Kalkulus II. Beadható Feladatok
Varga Bonbien, VABPACT.ELTE

1. A feladat a következő határozott integrál kiszámítása:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = ?$

Az integrált átírhatjuk így:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x\, dx$$

Ezt most integráljuk parciálisan:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x\, dx = \underbrace{[-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cos x\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin^{n-2} x - \sin^n x))\, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

Tehát a következőt kaptuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

Láthatóan a jobb oldalon megjelent a keresett integrál megint. Ezt átvíve a baloldalra és rendezve, a következőt kapjuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx$$

Most Legyen $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

Ezzel a jelöléssel az előző kifejezés:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Ez láthatóan nem más mint egy rekurzió I_n -re ami pont az integrál amit mi keresünk. Már csak meg kell oldanunk a rekurziós egyenletet.

Láthatóan két eset van különböző n-ekre. Az egyik ha n páros, a másik ha n páratlan.

a, n páros: Ekkor az első elem, az $n = 0$, ez esetben az integrál értéke

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

A második elem:

$$I_2 = \frac{2-1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

A harmadik tehát:

$$I_4 = \frac{4-1}{4} I_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

És így tovább, tehát az n-edik elem:

$$I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

b, Most nézzük azt az esetet, ha n páratlan. Ekkor az első elem $n = 1$ esetén:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

A második elem:

$$I_3 = \frac{3-1}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3}$$

A harmadik:

$$I_5 = \frac{5-1}{5} I_3 = \frac{4}{5}\frac{2}{3}$$

És így tovább az n-edik:

$$I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}$$

Tehát az általunk keresett $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ integrál értéke:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

2. A feladat a $H = \left\{(x,y) \in R | x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\right\}$ $(a \in (0; +\infty))$ síkidom területének a meghatározása.

A síkidom határvonala:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Innen fejezzük ki y-t:

$$y = \pm\left(\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}\right)^3$$

Mos vizsgáljuk meg az értelmezési tartományt, hogy a gyök alatt nemnegatív szám legyen. Ez akkor lesz ha: $a^{\frac{2}{3}} \geq x^{\frac{2}{3}}$ azaz $a^2 - x^2 \geq 0$. Ahonnan: $-a \leq x \leq a$

Tehát ez a síkidom szimmetrikus, mind az x mind az y tengelyre, így elég csak kiszámolnunk, a "pozitív résznek" alatti területe az $0 \leq x \leq a$ intervallumon, és azt megszorozni 4-gyel.

Tehát a következő integrált kell kiszámítanunk, ahhoz hogy a negyedterületet megkapjuk:

$$T_4 = \int_0^a \left(\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}\right)^3 dx$$

Alakítsuk át egy kicsit:

$$T_4 = a\int_0^a \left(\sqrt{1 - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2}\right)^3 dx$$

használjuk az alábbi helyettesítést: $\cos t = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ Ahonnan: $dx = -3a\cos^2 t \sin t dt$

Az integrálási határok, pedig így változnak: Amikor $x = 0$, akkor $\cos t_0 = 0$ azaz $t_0 = \frac{\pi}{2}$. és amikor $x = a$, akkor $\cos t_1 = 1$ azaz $t_1 = 0$

Ezekkel az integrál:

$$T_4 = -3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{\sin t}\right)^3 \cos^2 t \sin t\, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^2 t \sin t\, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t\, dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\sin^4 t\, dt = 3a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\, dt\right)$$

Ugyanezeket az integrálokat határoztuk meg az első feladatban, csak itt most $n = 4, 6$. Tehát:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\, dt = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{96}$$

Ezeket beírva az előző integrálba a következőt kapjuk a terület negyedére:

$$T_4 = \frac{3\pi}{32}a^2$$

Tehát az egész síkidom területe:

$$T = 4 \cdot T_4 = \frac{3\pi}{8}a^2$$

3. Az alábbi integrált kell vizsgálgatunk:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

Az improprius integrál definíciója szerint:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^n e^{-x}\, dx$$

Integráljuk parciálisan:

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a x^n e^{-x}\, dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{x^n}{e^x}\right]_0^a - \lim_{a\to\infty} \int_0^a -nx^{n-1}e^{-x}\, dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{x^n}{e^x}\right]_0^a + n \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^{n-1}e^{-x}\, dx$$

