Readme

Balog Dániel

2010. június 2.

A jegyzet Dr. Simon Péter: Kalkulus II *(mf1n1a02)* órái alapján készült a 2009/2010 tanév második félévében.

A jegyzet letölthető a honlapomról: http://balogdani.web.elte.hu/Kalkulus II/.
A jegyzet kinyomtatható, nyomtatott formában, illetve e-mailben/IM programokkal ezen readme csatolásával szabadon terjeszthető.
Más tárhelyen való elhelyezéshez e-mailben kell értesíteni! Címem: skippersd@gmail.com
A jegyzet nem módosítható. Amennyiben hibát találsz benne, kérlek értesíts a fenti címen.

Külön köszönet:

Dr. Simon Péternek, amiért a jegyzetet szabadidejében átnézte, valamint
Küszter Melindának a 2010.03.30-as jegyzet begépeléséért.

utóirat:

A jegyzet teljesen ingyen használható, de a köszisöröket szivesen fogadom ☺

Kalkulus II

Balog Dániel

2010.02.09

1. Integrálás:

1.1. Racionális törtfüggvények:

"$\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$" Ezeket mindig lehet integrálni, az ilyen primitív függvénye meghatározható.

Ellenpélda $\int e^{-x^2}$ Ez szimpatikusan néz ki, mégsem lehet kiszámolni!

1. $\int \frac{1}{ax+b}$ **pl.:**

$$\int \frac{1}{x} = \ln(x) + c$$
$$\int \frac{1}{x+3} = \ln|x+3| + c$$
$$\int \frac{1}{2x-8} = \frac{1}{2} \cdot \ln(2x-8) + c$$

2. $\int \frac{cx+d}{ax+b}$ **pl.:**

$$\int \frac{x+2}{x+1} = \int \frac{x+1+1}{x+1} =$$
$$\int \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} dx = x + \ln(x+1) + c$$
$$\int \frac{3x+1}{2x+3} =^{[1]} \int \frac{(2x+3) \cdot \frac{3}{2} - \frac{7}{2}}{2x+3} =$$
$$\int \frac{3}{2} - \frac{\frac{7}{2}}{2x+3} dx = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln(2x+3) + c$$

3. $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ **pl.:**

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}^{[2]} = \int \frac{3}{(x-(-2)) \cdot (x-1)} =$$
$$\int \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-1} dx^{[3]} = -\ln(x+2) + \ln(x-1) + c = \ln \frac{x-1}{x+2} + c$$

4. $\int \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}$ **pl.:**

$$\int \frac{3+x}{2+3x-2x^2} =^{[4]} \int \frac{3+x}{(2-x)(2x+1)} = \int \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2x+1}\, dx$$

Trükk: a kibontottat beszorzom -2-vel $-2(x-2)(x+\frac{1}{2})$ így ki is jön. A szétbontás kódneve:parciális törtekre bontás.

$$A(2x+1) + B(2-x) = 3 + x(2A-B)x + A + 2B = 3 + x$$
$$2A - B = 1 \quad A + 2B = 3$$
$$A = 1 \quad B = 1$$
$$= \int \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2x+1} = -\ln(2-x) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) + c$$

5. $\int \frac{1}{(x-a)^2}$ **pl.:**

$$\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$$

6. $\int \frac{cx+d}{(x-a)^2}$ **pl.:**

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2} = \int \frac{(x-1) \cdot 2 + 5}{(x-1)^2} =$$
$$\int \frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} dx = 2\ln(x-1) - \frac{5}{x-1} + c$$

7. $\int \frac{1}{(x-c)^2+d}$ **pl.:**

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + c$$
$$\int \frac{1}{x^2+4} = \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \operatorname{arctg}(\frac{x}{2})$$
$$\int \frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{3}})$$
$$\int \frac{1}{x^2-2x+2} = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x-1)$$

A megoldás menete: A valós gyököket kell ellenőrizni. Ha van 2 darab valós gyök, lásd 4. példa, ha 1 db van ld. 5. ha nincs ld. 7.

8. $\int \frac{ax+b}{(x-c)^2+d^2}$ **pl.:**

$$\int \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{Felismerhető, hogy ez } \frac{f'}{f} \text{ tipusú!}$$
$$\int \frac{2x+3}{1+x^2} = \int \frac{2x}{1+x^2} + \frac{3}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + 3\operatorname{arctg}(x) + c$$
$$\int \frac{x+3}{1+x^2} = \int \frac{2x \cdot \frac{1}{2} + 3}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 3\operatorname{arctg}(x)$$

[1] a $\frac{3}{2}$ azért kell, hogy a 3x stimmeljen, a $\frac{7}{2}$ hogy az 1 stimmeljen

[2] $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = -2 \;\; x_2 = 1$

[3] (közös nevezőre hozás)

[4] $2 + 3x - 2x^2 = 0 \;\; x_1 = 2 \;\; x_2 = \frac{1}{2}$

1.2. Gyökös függvények integrálása

$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}$
Más fokúra nincs általános képlet!

