Kalkulus gyakorlat - Megoldásvázlatok
Fizika BSc I/2

1. gyakorlat

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és F primitív függvénye f-nek, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények primitív függvényeit!

   (a)

$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \ln|x+3| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}x = \int (x-3)^{-4}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-3)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-3)^3} + C$$

$$\int \frac{3x+6}{5x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int \frac{5x+10}{5x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int \frac{5x-1+11}{5x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int 1 + \frac{11}{5x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int 1 + \frac{11}{5}\frac{5}{5x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{5}x + \frac{33}{25}\ln|5x-1| + C$$

   (b)

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+27}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+27) + C$$

$$\int \frac{6x^2-2}{x^3-x+18}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+18}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left|x^3-x+18\right| + C$$

   (c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)+4}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+25}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x-3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + \frac{1}{8}\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)}{1/4} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+25) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right) + C$$

   (d)

$$\int \frac{1}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{2(x-1)(x-1/2)} = \frac{1}{2}\int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(A+B)x-B-A/2}{(x-1)(x-1/2)}\,\mathrm{d}x,$$

   amiből következik, hogy $A+B=0$ és $-B-A/2=1$, azaz $A=2$, $B=-2$, így ezeket az értékeket visszaírva

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-1/2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| - \ln|x-1/2| + C$$

$$\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x^2+13x-9}{x(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{x^2(A+B+C)+x(2A+3B-C)-3A}{x(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x,$$

   amiből $A+B+C=4$, $2A+3B-C=13$ és $-3A=-9$. Ezt megoldva kapjuk, hogy $A=3$, $B=2$ és $C=-1$,

$$= \int \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x| + 2\ln|x-1| - \ln|x+3| + C$$

2. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

(a)

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0$$

(b)

parciális integrálással egy primitív függvény $xe^x - e^x$, ezért

$$\int_0^2 xe^x \, \mathrm{d}x = [xe^x - e^x]_0^2 = (2e^2 - e^2) - (0e^0 - e^0) = e^2 + 1$$

mivel $\int \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x$, parciális integrálással egy primitív függvény az $x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, így

$$\int_0^3 \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x = \left[x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^3 = \left(3 \operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}\ln(1+3^2)\right) - 0 = 3 \operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}\ln 10$$

(c) Mindkét esetben helyettesítéses integrálással lehet egy-egy primitív függvényt megkeresni.

A $t = \arcsin x$ helyettesítés után $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$, így

$$\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, \mathrm{d}t = \int \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C,$$

ezért

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

A második esetben a $t = e^x$ helyettesítés után $x = \ln t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C,$$

vagyis

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = [e^x - \ln(e^x+1)]_0^1 = (e - \ln(e+1)) - (1 - \ln 2)$$

3. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!

   (a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \le y \le x+2\right\}$

   (b) az $y = \sin x$ és az $y = (2/\pi)x$ görbék által határolt síkidom.

Megoldás. (*a*) A kérdéses síkidom nem más, mint az $y = x+2$ egyenes és az $y = x^2$ parabola által bezárt síkrész. Az egyenes és a parabola metszéspontjainak abszcisszái -1 és 2. A keresett területet nem más, mint a $[-1,2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x+2$ grafikonja alatti terület és a $g(x) = x^2$ grafikonja alatti terület különbsége. A Newton-Leibniz formulából az első terület $\int_{-1}^2 x+2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^2 = (2+4) - (\frac{1}{2} - 2) = \frac{15}{2}$, míg a második $\int_{-1}^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - (\frac{-1}{3}) = 3$. Tehát a kérdéses terület $\frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$.

(*b*) A keresett terület most is megkapható két integrál különbségeként: $T = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} (2/\pi)x \, \mathrm{d}x = 1 - \pi/4$.

2. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi impropius integrálokat!

$$a)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{+\infty} 2e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. (a)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\big[\ln x\big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \ln t - \ln 1 = +\infty,$$

mert $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$.

(b)

$$\int_0^{+\infty} 2e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t 2e^{-x}\,\mathrm{d}x = -2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t -e^{-x}\,\mathrm{d}x = -2\lim_{t\to+\infty}\big[e^{-x}\big]_0^t = -2\lim_{t\to+\infty}(e^{-t}-1) = 2,$$

hiszen $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$.