Azaz a következőt kaptuk:

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^n e^{-x}\,dx = -\lim_{a\to\infty}\frac{a^n}{e^a} + n\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

Most az alábbi határértéket kell vizsgálnunk tehát:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a^n}{e^a}$$

Láthatóan ez egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték és a nevező sosem lesz 0, tehát alkalmazhatjuk rá a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a^n}{e^a} = \lim_{a\to\infty}\frac{na^{n-1}}{e^a} = \lim_{a\to\infty}\frac{n(n-1)a^{n-2}}{e^a} = \cdots = \lim_{a\to\infty}\frac{n!a^0}{e^a} = 0$$

Ezt felhasználva, az eredeti kifejezésünk:

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^n e^{-x}\,dx = n\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

Láthatóan egy rekurziót kaptunk.
Legyen $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$.
Ekkor a rekurziós egyenletünk:

$$\Gamma(n) = n\Gamma(n-1)$$

Számoljuk a kezdeti tagot, azaz ha $n = 0$:

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^a}\right) = 1$$

A következő tagok:

$$\Gamma(1) = 1\cdot\Gamma(0) = 1 \quad \Gamma(2) = 2\cdot\Gamma(1) = 2$$

$$\Gamma(3) = 3\cdot\Gamma(2) = 6 = 3! \quad \Gamma(4) = 4\cdot\Gamma(3) = 4\cdot 3! = 4!$$

és így tovább, az n-dik tag:

$$\Gamma(n) = n!$$

Tehát az általunk keresett integrál értéke:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$$

4. Nem!! a feladat feltétele nem igaz. Attól, hogy $\int_0^\infty f(x)\,dx$ integrál konvergens nem biztos, hogy $\lim_\infty f = 0$. Íme az ellenpélda:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

Integrál konvergens, de:

$$\lim_{\infty} \sin(x^2) \neq 0$$

Ezt könnyen beláthajuk, sőt ki is számoljuk az integrált.
Legyen $u = x^2$ Ekkor: $dx = \frac{du}{2x}$ azaz:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{x}\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$$

Tehát az alábbi integrált kell kiszámítanunk:

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$$

Ismert az euler formula miszerint: $e^{iu} = \cos u + i \sin u$ azaz $\sin u = \mathrm{Im}(e^{iu})$. Vagyis az integrál így írható:

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = \mathrm{Im}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{iu}\,du$$

Most legyen $v = iu$, azaz $du = idv$:

$$\mathrm{Im}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{iu}\,du = \mathrm{Im}\int_0^\infty (iv)^{-\frac{1}{2}} e^{-v} i\,dv = \mathrm{Im}\int_0^\infty \sqrt{i}\cdot v^{-\frac{1}{2}} e^{-v}\,dv$$

Na de az euler formula szerint $\mathrm{Im}\sqrt{i} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tehát a következőt kaptuk:

$$\mathrm{Im}\int_0^\infty \sqrt{i}\cdot v^{-\frac{1}{2}} e^{-v}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty v^{\frac{1}{2}-1} e^{-v}\,dv$$

Ez pedig definíció szerint:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty v^{\frac{1}{2}-1} e^{-v}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ahol $\Gamma(x)$ a gamma függvény. Ez az értéke pedig ismert, hogy : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Tehát az integrálunk értéke:

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Vagyis az eredeti integrál értéke:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Tehát az integrál valóban konvergens, és f határértéke a végtelenben nem nulla.

Belátható hasonlóan, hogy ez tetszőleges $n > 1$ valós számra igaz. a mathematica szerint:

$$\int_0^\infty \sin(x^n)\,dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

5. Nem!! a a feladat feltétele, nem igaz. Pl.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(Ezt is beláthatjuk az előző feladatban használt módszerrel, meg más módszerekkel is. Most ezt mellőzöm, hiszen ez egy közismert integrál)
Viszont, ennek abszolútértéke:

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

nem konvergens. Ezt is könnyen beláthatjuk. Mivel most csak $x > 0$-kat veszünk ezért x mindenhol pozitív, és csak a $\sin x$ vált előjelet, tehát elég csak ennek az abszolútértékét venni.
Vegyük észre a következő egyenlőtlenséget:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\, dx = \frac{2}{k\pi}$$

Ahol, k pozitív egész. Ekkor tehát:

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi}$$

Ha $n \to \infty$ akkor tehát azt kapjuk, hogy:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx > \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Tehát az integrál valóban divergens.