1. $a < 0$ **pl.:**

$$\int \sqrt{1-x^2} = {}^{5} \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos dt^{6} = \int \cos^2(t)dt$$

Két lehetséges megoldási út:

- $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
- $\cos^2(t) = \cos(t) \cdot \sin'(t)$

$$\int \cos^2(t) = \int \cos(t)\cdot\sin'(t) = \cos(t)\cdot\sin(t) - \int -\sin(t)\cdot\sin(t)$$

$$= \cos(t)\cdot\sin(t) + \int \sin^2(t) = \cos(t)\cdot\sin(t) + \int 1 - \cos^2(t) =$$

$$\cos(t)\cdot\sin(t) + t - \int \cos^2(t)dt$$

Összevonva:

$$2\int \cos^2(t) = \cos(t)\cdot\sin(t) + t$$

Ezt a legelejére visszahelyettesítve:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2(t)dt = \frac{\cos(t)\cdot\sin(t)+t}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot x + \frac{1}{2}\arcsin(x)$$

Summázva:

$$\int \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$$

pl.:

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\int \sqrt{1-(\frac{x}{2})^2} = {}^{7}$$

$$2\int \sqrt{1-t^2}2dt = x\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2} + 2\arcsin\sqrt{x}2$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} = \int \sqrt{4-(x+1)^2} =$$

$$2\int \sqrt{1-(\frac{x+1}{2})^2}t = \frac{x+1}{2}2dt = dx$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} = \int \sqrt{4-(x+1)^2} =$$

$$2\int \sqrt{1-(\frac{x+1}{2})^2}t = \frac{x+1}{2}{}^{8}$$

$$4\int \sqrt{1-t^2}dt =$$

2. $a > 0, \exists$ valós gyök: **pl.:**

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{ch}^2 - 1 = sh^2 = \int \mathrm{sh}(t)\cdot\mathrm{sh}(t)dt = \int \mathrm{sh}(t)\cdot\mathrm{ch}'(t)$$

3. $a > 0 \nexists$ valós gyök **pl.:**

$$\int \sqrt{x^2+1} = \int \mathrm{ch}(t)\cdot\mathrm{ch}(t)dt$$

---
[5] $(x = sin(t)$már volt!)
[6] $(\frac{dx}{dt} = cos(t))$
[7] $x = 2t$
[8] $2dt = dx$

Kalkulus II

Balog Dániel

2010.02.16

Inpropius integrál

Motiváló példák:

1. $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} dx$

   A rendes Riemann-integrál miért nem használható?
   Azért, mert a Riemann-integrál korlátos függvényekre van értelmezve, az $\frac{1}{x}$ pedig nem korlátos a $(0,1)$ intervallumban.
   A kiszámítási módszer *(Newton-Liebnitz)* sem működik.

   $$\int\limits_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0$$

   Itt baj van, ugyanis $\ln 0 = -\infty$, így az eredmény végtelen.
   Jelenleg ez megoldhatatlan.

2. $\int\limits_0^\infty e^{-x} dx$

   Az a baj, hogy az integrált eddig csak korlátos intervallumon értelmeztük

   $$\int\limits_0^\infty e^{-x} dx = \left[e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-\infty} - \left(-e^{-0}\right) = 0 - (-1) = 1$$

   Ez se stimmel.

Cél:

$$\text{Definiáljunk integrált nem korlátos} \begin{cases} \text{intervallumra} & (1) \\ \text{függvényre} & (2) \end{cases}$$

I.

Korlátos függvény integrálja nem korlátos intervallumon.
Def.: Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy Riemann-integrálható $[a, b]$-n, $\forall b > a$-ra.
Az f függvénynek $\exists$ az $[a, \infty)$ intervallumon inpropius integrálja , ha ű

$$\exists \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x) dx$$

Ennek jele:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$$

Hasonlóan:

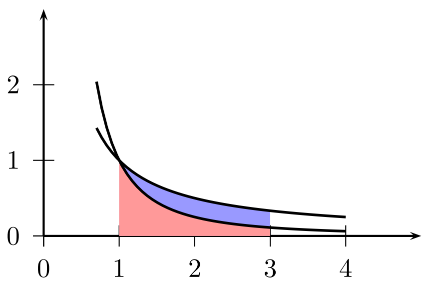
$$\int\limits_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x) dx$$

Példák:

- $$\int\limits_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e{-}x\right]_0^b =$$
  $$= \lim_{b\to\infty} \left(-e{-}b - (-e^{-0})\right) = 0 - (-1) = 1$$