(c)

$$\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_{-2}^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\big[\operatorname{arc\,tg} x\big]_{-2}^t = \lim_{t\to+\infty}(\operatorname{arc\,tg} t - \operatorname{arc\,tg}(-2)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(-2).$$

(d) Mivel $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ egy primitív függvénye $\dfrac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)$, ezért

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)\right]_2^t =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) - (\ln|2-1| - \ln|2+1|) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + \frac{\ln 3}{2}.$$

Mivel t-vel $+\infty$-hez tartunk, azért az abszolútérték elhagyható, és így

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} + \frac{\ln 3}{2} = 0 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2},$$

ugyanis $\ln\frac{t-1}{t+1} = \ln\frac{t+1-2}{t+1} = \ln(1-\frac{2}{t+1})$, és ez a függvény $t\to+\infty$ esetén $\ln 1 = 0$-hoz tart.

(e) A $[0,+\infty)$ intervallumon xe^{-x} egy primitív függvénye

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x},$$

így

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\big[-xe^{-x} - e^{-x}\big]_0^t = \lim_{t\to+\infty}[(-te^{-t} - e^{-t}) - (0e^0 - e^0)] = 1.$$

(f) A $[2,+\infty)$ intervallumon $\dfrac{1}{x\ln x}$ egy primitív függvénye

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln x),$$

így

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\big[\ln(\ln x)\big]_2^t = \lim_{t\to+\infty}(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$$

2. Számítsuk ki az alábbi impropius integrálokat!

$$a)\ \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. (a) A $(0,1]$ intervallumon $\ln x$ egy primitív függvénye $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$, ezért

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+0}\int_t^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to0+0}\big[x\ln x - x\big]_t^1 = \lim_{t\to0+0}[(1\ln 1 - 1) - (t\ln t - t)] = -1.$$

(b) A $[-2,1)$ intervallumon $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ egy primitív függvénye

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int (1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -2(1-x)^{1/2},$$

ezért

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1-0}\left[-2(1-x)^{1/2}\right]_{-2}^{t} = \lim_{t\to 1-0}(-2(1-t)^{1/2}) - (-2(1-(-2))^{1/2}) = 2\sqrt{3}.$$

3. Milyen valós α-ra lesznek konvergensek az alábbi impropius integrálok? Mivel egyenlőek?

$$a)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. (a) A $\alpha \neq 1$ esetén $\dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ egy primitív függvénye $\dfrac{1}{x^\alpha}$-nak a $(0,+\infty)$ intervallumon, ezért

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha<1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{ha } \alpha>1. \end{cases}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor egy primitív függvény $\ln x$, így

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}[\ln x]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty.$$

Az integrálok tehát $\alpha > 1$ esetén lesznek konvergensek.

(b) Az (a) esethez hasonlóan $\alpha \neq 1$-re:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0+0}\left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0+0}\left[\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha>1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{ha } \alpha<1. \end{cases}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0+0}[\ln x]_t^1 = \lim_{t\to 0+0}(-\ln t) = +\infty.$$

Az integrálok tehát $\alpha < 1$ esetén lesznek konvergensek.

3. gyakorlat

Egy 0 középpontú $\sum a_n \,\mathrm{id}^n$ hatványsor konvergenciahalmaza egy olyan 0 középpontú intervallum, amelynek R sugarát az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ ha a nevező véges és nem nulla,}$$

illetve definíció szerint legyen $R := 0$, ha a nevező végtelen és $R := +\infty$, ha a nevező nulla. Itt csak olyan példák fognak szerepelni, amelyekben az $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozatnak határértéke is létezik, ezért a fenti definícióban a $\limsup$ helyett egyszerűen limeszre lehet gondolni. A konvergencia-intervallum végpontjairól azonban a tétel semmit sem mond, így ott egy hatványsor lehet konvergens, illetve divergens is.

1. Számítsuk ki a $\sum a_n \,\mathrm{id}^n$ hatványsor konvergenciasugarát, ahol $a_n :=$

$$a)\ n \qquad b)\ \frac{1}{n} \qquad c)\ \frac{2^n}{n^2} \qquad d)\ \frac{2^n}{n!} \qquad e)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Megoldás. (a) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|n|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

(b) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1.$

(c) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^2}\right|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n^2}}} = \dfrac{1}{2}.$

(d) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n!}\right|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{2} = +\infty.$

(e) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(1+\frac{1}{n})^n\right|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})} = 1.$

2. Számítsuk ki az alábbi hatványsorok konvergenciahalmazát!

$$a)\ \sum \frac{1}{n!}\,\mathrm{id}^n \qquad b)\ \sum n!\,\mathrm{id}^n \qquad c)\ \sum \mathrm{id}^n \qquad d)\ \sum \frac{1}{n^2}\,\mathrm{id}^n \qquad e)\ \sum \frac{1}{n}\,\mathrm{id}^n$$

Megoldás. Először kiszámoljuk a konvergenciasugarat, majd a kapott intervallum végpontjaiban is megvizsgáljuk a konvergenciát.