6. Ismert a következő tétel tetszőleges a körüli $\sum_n c_n(x-a)^n$ hatványsorra: Az alábbiak közül valamelyik biztosan igaz lesz a hatványsorra:

   (a) A sor csak $x = a$ esetén lesz konvergens.

   (b) A sor minden $x \in R$-re konvergens.

   (c) A sor egy véges $(-r, r)$ nyílt intervallumra mindenhol konvergens, az $x > r$ és $x < -r$ intervallumokra divergens, és az $x = r$ valamint $x = -r$ pontokra lehet abszolút konvergens, feltétlesen konvergens, vagy divergens.

   Ebből a tételből már meg is adhatjuk a feladatra a választ.
   Értelemszerűen a fenti tétel következtében egy $I = (z, \infty)$ intervallumon, ahol z véges nem fogunk találni olyan hatványsort melynek konvergencia halmaza I-vel egyenlő.
   Tehát az olyan intervallumok amelyeknek csak felső vagy csak alsó korlátjuk van eleget tesznek a feltételnek. Azaz nem található olyan hatványsor melynek konvergencia halmaza egyenlő lenne velük.

7. Egy $\sum_n c_n(x-a)^n$ hatványsor akkor lesz az egész R-en, egyenletesen konvergens, hogyha a konvergencia sugara tart végtelenhez.
   Azaz:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \to \infty$$

   Azaz:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

   Ha ez teljesül akkor az a hatványsor minden valós x-re konvergens lesz.
   Ilyen például, az:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

vagy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

Ez egy Bessel függvény. Ezekre nyílvánvalóan az előző határérték nulla lesz. (Ez épp az e^x). Hasonlóan az összes e^x-ből származtatható, mint a sin, cos stb. Mind az egész valós tengelyen konvergensek lesznek.

8. **(a)** Ezt a Taylor sort kell a nulla körül. Egyből át is alakítjuk egy kicsit, és parciális törtekre bontom:

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{x}{(1-x)(2x+1)} = \frac{1}{3(1-x)} - \frac{1}{3(2x+1)}$$

Ezt már egyszerűen tudjuk sokszor deriválni. nézzük is meg az első párat:

$$f'(x) = \frac{1}{3(1-x)^2} + \frac{1 \cdot 2}{3(2x+1)^2}$$

A második:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{3(1-x)^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3(2x+1)^3}$$

A harmadik:

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3(1-x)^4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}{3(2x+1)^4}$$

És így tovább teljes indukcióval beláthatjuk, hogy az n-edik derivált:

$$f^{(n)} = \frac{n!}{3(1-x)^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{n! \cdot 2^n}{3(2x+1)^{n+1}}$$

Tehát az n-edik derivált a nullában:

$$f^{(n)}(0) = \frac{1 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n}{3} \cdot n!$$

Tehát a taylor sor a_n együtthatói:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n}{3}$$

Vagyis a taylor sor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n}{3} x^n$$

Vizsgáljuk meg a konvergenciahalmazt! A konvergencia sugár (Ez egy elég egyszerű határérték így most a részleteket nem részletezem, hát ez jól megmondtam):

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{2}$$

látjuk még a függvényen, hogy $x = -\frac{1}{2}$-nél nincs értelmezve. Ezért tehát a konvergencia halmaz:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

(b) Ezt a Taylor sort kell:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Az első deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

Mégegyszer deriválva:

$$f''(x) = \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2(1+x)^2}$$

mégegyszer:

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{2(1-x)^3} + \frac{1 \cdot 2}{2(1+x)^3}$$

És így tovább teljes indukcióval beláthatjuk, hogy az n-edik derivált:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2(1-x)^n} + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2(1+x)^n}$$

Tehát az n-edik derivált a nullában:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n-1)!}{2}(1 + (-1)^{n-1})$$

Tehát a taylor sor a_n együtthatója:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n}$$

Tehát a Taylor sor:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n} x^n$$

Nézzük meg a konvergencia halmazt. Ismert a konvergencia sugárra:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

Láthatóan, -1-ben és 1-ben nincs értelmezve $f(x)$, tehát a konvergencia halmaz $x \in (-1\ ,1)$.

