Kalkulus gyakorlat
Fizika BSc I/2

1. gyakorlat

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és F primitív függvénye f-nek, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények primitív függvényeit!

   (a)
   $$a)\quad \int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int \frac{1}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}x \qquad c)\quad \int \frac{3x+6}{5x-1}\,\mathrm{d}x$$

   (b)
   $$a)\quad \int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int \frac{6x^2-2}{x^3-x+18}\,\mathrm{d}x$$

   (c)
   $$a)\quad \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int \frac{x-1}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x$$

   (d)
   $$a)\quad \int \frac{1}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,\mathrm{d}x$$

2. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^3 \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

3. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!

   (a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le x+2\right\}$,

   (b) az $y = \sin x$ és az $y = (2/\pi)x$ görbék által határolt síkidom.

2. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi impropius integrálokat!

$$a)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int_0^{+\infty} 2e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad c)\quad \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x \qquad e)\quad \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad f)\quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

2. Számítsuk ki az alábbi impropius integrálokat!

$$a)\quad \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

3. Milyen valós α-ra lesznek konvergensek az alábbi impropius integrálok? Mivel egyenlőek?

$$a)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad b)\quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

3. gyakorlat

Egy 0 középpontú $\sum a_n \,\mathrm{id}^n$ hatványsor konvergenciahalmaza egy olyan 0 középpontú intervallum, amelynek R sugarát az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ ha a nevező véges és nem nulla,}$$

illetve definíció szerint legyen $R := 0$, ha a nevező végtelen és $R := +\infty$, ha a nevező nulla. Itt csak olyan példák fognak szerepelni, amelyekben az $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozatnak határértéke is létezik, ezért a fenti definícióban a $\limsup$ helyett egyszerűen limeszre lehet gondolni. A konvergencia-intervallum végpontjairól azonban a tétel semmit sem mond, így ott egy hatványsor lehet konvergens, illetve divergens is.

1. Számítsuk ki a $\sum a_n \,\mathrm{id}^n$ hatványsor konvergenciasugarát, ahol $a_n :=$

$$a)\quad n \qquad b)\quad \frac{1}{n} \qquad c)\quad \frac{2^n}{n^2} \qquad d)\quad \frac{2^n}{n!} \qquad e)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2. Számítsuk ki az alábbi hatványsorok konvergenciahalmazát!

$$a)\quad \sum \frac{1}{n!}\,\mathrm{id}^n \qquad b)\quad \sum n!\,\mathrm{id}^n \qquad c)\quad \sum \mathrm{id}^n \qquad d)\quad \sum \frac{1}{n^2}\,\mathrm{id}^n \qquad e)\quad \sum \frac{1}{n}\,\mathrm{id}^n$$

3. Állítsuk elő deriválással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol
   (a) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,
   (b) $H = (-1, 1), \quad f(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

4. Állítsuk elő integrálással az adott H halmazon az f függvényt $f(x) = \sum a_n x^n$ alakban, ahol
   (a) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \ln(1+x)$,
   (b) $H = (-1, 1), \quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

4. gyakorlat

Előadáson szerepel néhány nevezetes Taylor-sor, ezek a következők:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

ahol a fenti Taylor-sorok egész $\mathbb{R}$-en konvergensek (és ott elő is állítják a függvényeket), míg az alábbi sor-előállítás csak a $(-1,1]$ intervallumon érvényes:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Ezeken kívül még érdemes felírni a mértani sor összegét is:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{ahol } x \in (-1,1).$$

1. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát! Mi a konvergenciahalmaz?

$$a) \quad \sin x^2 \qquad b) \quad \frac{1}{1+x^2} \qquad c) \quad e^{-x} \qquad d) \quad xe^{-x} \qquad e) \quad \frac{x^2}{1+x^2}$$

2. Írjuk fel az alábbi függvények 0 közepű Taylor-sorát! Mi a konvergenciahalmaz?

$$a) \quad \frac{1}{1-4x^2} \qquad b) \quad \operatorname{arc\,tg} x$$

3. Mi az alábbi numerikus sorok összege? Használjuk fel az előző feladatok eredményeit.

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

4. Írjuk fel 0 közepű hatványsor alakban e^{-x^2} egy primitív függvényét!