(a) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ a konvergenciasugár, tehát a konvergenciahalmaz $\mathbb{R}$.

(b) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n!|}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}} = 0$ a konvergenciasugár, így a konvergenciahalmaz $\{0\}$.

(c) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|1|}} = 1$. Az $x = 1$ pontban $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = +\infty$, míg $x = -1$ esetén $\sum(-1)^n$ divergens sor, így a konvergenciahalmaz $(-1,1)$.

(d) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}} = 1$. Az $x = 1$ pontban $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, az $x = -1$ pontban $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ a sor, ezek konvergensek (a második azért, mert abszolút konvergens). Ezért a konvergenciahalmaz $[-1,1]$.

(e) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$. Az $x = 1$ pontban $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ a sor, amely divergens, az $x = -1$ pontban $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, amely egy Leibniz típusú sor, így konvergens. Ezért a konvergenciahalmaz $[-1,1)$.

3. Állítsuk elő deriválással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol

(a) $H = (-1,1), \quad f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

(b) $H = (-1,1), \quad f(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Megoldás. (a) Ismeretes, hogy $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Hatványsort a konvergenciaintervallum belsejében lehet tagonként deriválni, így

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

(b) Mivel minden $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

ezért x helyébe $-x$-et írva

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

teljesül minden $x \in (-1,1)$ esetén. Továbbá, ha x helyébe x^2-et helyettesítünk, akkor

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

A kérdéses függvény az $\dfrac{1}{1+x^2}$ függvény deriváltja, így

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(x^{2n}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n (2n) x^{2n-1}.$$

4. Állítsuk elő integrálással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol
   (a) $H = (-1,1)$, $\quad f(x) = \ln(1+x)$,
   (b) $H = (-1,1)$, $\quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

   Megoldás. (a) Az előző feladatban láttuk, hogy $t \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n.$$

A konvergencia-intervallum belsejében hatványsort tagonként integrálhatunk. Így $t \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}
&\ln(1+x) = \\
&= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^n\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.
\end{aligned}$$

(b) Ugyancsak láttuk, hogy $t \in (-1,1)$ esetén $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$. Az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény az $\dfrac{1}{1+x^2}$ függvény integrálja, így

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

4. gyakorlat

Előadáson szerepel néhány nevezetes Taylor-sor, ezek a következők:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \\
\operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots \\
\operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots
\end{aligned}$$

ahol a fenti Taylor-sorok egész $\mathbb{R}$-en konvergensek (és ott elő is állítják a függvényeket), míg az alábbi sor-előállítás csak a $(-1,1]$ intervallumon érvényes:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Ezeken kívül még érdemes felírni a mértani sor összegét is:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{ahol } x \in (-1,1).$$

1. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát! Mi a konvergenciahalmaz?

$$a) \quad \sin x^2 \qquad b) \quad \frac{1}{1+x^2} \qquad c) \quad e^{-x} \qquad d) \quad xe^{-x} \qquad e) \quad \frac{x^2}{1+x^2}$$

Megoldás. Felhasználjuk a már ismert Taylor sorokat, majd az egyértelműséget használjuk, azaz: ha egy $(-R, R)$ intervallumban $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, akkor a jobb oldalon álló hatványsor az f függvény 0 közepű Taylor sora.

(a) A sin függvény 0 középpontú hatványsorában x helyébe x^2-et írva

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

adódik. A hatványsor konvergenciasugara ∞, mert

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[4n+2]{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt[2n+1]{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|}} = 0.$$

(b) A $(-1, 1)$ intervallumon

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

x helyébe $-x^2$-et írva

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

A konvergenciahalmaz pedig marad $(-1, 1)$.

(c) $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

ezért

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

A konvergenciahalmaz $\mathbb{R}$.

(d)

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n,$$

így

$$xe^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}.$$

Ez lesz a Taylor sor, ami az egész $\mathbb{R}$-en konvergens, mert

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n+1]{\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right|} = 0.$$

(e) A $(-1, 1)$ intervallumon

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},$$

ezért

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2}.$$

A konvergenciahalmaz marad $(-1, 1)$.

2. Írjuk fel az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát! Mi a konvergenciahalmaz?

$$a)\quad \frac{1}{1-4x^2} \qquad b)\quad \operatorname{arc\,tg} x$$

Megoldás. (a) A mértani sor $(-1,1)$-en érvényes előállításból kiindulva

$$\frac{1}{1-4x^2} = \frac{1}{1-(2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((2x)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n},$$

ahol $\left|(2x)^2\right| < 1$, azaz $|x| < 1/2$ esetén érvényes a formula.