- $$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b =$$
  $$= \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty$$

- $$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b =$$
  $$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = 1$$



Érdekes hogy a pirossal jelölt terület (x^2) véges, a kékkel jelölt (x) végtelen

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ Milyen α értékre véges?
$\alpha \neq 1$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

Ha $\alpha > 1$ $\quad 0 - \frac{1}{\alpha-1}$
Ha $\alpha < 1$ $\quad \infty$

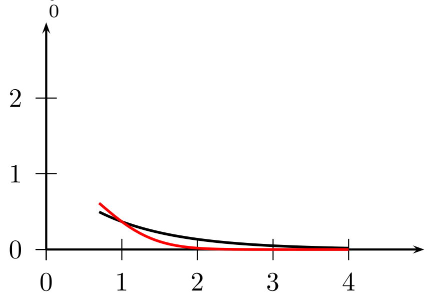
Def.: Az $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ inpropinus integrált konvergensnek nevezzük, ha véges. Ha divergens, akkor vagy végtelen, vagy nincs limes.
pl:

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$	konvergens	$\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$	konvergens	$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$	konvergens
$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx$	divergens	$\int\limits_0^\infty e^{x}dx$	divergens	$\int\limits_{0.3}^\infty \frac{1}{x}dx$	divergens
$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	divergens	$\int\limits_0^\infty \sin x dx$	divergens	$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x}dx$	divergens

Tanulság: Az alsó határ a konvergens-divergens kérésben nem számít.

nehéz kérdések:

- $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$



Látható, hogy e^{-x} alatt van, ha $x > 1$
Tudjuk, hogy :

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}dx \quad \text{konvergens}$$
$$\Downarrow$$
$$\int\limits_1^\infty e^{-x}dx \quad \text{konvergens}$$
$$\Downarrow$$
$$\int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx \quad \text{konvergens}$$
$$\Downarrow$$
$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx \quad \text{konvergens}$$

- $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = ?$

$$= \lim_{0\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{0\to\infty}[?]_0^b$$

Képlettel nem adható meg a primitív függvény.
Kiderül: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx, dy = \pi^2\right)^{[1]}$$

- $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$
- $\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin x dx$
- $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)dx$
A gyökök $\sqrt{k\cdot\pi}$ egyre sűrűbben jönnek, ezért konvergens lesz.

II

Intervallum korlátos, de a függvény nem korlátos.
pl.:
$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$
Def.:
Legyen $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy az $f : [a,c]$ intervallumon Riemann-integrálható $\forall c \in (a,b)$-re
f inpropius integrálható $[a,b)$-n, ha $\lim\limits_{c\to b}\int\limits_a^c f(x)dx$ $\exists$ ekkor

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b}\int\limits_a^c f(x)dx$$

Ha az a-nál van baj, akkor

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a}\int\limits_c^b f(x)dx$$

$\int\limits_c^b f(x)dx$ inpropius integrál konvergens, ha $\exists$ $\lim$ és véges.
pl.:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\int\limits_c^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}[\ln x]_c^1 =$$
$$\lim_{c\to 0^+}(\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln c) = +\infty$$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0^+}\int\limits_c^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{c\to 0^+}[]_0^1 = \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1-\sqrt{0}}{\frac{1}{2}}\right) = 2$$

[1] polárkoordináta

Kalkulus II

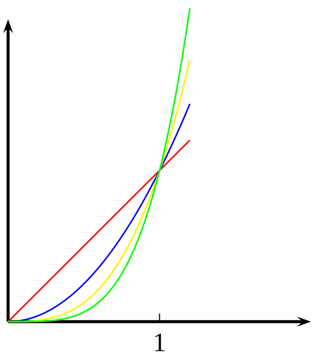
Balog Dániel

2010.02.23

1. Függvénysorozatok és függvénysorok:

1.1. Függvénysorozat fogalma:

pl.: $f_n(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$



Ez egy függvénysorozat

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	konvergencia
$f_n\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	konvergens
$f_n(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^4}$	konvergens
$f_n(1)$	1	1	1	1	divergens
$f_n(2)$	2	2^2	2^3	2^4	divergens
$f_n(-2)$	-2	-2^2	-2^3	-2^4	nem tart sehova

Ha x-et fixáljuk, akkor egy számsorozatot kapunk.
Hol lesz konvergens, hol lesz divergens?
Ha $x \in (-1, 1\ ]$ akkor $f_n(x)$ konvergens $\exists \lim$ és véges.

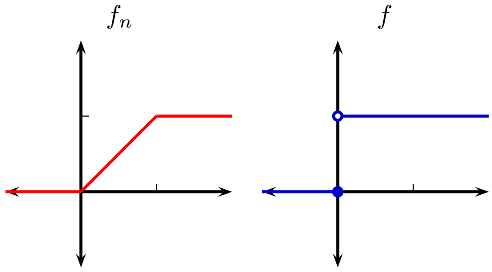
Def.: Legyenek $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. $n = 1, 2, \ldots$ Ezt függvénysorozatnak nevezzük.