(c) Ezt a Taylor sort kell:

$$f(x) = (1+x)e^{-x}$$

Az első derivált:

$$f'(x) = -xe^{-x}$$

A második:

$$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x}$$

A harmadik:

$$f'''(x) = 2e^{-x} - xe^{-x}$$

A negyedik:

$$f''''(x) = -3e^{-x} + xe^{-x}$$

És így tovább, teljes indukcióval belátható, hogy az n-edik derivált:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n + 1)e^{-x}$$

Tehát az n-edik derivált a 0 helyen:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n(1-n)$$

Vagyis a Taylor sor a_n együtthatója:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n\frac{1-n}{n!}$$

Tehát a Taylor sor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-n}{n!} x^n$$

Vizsgáljuk még meg a konvergencia halmazt. Láthatóan a konvergencia sugár $r \to \infty$, tehát a Taylor sor minden x-re konvergens.

(d) Ezt a Taylor sort kell:

$$\mathrm{tg}x$$

Ez már egy kicsit nehézkesebb taylor sor.
Írjuk fel először a tangenst komplex alakban, az euler formuláva. A sinus és cosinust ismerjük:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

. Tehát a tangens:

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = -i \cdot \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} = -i \cdot \frac{e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1}{e^{4ix} - 1} = -i \cdot \frac{(e^{4ix} - 1) - 2(e^{2ix} + 1) + 4}{e^{4ix} - 1} =$$

$$= -i \cdot \left(1 - \frac{2}{e^{2ix} - 1} + \frac{4}{e^{4ix} - 1}\right) = \frac{2i}{e^{2ix} - 1} - \frac{4i}{e^{4ix} - 1} - i$$

Szorozzuk ezt most meg x-szel:

$$x\mathrm{tg}x = \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} - \frac{4ix}{e^{4ix} - 1} - ix$$

Na de azt tudjuk, hogy az ilyen alakú exponenciális kifejezés éppen a Bernoulli számok generátora:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < 2\pi$$

A Bernoulli számokra ismert, hogy minden páratlan indexű az egy kivételével nulla: $B_{2k+1} = 0$ ha $k \geq 1$. Tehát alakítsuk tovább a kifejezést:

$$x\mathrm{tg}x = \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} - \frac{4ix}{e^{4ix} - 1} - ix = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2ix)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(4ix)^n}{n!} - ix =$$

$$= \left(1 + B_1 \cdot 2ix + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(2ix)^n}{n!}\right) - \left(1 + B_1 \cdot 4ix + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(4ix)^n}{n!}\right) - ix$$

Ismerjük továbbá az egyes Bernoulli számot: $B_1 = -\frac{1}{2}$. Tehát ezzel:

$$x\mathrm{tg}x = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(2ix)^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(4ix)^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{2^n (ix)^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{2^{2n} (ix)^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} (2^n - 2^{2n}) B_n \frac{(ix)^n}{n!}$$

Az előbb láttuk azonban, hogy minden páratlan indexű Bernoulli szám zérus, tehát csak B_{2k}-ek lesznek a Taylor sorban:

$$x\mathrm{tg}x = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{2k} - 2^{2 \cdot 2k}) B_{2k} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{4^k (1 - 4^k)(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Tehát innen végül a $\mathrm{tg}x$ Taylor sora:

$$\mathrm{tg}x = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{(1 - 4^k)(-4)^k}{(2k)!} x^{2k-1}$$

A konvergencia halmaz pedig láthatóan: $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

9. Feladat:

Az alábbi függvény eleget tesz a feladat feltételének:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{ha } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ugyanez a függvény fordult elő a kalkulus I beadható házik feladatsorában, ahol azt kellett belátni, hogy tetszőlegesen sokszor differenciálható a 0-ban, és hogy $f^{(n)}(0) = 0$. Ezt ott be is láttam, és meg is kaptam rá a max. pontot, úgy hogy itt nem fogom mégegyszer belátni...amúgy nem olyan hosszú...