5. gyakorlat

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok, ekkor az

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvénysort trigonometrikus sornak nevezzük.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-szerint periodikus függvény, amely Riemann-integrálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. (Az intervallum választásában csak az lényeges, hogy a hosszúsága 2π legyen, tekinthetnénk a $[0,2\pi]$ intervallumot is, ekkor az alábbi definíciók értelemszerűen módosulnának). Ekkor az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \qquad (n = 0,1,2\dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \qquad (n = 1,2,\dots)$$

számokat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. A Fourier-együtthatókkal képzett trigonometrikus sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük. A (pontonkénti) konvergencia Fourier-sorok esetében nem olyan egyszerű kérdés, például f folytonosságából még nem következik, hogy a Fourier-sor minden pontban f-hez tart, de ha például f differenciálható, akkor már igen.

1. Adjuk meg az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát!
   (a) $f(x) = x$, ha $x \in [0,2\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x+2k\pi) := f(x)$
   (b) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, ha $x \in (0,2\pi)$, $f(0) := 0$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x+2k\pi) := f(x)$
   (c) $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi,\pi)$ és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re $f(x+2k\pi) := f(x)$
   (d) $f(x) = (\pi - |x|)^2$, ha $x \in [-\pi,\pi)$, és $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x+2k\pi) := f(x)$

6. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$a)\quad f(x,y)=x^2 \qquad b)\quad f(x,y)=y^3 \qquad c)\quad f(x,y)=x^2+y^3$$

$$d)\quad f(x,y)=x^2y^4 \qquad e)\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)} \qquad f)\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{e^y}$$

2. Határozzuk meg a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$, $\partial_1\partial_3 f$, $\partial_1\partial_2\partial_3 f$, $\partial_3\partial_2\partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:
   (a) $f(x,y,z)=5z$,
   (b) $f(x,y,z)=x+y+z$,
   (c) $f(x,y,z)=ze^{x-y}$.

3. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő függvények Jacobi-mátrixát egy $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ pontban! Mi lesz $f'(1,2,3)$?

4. Mi lesz az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény Jacobi-mátrixa egy (x_0,y_0) pontban, ha $f(x,y)=$

$$a)\quad xy \qquad b)\quad x^4+x^2y^2+y^4 \qquad c)\quad \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

5. Mi lesz a $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa egy (x_0,y_0) pontban, ha $g(x,y)=$

$$a)\quad (x,\ y) \qquad b)\quad \left(x^4+x^2y^2+y^4,\ x^4+x^2y^2+y^4\right) \qquad c)\quad (e^x\cos y,\ e^x\sin y)$$

7. gyakorlat

1. Számítsuk ki $f''(3,4)$-et, ahol

$$a)\quad f(x,y)=xy \qquad b)\quad f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4 \qquad c)\quad f(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

2. Mutassuk meg, hogy $\partial_1^2 u(x,y)+\partial_2^2 u(x,y)=0$ teljesül, ha $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, illetve ha $u(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$!

3. Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvények primitív függvényeit!

$$a)\quad f(x,y)=(x,\ y) \qquad b)\quad f(x,y)=\left(x^2+xy^2,\ x^2y+y^3\right) \qquad c)\quad f(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

8. gyakorlat

Legyen $\varphi:[a,b]\to\Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe. Ekkor a görbe ívhossza:

$$l(\varphi)=\int_a^b\|\dot\varphi(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen $\varphi:[a,b]\to\Omega$ egy folytonosan differenciálható görbe, amelyre $\varphi([a,b])\subset\Omega$. Ekkor az f függvény φ görbe mentén vett vonalintegrálján az

$$\int_\varphi f:=\int_a^b\langle f(\varphi(t)),\dot\varphi(t)\rangle\ \mathrm{d}t$$

valós integrált értjük. Ha f-nek létezik Ω-ban primitív függvénye (azaz egy olyan $F:\Omega\to\mathbb{R}$ függvény, amelyre $F'=f$, vagyis $\partial_i F(x)=f_i(x)$ minden $i=1,2,\ldots,n$-re), akkor

$$\int_\varphi f=F(\varphi(b))-F(\varphi(a)).$$

Ezt az F függvényt az f potenciálfüggvényének is nevezik. Ebből következik, hogy ha f-nek van potenciálja, akkor zárt görbe esetén (azaz ha $\varphi(a)=\varphi(b)$) f vonalintegrálja φ mentén 0.

