$)




***a)*** Rajzolja le a Wigner-Seitz cella xy-síkra vett vetületét és adja meg a térfogatát! ($\mathbf{V_{W.S.}=?}$) ***20 pont***

***b)*** Határozza meg a reciprok rácsvektorokat és a Brillouin zóna térfogatát! ($\underline{\mathbf{b}}_i$=?;$\mathbf{V_{B.z.}=?}$) ***15 pont***

***2.)*** Egy 2***N*** tagú ionláncban ***N*** db ***m*** tömegű pozitív és ***N*** db ***M*** tömegű negatív ion váltakozik egymástól ***a*** távolságra.

Az ionos kötés párpotenciálja: $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\lambda}{r^n}$ ahol adott az $\alpha$, a $\boldsymbol{\lambda}$ és az $\boldsymbol{n}$.

Segítségül a diszperziós reláció:

$$\omega_{\pm}(q) = \sqrt{D}\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2 qa}{mM}}}$$

, ahol a ***D*** rúgóállandó és az ***a*** atomtávolság a fenti paraméterekből származtatandó!

***a)*** Mekkora a $\mathbf{v}_h$ hangsebesség a Brillouin zóna centrumában: /q≈0 -nál)./! ***10 pont***

***b)*** Mekkora lesz a csoportsebesség a Brillouin zóna felénél (q=***K***/4-nél; $\mathbf{v}_{K/4}$**=?**) az **akusztikus** ágban? ***15 pont***

***c)*** Mekkora itt a körfrekvencia ($\omega_{K/4}$**=?**)? ***5 pont***

***d)*** Add meg ezen frekvenciához tartozó $\mathbf{D}(\omega_{K/4})$ állapotsűrűséget! ***15 pont***

***3.)*** Egy fermion-szerű részecske ***diszperziós relációja*** a definició szerint:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{k}) = \alpha\, \boldsymbol{k}^{5/4}$$

***a)*** Ábrázolja e ***kétdimenziós*** részecske állapotsűrűségét és adja meg az energia-függését? ($\mathbf{D}(E) \sim E^{\phi}$; $\phi$=?) ***25 pont***

***b)*** E részecske Fermi energiájának hányad része az **átlagenergia**? ($\mathbf{E}_{átl.} = \gamma\, \mathbf{E}_F$ ; $\gamma$***=?***) (def.: $\mathbf{E}_{átl.} = E_{össz.}/N$) ***10 pont***

Maximális pontszám: ***115 pont***

Megjegyzés: Részpontok is szerezhetők (a *jó* megoldáshoz vezető) részeredményekért.

-Ponthatárok: **2**: 45 pont-; **3**: 60 pont-; **4**: 75 pont-; **5**: 90 pont

***Budapest, 2010. December 9. $9^{50}$ -$10^{50}$.***

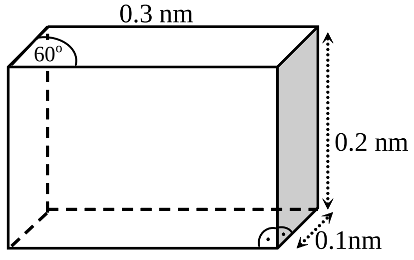
***dr. Kojnok József***

**III.Fizika BSC *Kondenzált anyag fizika***

## *Zárthelyi dolgozat II.B*

***1.)*** Egy pontrács primitív cellája az alábbi ábrán látható:

**$\underline{a}_x$ = 3**a **( 1, 0, 0); $\underline{a}_y$ = ½**a **( 1,√3, 0); $\underline{a}_z$ = 2**a **( 0, 0, 1) ; (**a **=0.1 nm)**




***b)*** Rajzolja le a Wigner-Seitz cella xy-síkra vett vetületét és adja meg a térfogatát! **($V_{W.S.}$=?)** ***20 pont***

***b)*** Határozza meg a reciprok rácsvektorokat és a Brillouin zóna térfogatát! ($\underline{b}_i$=?;$V_{B.z.}$=?) ***15 pont***

***2.)*** Egy 2***N*** tagú ionláncban ***N*** db ***m*** tömegű pozitív és ***N***db ***M*** tömegű negatív ion váltakozik egymástól ***a*** távolságra.

Az ionos kötés párpotenciálja: $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\lambda}{r^n}$ ahol adott az $\alpha$, a $\boldsymbol{\lambda}$ és az ***n***.

Segítségül a diszperziós reláció:

$$\omega_{\pm}(q) = \sqrt{D}\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2 qa}{mM}}}$$

, ahol a ***D*** rúgóállandó és az ***a*** atomtávolság a fenti paraméterekből származtatandó!

***a)*** Mekkora a $\mathbf{v}_h$ hangsebesség a Brillouin zóna centrumában: /q≈0 -nál)./! ***10 pont***

***b)*** Mekkora lesz a csoportsebesség a Brillouin zóna felénél (q=***K***/4-nél; $\mathbf{v}_{K/4}$=?) az **optikai** ágban? ***15 pont***

***c)*** Mekkora itt a körfrekvencia ($\omega_{K/4}$=?)? ***5 pont***

***d)*** Add meg ezen frekvenciához tartozó $\mathbf{D}(\omega_{K/4})$ állapotsűrűséget! ***15 pont***

***3.)*** Egy fermion-szerű részecske ***diszperziós relációja*** a definició szerint:

$$\mathbf{E}(k) = \alpha\, k^{5/4}$$

***a)*** Ábrázolja e ***kétdimenziós*** részecske állapotsűrűségét és adja meg az energia-függését? (**D**(E) ~ $E^{\phi}$; $\phi$=?) ***25 pont***

***b)*** E részecske Fermi energiájának hányad része az **átlagenergia**? ($\mathbf{E}_{átl.}$= $\gamma$ $\mathbf{E}_F$ ; $\gamma$=?) (def.: $\mathbf{E}_{átl.}$ = $E_{össz.}$/N) ***10 pont***

Maximális pontszám: ***115 pont***

Megjegyzés: Részpontok is szerezhetők (a *jó* megoldáshoz vezető) részeredményekért.