Szóval mivel $f^{(n)}(0) = 0$, ezért a 0 körüli Taylor sor minden tagja nulla lesz, tehát egész R-en az konstans nulla függvényt állítja elő.

10. Feladat: Ilyen függvény, például az alábbi összeggel megadott fv.:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^2 \cdot x)}{2^k}$$

11. Feladat: Az $f : R \to R$ $f(x) = x - [x]$ függvény Fourier sorára vagyunk kíváncsiak.

A függvény periódusa $T = 1$, továbbá a függvény páros, így a fourier sorában nem lesznek cos tagok, mivel az a_n fourier együtthatója nulla. Vagyis nekünk csak a b_n együtthatót kell kiszámolnunk. $n \in N$ természetes szám.

Az konstans tag:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \int_0^1 (x - [x])\,dx = \int_0^1 x\,dx - \underbrace{\int_0^1 [x]\,dx}_{0} = \frac{1}{2}$$

A szinuszos tagok együtthatói:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(2\pi nx)\,dx = 2 \cdot \int_0^1 x\sin(2\pi nx)\,dx = -\frac{1}{n\pi}$$

Tehát a Fourier sor:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} - \frac{\sin(4\pi x)}{2\pi} - \frac{\sin(6\pi x)}{3\pi} - \cdots = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}$$

Vizsgálgassuk egy kicsit a konvergenciáját a fourier sornak. Látható, hogy az:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}$$

összegre lehetséges, hogy a sin-os tag éppen 1 legyen. Ekkor viszont, az összeg éppen a harmonikus sor lesz, amiről meg tudjuk, hogy divergens.

Nézzük meg, hogy ez mikor lehetséges.

$\sin y = 1$ akkor teljesül, ha $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ahol $k \in Z$ egész szám. a fourier sorban, a szinusz argumentuma: $y = 2\pi nx$. Tehát az előző alapján ha $x = \frac{1+4k}{4n}$, akkor a szinusz éppen egy lesz, és ekkor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} = \infty$$

azaz divergens. Tehát ilyen x-ek esetén a fourier sor nem lesz konvergens. Hasonlóan meg lehet nézni, hogy mikor lesz a $\sin .. = -1$, akkor is divergens lesz.

12. Feladat: Az $f : [0, 2\pi] \to R$ $f(x) = e^x$ függvény Fourier sorát kell előállítanunk.
A konstans tag:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x\,dx = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$$

A cos ..-os tag együtthatója ($n \in N$ természetes szám):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cdot \cos(nx)\,dx = \left[\frac{e^x(\cos(nx)+n\sin(nx))}{1+n^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{1+n^2}\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$$

Hasonlóan a sin ..-os tag együtthatója:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cdot \sin(nx)\,dx = \left[\frac{e^x(\sin(nx)-n\cos(nx))}{1+n^2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{n}{1+n^2}\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$$

A fenti integrálokat így számoltuk ki:

$$\int e^x\cos(nx)\,dx = e^x\cos(nx) + n\int e^x\sin(nx)\,dx = e^x\cos(nx) + ne^x\sin(nx) - n^2\int e^x\cos(nx)\,dx$$

átrendezve:

$$\int e^x\cos(nx)\,dx = \frac{e^x(\cos(nx)+n\sin(nx))}{1+n^2}$$

Hasonlóan a sinusosat.
Tehát a fourier sor:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

A mi esetünkre:

$$f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)-n\sin(nx)}{1+n^2}\right]$$

Itt is vizsgálhatunk konvergenciát. Nézzük meg, hogy a sin .. és cos .. mikor vesznek fel 1-t értékként. Ha a *cos*.. vesz fel 1 értéket akkor a sinus nyílván 0 lesz, tehát a sinuszos tag eltűnik. Ekkor viszont láthatjuk, hogy a sor konvergens lesz, hiszen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

Az érdekes akkor lesz, ha cos .. lesz 0 és sin .. lesz 1. Ez akkor lesz amikor : $nx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ahol $k \in Z$ egész szám, azaz: $x = \frac{1+4k}{2n}\pi$. Ekkor ugyanis a végtelen összeg ez lesz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+n^2} \geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

Vagyis a Fourier sor ilyen x-ek esetén divergens lesz.