1. Számítsuk ki a következő görbe (asztroid) ívhosszát: $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, ahol $a > 0$.
2. Számítsuk ki a következő görbe (csavarvonal) ívhosszát: $\varphi : [0, h] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t,\ r\cos t,\ r\sin t)$, ahol $h, r > 0$.
3. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$ (azaz a felső egységfélkör), és $f(x, y) = (-y,\ x)$!
4. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1,\ 2t)$ (az $(1, 0)$ és $(1, 2)$ pontokat összekötő szakasz), és $f(x, y) = (e^{-x^2+y},\ 1)$!
5. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $f(x, y) = (x + y,\ x + y)$!
6. Számítsuk ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (3\cos t,\ \sin t)$ és
$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2}\right)!$$

9. gyakorlat

Kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integráljának kiszámításáshoz az alábbi lebontási tételt használhatjuk, amennyiben egy téglalapon ($n = 2$) integrálunk:

2. Tétel (Fubini). *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor*
$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ dx\right)\ dy$$

Hasonló állítás fogalmazható meg az $n = 3$ esetre is. Gyakran egy általánosabb $Q \subset \mathbb{R}^2$ halmazon (például egy körön) kell integrálni. Ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy $\Phi(x, y) : T \to Q$ bijektív leképezés, amely folytonosan differenciálható, akkor
$$\int_Q f = \int_T f(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v))\, |\det(\Phi'(u, v))|\ \ du\ dv,$$
ahol tehát a Φ leképezés Jacobi mátrixának determinánsának abszolút értékével szorzunk. Nyílván a T halmaznak olyannak kell lenni, amin már „könnyű” integrálni, ilyen például egy téglalap. Ha egy origó középpontú, R sugarú körön kell integrálni, akkor $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le R^2\}$, $T = [0, R] \times [0, 2\pi]$ és $\Phi = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$. Ekkor
$$\det(\Phi'(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$
és
$$\int_Q f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi.$$

1. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat!
   (a) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{1 + y^2}$, ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$;
   (b) $\displaystyle\int_D \sin y$, ahol $D = [0, 1] \times [-1, 1]$;
   (c) $\displaystyle\int_D (\sqrt{x} + y)^2$, ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
   (d) $\displaystyle\int_D \cos x \cos y \cos z$, ahol $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.
2. Számítsuk ki az alábbi többdimenziós integrálokat, ahol $D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1\right\}$ a zárt egységkörlap a síkon!
$$a)\ \int_D 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad b)\ \int_D x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad c)\ \int_D y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

10. gyakorlat

Gyakran olyan síkidomon kell integrálni, amelyet alulról és felülről folytonos függvények grafikonjai határolnak. Ha $\varphi,\ \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az

$$N_x = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\big\}$$

halmazt (az x-tengelyre nézve) normáltartománynak nevezzük. Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x$$

Hasonló állítás fogalmazható meg olyan N_y tartományra, amely az y-tengelyre nézve normáltartomány.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány (ez legtöbbször egy téglalap), $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ egy kölcsönösen egyértelmű, folytonosan differenciálható leképezés a paramétertartomány és $\Phi(\Omega)$ között, amelyet a Φ által meghatározott sima felületnek nevezünk. Ennek a felületnek a felszínét az

$$\int_\Omega \|\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

képlettel lehet kiszámolni. Ha a fenti felület minden pontjához hozzárendelünk egy valós számot (mondjuk minden egyes pontjához a pontbeli hőmérsékletet), azaz adott egy $U : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor U-nak a fenti felületre vett felszíni integrálján az

$$\int_\Phi U := \int_\Omega U(\Phi(u,v)) \cdot \|\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

integrált értjük. Ha pedig a felület minden pontjához egy vektort rendelünk (például sebességet), azaz adott egy $F : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}^3$ folytonos függvény, akkor az F függvény Φ-re vett felületi integrálján az

$$\int_\Phi F := \int_\Omega \langle F(\Phi(u,v)), \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\rangle\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

integrált értjük.

1. Számítsuk ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha
   (a) $N_x := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le 1 - x^2\big\}$, $f(x,y) = 1$.
   (b) $N_x := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1,1],\ 0 \le y \le (1-x)^2\big\}$, $f(x,y) = \sqrt{y}$.
   (c) Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.
2. Legyen $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (u+v,\ u-v,\ u)$, és legyen $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $U(x,y,z) := x+y+z$. Számítsuk ki az $\int_\Phi U$ felszíni integrált!
3. Legyen $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (u+v,\ u-v,\ u)$, és legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) := (y,\ x,\ z)$. Számítsuk ki az $\int_\Phi F$ felületi integrált!
4. Legyen $\Phi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (\sin v \cos u,\ \sin v \sin u,\ \cos v)$ egy felület. Számítsuk ki a felszínét!
5. Legyen $\Phi : [0,\pi/4] \times [\pi/3,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := (\sin v \cos u,\ \sin v \sin u,\ \cos v)$ egy felület. Számítsuk ki a felszínét!