(b) Korábban előállítottuk ezt a függvényt hatványsor alakjában a $(-1,1)$ intervallumon, így ezen a halmazon a Taylor sor egyértelműsége miatt a függvény Taylor sora is ez lesz. A konvergenciahalmaz most azonban bővebb:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

ahol ez a hatványsor az $x = 1$ és $x = -1$ pontokban is konvergens, mert mindkettő Leibniz típusú: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ és $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

Ha nem jut eszünkbe a módszer, amivel kiszámoltuk ezeket a Taylor-sorokat, kiindulhatunk a definícióból is, azaz számoljuk ki a megadott függvények deriváltjait és írjuk fel a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

sort.

3. Mi az alábbi numerikus sorok összege? Használjuk fel az előző feladatok eredményeit.

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Megoldás. (a) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, ezért $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.

(b) Az előző feladatból $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, ha $x \in (-1,1)$. Mivel a hatványsor konvergens az $x = 1$ pontban, és $\operatorname{arc\,tg} x$ folytonos függvény az $x = 1$ pontban, Abel tétele miatt $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

4. Írjuk fel 0 közepű hatványsor alakban e^{-x^2} egy primitív függvényét!

Megoldás. Korábban láttuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, ezért az egyenlőség fennáll, ha x helyébe $-x^2$-et írunk: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$. Egy primitív függvény meghatározásához nem kell mást tenni, mint tagonként integrálni a hatványsort.

$$\int e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

5. gyakorlat

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok, ekkor az

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvénysort trigonometrikus sornak nevezzük.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-szerint periodikus függvény, amely Riemann-integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon (az intervallum választásában csak az lényeges, hogy a hosszúsága 2π legyen, tekinthetnénk a $[0,2\pi]$ intervallumot is, ekkor az alábbi definíciók értelemszerűen módosulnának). Ekkor az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, \mathrm{d}t \qquad (n = 0,1,2\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, \mathrm{d}t \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

számokat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük. A (pontonkénti) konvergencia Fourier-sorok esetében nem olyan egyszerű kérdés, például f folytonosságából még nem következik, hogy a Fourier-sor minden pontban f-hez tart, de ha például f differenciálható, akkor már igen.

Ha egy f függvény páros, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $f(t)\sin nt$ függvény páratlan, így a $[-\pi, \pi]$ intervallumon 0 az integrálja, ezért a Fourier-sorában a b_n számok mindegyike 0. Ha egy f függvény páratlan, akkor minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f(t)\cos nt$ páratlan függvény, ezért a Fourier-sorában az a_n számok mindegyike 0.

1. Adjuk meg az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát!

(a) $f(x) = x$, ha $x \in [0, 2\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$
Megoldás. A függvény Fourier-sora az egész $\mathbb{R}$-en konvergens, és minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ esetén előállítja a függvényt. A Fourier-együtthatók:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin nt}{n}\ \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos nt}{n}\ \mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{n} = -\frac{2}{n}.
\end{aligned}
$$

Így a Fourier-sor:

$$\pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, ha $x \in (0, 2\pi)$, $f(0) := 0$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$
Megoldás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén előállítja a függvényt a Fourier-sor, és tiszta sinus-sor, mert a függvény páratlan (azaz $a_n = 0$). A (b_n) együtthatók:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - t}{2}\sin nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi - t}{2}\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\cos nt}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

A Fourier-sor:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

(c) $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x + 2k\pi) := f(x)$
Megoldás. f páros függvény, így minden $n \in \mathbb{N}$-re $b_n = 0$. A többi Fourier-együttható:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\ \mathrm{d}t\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 - \left[-\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}
\end{aligned}
$$

A Fourier-sor tehát

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

(d) $f(x) = (\pi - |x|)^2$, ha $x \in [-\pi, \pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x + 2k\pi) := f(x)$
Megoldás. A Fourier-sor tiszta cosinus-sor (azaz $b_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén) lesz, ugyanis f páros függvény. Az a_n együtthatók:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)^2\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)^2\cos nt\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi - t)^2\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2(\pi - t)\frac{\sin nt}{n}\ \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[-2(\pi - t)\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\frac{\cos nt}{n^2}\ \mathrm{d}t\right) = \frac{2}{\pi}\frac{2\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}
\end{aligned}
$$

Így a Fourier-sor:

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx.$$

6. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$a)\quad f(x,y)=x^2\qquad b)\quad f(x,y)=y^3\qquad c)\quad f(x,y)=x^2+y^3$$

$$d)\quad f(x,y)=x^2y^4\qquad e)\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\qquad f)\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{e^y}$$

Megoldás. (a) $\partial_1 f(x,y)=2x$, $\partial_2 f(x,y)=0$.
(b) $\partial_1 f(x,y)=0$, $\partial_2 f(x,y)=3y^2$.
(c) $\partial_1 f(x,y)=2x$, $\partial_2 f(x,y)=3y^2$.
(d) $\partial_1 f(x,y)=2xy^4$, $\partial_1 f(x,y)=4x^2y^3$.
(e) $f(x,y)=e^{-x^2}e^{-y^2}$, így $\partial_1 f(x,y)=e^{-y^2}e^{-x^2}(-2x)$, $\partial_2 f(x,y)=e^{-x^2}e^{-y^2}(-2y)$.
(f) $\partial_1 f(x,y)=2\dfrac{xy^2}{e^y}$, $\partial_2 f(x,y)=x^2\left(\dfrac{2ye^y-e^yy^2}{(e^y)^2}\right)=x^2\left(\dfrac{2y-y^2}{e^y}\right)$.

2. Határozzuk meg a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$, $\partial_1\partial_3 f$, $\partial_1\partial_2\partial_3 f$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:
   (a) $f(x,y,z)=5z$,
   (b) $f(x,y,z)=x+y+z$,
   (c) $f(x,y,z)=ze^{x-y}$.

Megoldás. (a) $\partial_1 f(x,y)=0$, $\partial_2 f(x,y)=0$, $\partial_3 f(x,y)=5$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.
(b) $\partial_1 f(x,y)=1$, $\partial_2 f(x,y)=1$, $\partial_3 f(x,y)=1$. Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.
(c) $\partial_1 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_2 f(x,y)=-ze^{x-y}$, $\partial_3 f(x,y)=e^{x-y}$.
A másodrendű deriváltak: $\partial_1^2 f(x,y)=\partial_1\partial_1 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_2^2 f(x,y)=\partial_2\partial_2 f(x,y)=ze^{x-y}$, $\partial_1\partial_3 f(x,y)=e^{x-y}$.
A harmadrendű deriváltak: $\partial_1\partial_2\partial_3 f(x,y)=-e^{x-y}$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f(x,y)=-e^{x-y}$.

3. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő függvények Jacobi-mátrixát egy $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ pontban! Mi lesz $f'(1,2,3)$?

Megoldás. A Jacobi-mátrix egy (x_0,y_0,z_0) pontban: $f'(x_0,y_0,z_0)=(\partial_1 f(x_0,y_0,z_0),\partial_2 f(x_0,y_0,z_0),\partial_3 f(x_0,y_0,z_0))$.
(a) $f'(x_0,y_0,z_0)=\big(0,0,5\big)$ konstans mátrix, így $f'(1,2,3)$ is ezzel egyenlő.
(b) $f'(x_0,y_0,z_0)=\big(1,1,1\big)$ konstans mátrix, így $f'(1,2,3)$ is ezzel egyenlő.
(c) $f'(x_0,y_0,z_0)=\big(z_0e^{x_0-y_0},-z_0e^{x_0-y_0},e^{x_0-y_0}\big)$. Ebből pedig (x_0,y_0,z_0)-ba $(1,2,3)$-at helyettesítve: $f'(1,2,3)=\big(3e^{-1},-3e^{-1},e^{-1}\big)$.

4. Mi lesz az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény Jacobi-mátrixa egy (x_0,y_0) pontban, ha $f(x,y)=$

$$a)\quad xy\qquad b)\quad x^4+x^2y^2+y^4\qquad c)\quad \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

Megoldás. A Jacobi-mátrix egy (x_0,y_0) pontban: $f'(x_0,y_0)=(\partial_1 f(x_0,y_0),\partial_2 f(x_0,y_0))$.
(a) $(y_0,\ x_0)$
(b) $(4x_0^3+2x_0y_0^2,\ 2x_0^2y_0+4y_0^3)$
(c) $\left(\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2},\ \dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$

5. Mi lesz a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa egy (x_0, y_0) pontban, ha $g(x, y) =$

$$a)\quad (x,\ y) \qquad b)\quad \left(x^4 + x^2y^2 + y^4,\ x^4 + x^2y^2 + y^4\right) \qquad c)\quad (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$$