13. Feladat: Olyan $f : R^2 \to R$ függvényeket kell mutatni, amelyekre:

(a) elsőrendű parciális deriváltjai léteznek az origóban, de nem differenciálható az origóban. Ilyen függvény például:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

A parciális deriváltak a definicójuk alapján:

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

Úgyanígy:

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

Tehát a parc. deriváltak léteznek az origóban. Most nézzük, hogy deriválható-e az origóban:

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \partial_1 f(0,0)\cdot x - \partial_2 f(0,0)\cdot y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Transzformáljuk, át polárkoordinátákra: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Ekkor az előző határérték:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3|\cos^2\phi\sin\phi}{r^3(\sin^2\phi + \cos^2\phi)} = \lim_{r\to 0} |\cos^2\phi\sin\phi|$$

Ennek a határértéknek kellene nullának lennie, de amint láthatjuk nem is létezik, hiszen értéke függ ϕ-től, tehát a függvény valóban nem deriválható az origóban.

(b) Elsőrendű parciális deriváltjai léteznek az origóban, de nem folytonosak az origóban. Erre egy példa az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Láthatjuk, hogy a függvényérték az origóban nulla, tehát akkor lesz folytonos az origóban ha az ottani határértéke létezik és az nulla.
Közeledjünk, az origóhoz az $y = ax$ egyenes mentén. (itt $a \in R$). Ekkor a függvényérték az egyenes pontjaiban:

$$f(x,ax) = \frac{2a}{1+a^2}$$

Ez láthatóan különböző a értékekre, minden egyenesen más és más, Vagyis f-nek az origóban nincsen határértéke, tehát nem is folytonos az origóban.
Most vizsgáljuk a parciális deriváltakat az origóban. Definició szerint:

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

Ugyanígy:

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Tehát láthatjuk, hogy a parc. deriváltak léteznek az origóban.

(c) Elsőrendű parciális deriváltjai léteznek az origóban, de nincs határértéke az origóban. Az előző b pontban megadott függvényre ez is teljesül.

(d) Csak az origóban differenciálható. Ilyen függvény például:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{ha } x^2+y^2 \in Q \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 \in R\backslash Q \end{cases}$$

14. Feladat:

A feladat az, hogy az:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

függvényre belássuk, hogy:

$$\partial_1^2 u(x,y,z) + \partial_2^2 u(x,y,z) + \partial_3^2 u(x,y,z) = 0$$

Legyen a 3D-s helyvektor, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, ekkor az $u = 1/|\mathbf{r}| = 1/r$

$$\triangle \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$$

Tehát azt kell belátnunk, hogy:

$$\triangle \frac{1}{r} = 0$$

Ezt indexes deriválással könnyen bizonyíthatjuk. Tehát indexesen a fenti kifejezés (Végig automatikus szumma van, az einstein konvenció szerint):

$$\partial_i \partial_i \frac{1}{r} = \partial_i \left(-\frac{1}{r^2} \partial_i r \right)$$

először $\partial_i r$-t kell meghatároznunk, legyen x_l az r helyvektor l-edik komponense:

$$\partial_i r = \partial_i \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} \partial_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2r} \partial_i (x_l \cdot x_l) = \frac{x_l}{r} \partial_i x_l$$

Na de mivel, x_l az r helyvektor l-edik komponense, ezért nyílván: $\partial_i x_l = \delta_{il}$ Ahol δ_{il} a kroenecker delta. Vagyis az eredeti kifejezés:

$$\partial_i r = \frac{x_l}{r} \delta_{il} = \frac{x_i}{r} = e^i$$

Ahol e^i az i-edik egységvektor. Tehát, visszatérve:

$$\partial_i \partial_i \frac{1}{r} = \partial_i \left(-\frac{1}{r^2} \partial_i r \right) = \partial_i \left(-\frac{1}{r^2} e^i \right) = \partial_i \left(-\frac{x_i}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \partial_i x_i + x_i \left(\frac{3}{r^4} \partial_i r \right) =$$

$$= -\frac{3}{r^3} + x_i \left(\frac{3}{r^4} e^i \right) = -\frac{3}{r^3} + x_i \left(\frac{3}{r^4} \frac{x_i}{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} \underbrace{\frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r}}_{1} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

Tehát beláttuk, a feladat állítását.