-Ponthatárok: **2**: 45 pont-; **3**: 60 pont-; **4**: 75 pont-; **5**: 90 pont

***Budapest, 2010. December 9. $9^{50}$ -$10^{50}$.***

***dr. Kojnok József***

## III.Fizika BSC *Kondenzált anyag fizika*
## *Javító zárthelyi dolgozat III.*

***1.)*** **$M_j$** (=**8** gramm) tömegű, **0 $^oC$-os jeget** megolvasztunk, majd a **vizet 100 $^oC$**-ra melegítjük**,** s aztán **gőzzé forraljuk** el. Mennyivel nőtt eközben az **entrópia** ( $S^{100C}_{gőőz} - S^{0C}_{jég} = \boldsymbol{?}$ )?
**(**A jég olvadáshője**:** $\boldsymbol{L_{olv.}}$(= 334 kJ/kg), a víz fajhője: ***c*** (= 4.2 kJ/kgK), a víz forráshője**:** $\boldsymbol{L_{forr}}$.(= 2256 kJ/kg) ). ***15 pont***

***2.)*** Egy molekula kristály potenciálja*:* $V^{L.J.}(r) = -V_o \left\{ 2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} \right\}$

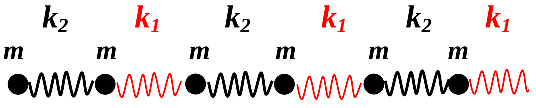
, ahol $\boldsymbol{V_o}$ =1.0 eV és $r_o$=($\boldsymbol{\sigma}$=) 0.4 nm.

**a)** Mekkora ilyenkor a taszító **erő** /Newtonban/ (**$F_t$=?** )? *5 pont*
**b)** Hányadrészére csökken ez a taszító **erő**, ha **$r^*$**= 0.42 nm atom-távolságúra „tágítom" a kristályt (**$F_{+5\%}^{L.J.}$=?** )? (1 eV = 1.6 $10^{-19}$ J) ***10 pont***
**c)** A polinomiális taszító tagot cseréljük le úgy Born-Mayer féle /exponenciális/ taszító tagra, hogy sem az energiaminimum helye ($r_o$ ), sem értéke ($V_{min}$) ne változzék!
Mekkora ilyenkor az exponenciális tag (ρ) hosszparamétere *($\rho/\sigma$=?)?* ***15 pont***

$$V(r)^{ion} = -V_o \left\{ 2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right\} + C\exp\left(-\frac{r}{\rho}\right)$$

***3.)*** **a)** A gyémánt (D) sűrűsége: ***3.52*** g/cm$^3$, kristályszerkezete: gyémánt amely, két egymásba tolt ***FCC*** rács, ahol az atomi poziciók a cellában: (0,0,0), (0,½,½), (½,0,½), (½,½,0), továbbá: (¼,¼,¼), (¼,¾,¾), (¾,¼,¾), (¾,¾,¼). A szén atomsúlya ***12***. Mekkora a köbös (FCC) elemi cella élhossza (***a=?***) ? /Emlékeztetőül az Avogadro szám: 6 $\times 10^{23}$ /mol./ ***10*** *pont*
**b)** Mekkora a **t**ér**c**entrumba elhelyezhető legnagyobb idegen atom sugara (**$r_{max}$/a=?)?** ***10*** *pont*
**c)** Ilyen maximális sugarú atomot elhelyezve mennyit javítható a kitöltés (***$K^{D+t.c.ü.}$/ $K^{D.}$ =?)***?
***(Def.: K= $V_{gömbök}$/$V_{cella}$)*** ***10 pont***

***4.)*** Az egyforma ***m*** tömegek alkotta atomláncot ***N*** db ***$k_1$*** és ***N*** db ***$k_2$*** rugó köti össze váltakozva.




A tömegek egymástól mért távolsága: ***a.***

Ekkor a diszperziós reláció:

$$\omega^2 = (2k^+/m) \pm \sqrt{(2k^+/m)^2 \cos^2(qa) + (2\Delta k/m)^2 \sin^2(qa)}$$

, ahol $k^+ = (k_1 + k_2)/2$ *és* $\Delta k = (k_1 - k_2)/2$ **!**

***e)*** Mekkora a **$v_h$** hangsebesség a Brillouin zóna centrumában: /q≈0 -nál)./! ***20*** *pont*
***f)*** Mekkora lesz a csoportsebesség a Brillouin zóna harmadánál (q=***K***/6-nél; **$v_{K/6}$=?**) az **akusztikus** ágban? ***15*** *pont*
***g)*** Mekkora itt a körfrekvencia (**$\omega_{K/6}$=?**)? ***5 pont***

Maximális pontszám: ***115 pont***

Megjegyzés: Részpontok is szerezhetők (a *jó* megoldáshoz vezető) részeredményekért.
-Ponthatárok: **2**: 45 pont-; **3**: 60 pont-; **4**: 75 pont-; **5**: 90 pont
***Budapest, 2010. December 21. $10^{45}$ -$11^{45}$.***

***dr. Kojnok József***