Megoldás. Ha $f = (f_1,\ f_2)$, akkor

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}$$

$$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 4x_0^3 + 2x_0y_0^2 & 4y_0^3 + 2y_0x_0^2 \\ 4x_0^3 + 2x_0y_0^2 & 4y_0^3 + 2y_0x_0^2 \end{pmatrix} \qquad c)\quad \begin{pmatrix} e^{x_0} \cos y_0 & -e^{x_0} \sin y_0 \\ e^{x_0} \sin y_0 & e^{x_0} \cos y_0 \end{pmatrix}$$

7. gyakorlat

1. Számítsuk ki $f''(3, 4)$-et, ahol

$$a)\quad f(x, y) = xy \qquad b)\quad f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \qquad c)\quad f(x, y) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

Megoldás. Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, akkor

$$f''(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0, y_0) & \partial_2\partial_1 f(x_0, y_0) \\ \partial_1\partial_2 f(x_0, y_0) & \partial_2^2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$a)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 140 & 48 \\ 48 & 210 \end{pmatrix} \qquad c)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{7}{25^2} & -\dfrac{24}{25^2} \\ -\dfrac{24}{25^2} & -\dfrac{7}{25^2} \end{pmatrix}$$

2. Mutassuk meg, hogy $\partial_1^2 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) = 0$ teljesül, ha $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, illetve ha $u(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$!

Megoldás. (a)

$$\partial_1^2(\ln(x^2 + y^2)) = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2^2(\ln(x^2 + y^2)) = 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

az összegük 0.

(b)

$$\partial_1^2\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2^2\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

az összegük zérus.

3. Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények primitív függvényeit!

$$a)\quad f(x, y) = (x,\ y) \qquad b)\quad f(x, y) = \left(x^2 + xy^2,\ x^2y + y^3\right) \qquad c)\quad f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Megoldás. Ha van primitív függvény, azaz van olyan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\partial_1 F = f_1$ és $\partial_2 F = f_2$, akkor

$$F(x, y) = \int f_1(x, y)\ \mathrm{d}x + c(y),$$

ahol a $c(y)$ függvény a

$$\partial_2 F = \partial_2\left(\int f_1(x, y)\ \mathrm{d}x + c(y)\right) = f_2.$$

összefüggésből határozható meg.

(a)

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

(b)

$$\int f_1(x, y)\ \mathrm{d}x = \int x^2 + xy^2\ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y)$$

Így

$$f_2(x,y) = x^2y + y^3 = \partial_y\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y)\right),$$

azaz $c'(y) = y^3$. Így a primitív függvény

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4}.$$

(c) Ez már egy korábbi feladatsoron is szerepelt:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

8. gyakorlat

Legyen $\varphi : [a,b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe. Ekkor a görbe ívhossza:

$$l(\varphi) = \int_a^b \|\dot\varphi(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $\varphi : [a,b] \to \Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $\varphi([a,b]) \subset \Omega$. Ekkor az f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálján az

$$\int_\varphi f := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle \, \mathrm{d}t$$

valós integrált értjük. Ha f-nek létezik Ω-ban primitív függvénye (azaz egy olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $F' = f$, vagyis $\partial_i F(x) = f_i(x)$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re), akkor

$$\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik. Ebből következik, hogy ha f-nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén (azaz ha $\varphi(a) = \varphi(b)$) f vonalintegrálja φ mentén 0.

1. Számítsuk ki a következő görbe (asztroid) ívhosszát: $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, ahol $a > 0$.

   Megoldás. A görbe ívhosszának képletét felírva

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(3a\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2} \, \mathrm{d}t =$$
$$\int_0^{2\pi} 3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} \, \mathrm{d}t = \frac{3}{2}a\int_0^{2\pi} |\sin 2t| \, \mathrm{d}t = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, \mathrm{d}t = 3a\left[-\cos 2t\right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

2. Számítsuk ki a következő görbe (csavarvonal) ívhosszát: $\varphi : [0, h] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t,\ r\cos t,\ r\sin t)$, ahol $h, r > 0$.

   Megoldás.

$$l(\varphi) = \int_0^h \sqrt{1 + r^2(-\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^h \sqrt{1+r^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{1+r^2}\int_0^h 1 \, \mathrm{d}t = h\sqrt{1+r^2}.$$

3. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$ (azaz a felső egységfélkör), és $f(x,y) = (-y,\ x)$!

   Megoldás. $\dot\varphi(t) = (-\sin t,\ \cos t)$, így

$$\int_\varphi f = \int_0^\pi \langle(-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t)\rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi 1 \, \mathrm{d}t = \pi.$$

4. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1,\ 2t)$ (az $(1,0)$ és $(1,2)$ pontokat összekötő szakasz), és $f(x,y) = (e^{-x^2+y},\ 1)$!