15. Feladat: Azt kell belátni, hogy egy $f : [0, 1] \to R$ Riemann integrálható függvényre:

$$\left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 f^2$$

Ezt a Cauchy-Shwarz egyenlőtlenségnek az integrálokra érvényes formájában érdemes belátni. A Cauchy-Shwarz alapján:

$$\left(\int_0^1 1 \cdot f \right)^2 \leq \int_0^1 1^2 \cdot \int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^2$$

Ezzel beláttuk az egyenlőtlenséget.

16. Feladat: A következő függvénysorozat eleget tesz a feladat feltételének. Legyen $f_n : [0, 1] \to R$, és $f_n(x) = x^n$. A $[0, 1]$ intervallumban erre láthatóan teljesül, hogy $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, ugyanis $x^n - x^{n+1} = x^n(1 - x) \geq 0$, hiszen $x \in [0, 1]$. Most már csak azt kell belátnunk, hogy ez a függvénysorozat nem konvergál egyenletesen.
Mivel ha $0 \leq x < 1$ akkor $x^n \to 0$, és ha $x = 1$ akkor $x^n = 1$, ezért a függvénysorozat $[0, 1]$-en a pontonként konvergál az $f(x)$ függvényhez:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

De viszont nem egyenletesen konvergens, hiszen ha $0 < x < 1$ akkor $|f_n(x) - f(x)| = x^n$. Láthatjuk, hogy ez nullához tart, de nem tudunk x-től függetlenül korlátot adni n-re, hogy egy bizonyos N-re ha $n > N$ akkor $x^n < \varepsilon$.
Azért mivel, ahhoz, hogy $x^n < \varepsilon$ teljesüljön, $n \ln x < \ln \varepsilon$ kell legyen. Azaz mivel itt most $\ln x < 0$ ezért innen, $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$.
Láthatóan ez a korlát függ mind x-től, mind ε-tól, tehát a függvénysorozat nem lesz egyenletesen konvergens.

17. Feladat: Ezt a feladatot az egyik gyakorlaton adtad fel, hogy beadható.
A következő integrált kell kiszámítani:

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx = ?$$

Ahol $a, b > 0$. Tekintsük az integrált úgy mint, a-nak és b-nek a kétváltozós függvénye:

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx$$

Most deriváljuk, parciálisan először a szerint:

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = \int_0^1 \frac{x^a \cdot \ln x}{\ln x}\, dx = \int_0^1 x^a\, dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$$

Most deriváljuk parciálisan b szerint, ez nyílván tök hasonló mint az előző, így nem írom ki végig, csak a végeredményt:

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial b} = -\int_0^1 x^b\, dx = -\frac{1}{b+1}$$

Tehát amint látszik megkaptuk az $I(a,b)$ kétváltozós függvény gradiensét. Most már innen megtudjuk határozni magát a függvényt:

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = \frac{1}{a+1} \Longrightarrow I(a,b) = \int \frac{1}{a+1} da = \ln(a+1) + f(b)$$

Ahol $f(b)$ b-nek valamilyen függvénye. Na de ismerjük a másik parc. deriváltat is:

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial b} = -\frac{1}{b+1} = \frac{df(b)}{db} \Longrightarrow f(b) = -\ln(b+1) + C$$

AHol C konstans.
Tehát az $I(a,b)$ függvény:

$$I(a,b) = \ln(a+1) - \ln(b+1) + C$$

Most már csak a C konstanst kell meghatároznunk. Ezt az eredeti integrál alapján megtudjuk tenni, hiszen látható, hogy $I(0,0) = 0$, azaz $C = 0$.
Vagyis az integrál:

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx = \ln(a+1) - \ln(b+1) = \ln \frac{a+1}{b+1}$$