   Megoldás.

$$\int_\varphi f = \int_0^1 \left\langle \left(e^{-1+2t},\ 1\right), (0, 2)\right\rangle \, \mathrm{d}t = 2.$$

5. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $f(x, y) = (x + y,\ x + y)$!

Megoldás. Az f függvény egy primitív függvénye $F(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + xy + \dfrac{y^2}{2}$, így

$$\int_\varphi f = F(\varphi(2\pi)) - F(\varphi(0)) = 0.$$

Zárt görbén minden primitív függvénnyel rendelkező függény integrálja zérus.

6. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (3\cos t,\ \sin t)$ és

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2}\right)!$$

Megoldás. Korábban láttuk, hogy f egy primitív függvénye $F(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. Ezért

$$\int_\varphi f = \frac{1}{2}\ln(0^2 + 1^2) - \frac{1}{2}\ln(3^2 + 0^2) = -\frac{1}{2}\ln 9 = -\ln 3.$$

9. gyakorlat

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításához az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n = 2$) integrálunk:

2. Tétel (Fubini). *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor*

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ dx\right)\ dy$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran egy általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $\Phi(x, y) : T \to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_Q f = \int_T f(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) \left|\det(\Phi'(u, v))\right|\ du\ dv,$$

ahol tehát a Φ leképezés Jacobi mátrixának determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyílván a T halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű” integrálni, ilyen például egy téglalap. Ha egy origó középpontú, R sugarú körön kell integrálni, akkor $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le R^2\}$, $T = [0, R] \times [0, 2\pi]$ és $\Phi = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$. Ekkor

$$\det(\Phi'(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

és

$$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\ dr\ d\varphi.$$

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1 + y^2}$, ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$;

   (b) $\displaystyle\int_D \sin y$, ahol $D = [0, 1] \times [-1, 1]$;

   (c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x} + y)^2$, ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$;

   (d) $\displaystyle\int_D \cos x \cos y \cos z$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Megoldás. (*a*)

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{x^2}{1 + y^2}\ dx\ dy = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} \int_1^2 x^2\ dx\ dy = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\ dy = \frac{7}{3}\int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{7}{3}\left[\operatorname{arc\,tg} y\right]_0^1 = \frac{7\pi}{12}.$$

(*b*)

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 \sin y\ dx\ dy = \int_{-1}^1 \sin y \int_0^1 1\ dx\ dy = \int_{-1}^1 \sin y \cdot 1\ dy = 0,$$

mert 0 közepű intervallumon páratlan függvény integrálja zérus.

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x}+y)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(\sqrt{x}+y)^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^3 - \left(\sqrt{x}\right)^3\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x+\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{3}x\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos x \cos y \cos z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \cos z \int_0^{\pi/2} \cos y \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \left(\int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x\right)^3 = 1.$$

2. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \le 1\right\}$ a zárt egységkörlap a síkon!

$$a) \quad \int_D 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad b) \quad \int_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad c) \quad \int_D y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Megoldás. Polártranszformációval, azaz az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ($r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$) helyettesítéssel

$$\int_D f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r.$$

(a)

$$\int_D 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 r 2\pi \, \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi.$$

(b)

$$\int_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\cos\varphi r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 r^2 \cdot 0 \, \mathrm{d}r = 0.$$

(c)

$$\int_D y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\varphi r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 r^3\pi \, \mathrm{d}r = \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

10. gyakorlat

Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha φ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a,b], \; \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$$

halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány (ez legtöbbször egy téglalap), $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ egy kölcsönösen egyértelmű, folytonosan differenciálható leképezés a paramétertartomány és $\Phi(\Omega)$ között, amelyet a Φ által meghatározott sima felületnek nevezünk. Ennek a felületnek a felszínét az

$$\int_\Omega \|\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

képlettel lehet kiszámolni. Ha a fenti felület minden pontjához hozzárendelünk egy valós számot (mondjuk minden egyes pontjához a pontbeli hőmérséklelet), azaz adott egy $U : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor U-nak a fenti felületre vett felszíni integrálján az

$$\int_\Phi U := \int_\Omega U(\Phi(u,v)) \cdot \|\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

integrált értjük. Ha pedig a felület minden pontjához egy vektort rendelünk (például sebességet), azaz adott egy $F : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}^3$ folytonos függvény, akkor az F függvény Φ-re vett felületi integrálján az

$$\int_\Phi F := \int_\Omega \langle F(\Phi(u,v)), \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

integrált értjük.

1. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha

   (a) $N_x := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], \ 0 \le y \le 1 - x^2\}$, $f(x,y) = 1$.

   (b) $N_x := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1,1], \ 0 \le y \le (1-x)^2\}$, $f(x,y) = \sqrt{y}$.

   (c) Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.

   Megoldás. (a)

$$\int_{N_x} f = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} 1 \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = \int_0^1 [y]_0^{1-x^2} \ \mathrm{d}x = \int_0^1 1 - x^2 \ \mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

   (b)

$$\int_{N_x} f = \int_{-1}^1 \int_0^{(1-x)^2} \sqrt{y} \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3} y^{3/2}\right]_0^{(1-x)^2} \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{2}{3}(1-x)^3 \ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[\frac{-(1-x)^4}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

   (c) A megadott parabola és egyenes az $x = -1$ és $x = 2$ pontban metszik egymást, ezért a normáltartomány most az $N_x := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1,2], \ x^2 - 1 \le y \le x + 1\}$ halmaz lesz.

$$\begin{aligned}
\int_{N_x} f &= \\
&= \int_{-1}^2 \int_{x^2-1}^{x+1} xy \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^2 x \int_{x^2-1}^{x+1} y \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x \int_{-1}^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{x+1} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 -x^5 + 3x^3 + 2x^2 \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{27}{8}
\end{aligned}$$

2. Legyen $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (u+v, \ u-v, \ u)$, és legyen $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $U(x,y,z) := x + y + z$. Számítsuk ki az $\int_\Phi U$ felszíni integrált!

   Megoldás. $\partial_u \Phi = (1, \ 1, \ 1)$, $\partial_v \Phi = (1, \ -1, \ 0)$, a vektoriális szorzatuk pedig

$$\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, \ 1, \ -2),$$

   és $\|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. A felszíni integrál

$$\int_0^1 \int_0^1 ((u+v) + (u-v) + u)\sqrt{6} \ \mathrm{d}v \ \mathrm{d}u = 3\sqrt{6} \int_0^1 \int_0^1 u \ \mathrm{d}v \ \mathrm{d}u = 3\sqrt{6} \int_0^1 u \ \mathrm{d}u = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

3. Legyen $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (u+v, \ u-v, \ u)$, és legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) := (y, \ x, \ z)$. Számítsuk ki az $\int_\Phi F$ felületi integrált!

   Megoldás. Φ ugyanaz, mint az előbb, ezért ismét $\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = (1, \ 1, \ -2)$. A felületi integrál

$$\int_0^1 \int_0^1 \langle (u-v, \ u+v, \ u), (1, \ 1, \ -2) \rangle \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^1 0 \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v = 0.$$

4. Legyen $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (\sin v \cos u, \ \sin v \sin u, \ \cos v)$ egy felület. Számítsuk ki a felszínét!

   Megoldás. $\partial_u \Phi = (-\sin v \sin u, \ \cos u \sin v, \ 0)$, $\partial_v \Phi = (\cos v \cos u, \ \cos v \sin u, \ -\sin v)$, a vektoriális szorzatuk pedig

$$\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin v \sin u & \cos u \sin v & 0 \\ \cos v \cos u & \cos v \sin u & -\sin v \end{vmatrix} = (-\cos u \sin^2 v, \ -\sin^2 v \sin u, \ -\sin v \cos v).$$

   Mivel

$$\begin{aligned}
&\|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| = \\
&= \sqrt{(-\cos u \sin^2 v)^2 + (-\sin^2 v \sin u)^2 + (-\sin v \cos v)^2} = \sqrt{\cos^2 u \sin^4 v + \sin^4 v \sin^2 u + \sin^v \cos^2 v} = \\
&= \sqrt{\sin^2 v \left(\cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 v \sin^2 u + \cos^2 v\right)} = \sqrt{\sin^2 v} = |\sin v|,
\end{aligned}$$

   ezért a felszín

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin v \ \mathrm{d}v \ \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} [-\cos v]_0^\pi \ \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} 2 \ \mathrm{d}u = 4\pi.$$

5. Legyen $\Phi : [0, \pi/4] \times [\pi/3, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u, v) := (\sin v \cos u,\ \sin v \sin u,\ \cos v)$ egy felület. Számítsuk ki a felszínét!

Megoldás. Ugyanaz, mint az előbb:

$$\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = (-\cos u \sin^2 v,\ -\sin^2 v \sin u,\ -\sin v \cos v).$$

és

$$\|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| = |\sin v| \, .$$

A felszín:

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin v \ \mathrm{d}v \ \mathrm{d}u = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sin v \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v = \frac{\pi}{4} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin v \ \mathrm{d}v = \frac{\pi}{4} \left[-\cos v\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$