Def.: Legyen $f_n \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvénysorozat. Ennek konvergenciahalmaza $KH(fh) = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x)\text{számsorozat konvergens}\}$
pl.:

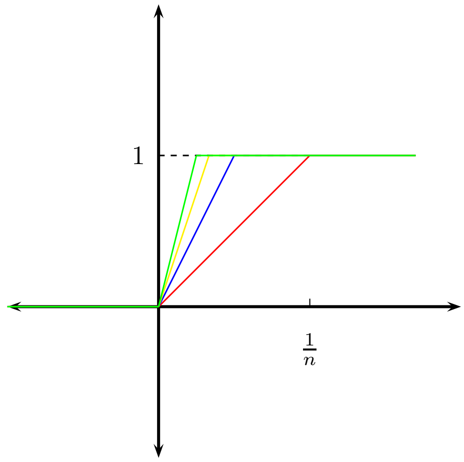
$$f_n(x) = x^n \Rightarrow KH(f_n) = (-1, 1]$$

Def.: Az f_n függvénysorozat, az f függvényhez tart pontonként, ha $\lim\limits_{n\to\infty} = f(x) \forall x \in KH(f_n)$

Kérdés? örökli-e az f(limes-/határfüggvény) az f_n tulajdonságait?
Folytonosság, derivált, integrál?



Válasz: Általában nem igaz, de néha igen. Mikor?
Folytonosság bukott, integrál:

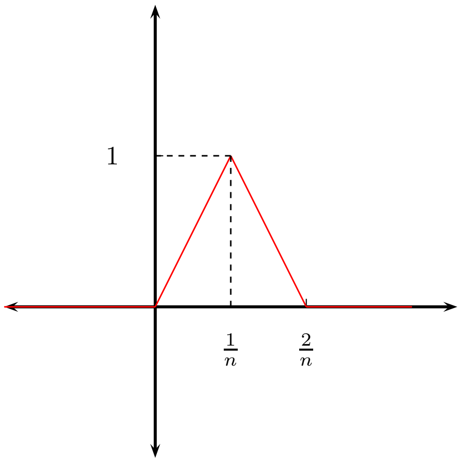


$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 - \frac{1}{2n}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

Tehát:

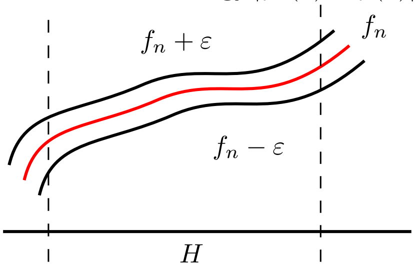
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 - \frac{1}{2n} = \int_0^1 f(x)dx = 1$$



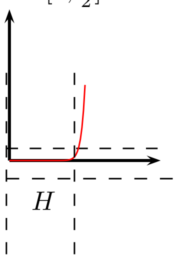
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2}{n} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \forall n$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Def.: az f_n függvénysorozat egyenletesen tart az f függvényhez egy H halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N \forall x \in H$
x fix. $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{R}$ hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N$



AZ egyenletes konvergenciánál N nem függ x-től, míg a pontnál magát x-et választom, és hozzá egy küszöbindexet
pl.:
$f_n(x) = x^n$
$f_n(x) = x^n$ függvénysorozat egyenletesen tart az $f(x) = 0$ függvényhez a $H[0, \frac{1}{2}]$ halmazon



H=[0,1] már nem
$H = [\,0, 1\,)$ nem egyenletesen tart f-hez!

de $H = [\,0, q\,)$ igen ha $q < 1$

Minden f_n kilóg az ε csőből.

Tétel: Legyenek f_n-ek folytonos függvények, és a H-n egyenletesen konvergálnak az f hez, akkor az f is folytonos a H-n.

Tétel: Legyenek f_n-ek Riemann integrálhatók egy $[a, b]$-n és egyenletesen konvergálnak az $[a, b]$ intervallumon az f-hez, akkor az f is Riemann integrálható, és

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Másképp:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx$$

$\lim$ és $\int$ felcserélehtő, ha egyenletes a konvergencia.

2. Függvénysorok:

Mi a $\begin{array}{cc} \text{sor} & \text{sorozat} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \sum a_n & a_n \end{array}$
Ugyanez a függvénysornál is:

Def.: Legyen f_n egy függvénysorozat. Az ezekből képezett függvénysor:
$\sum f_n$ az

$$S_n = f_1 + f_2 + f_n$$

függvénysorozat.

Def.: a $\sum f_n$ függvénysor konvergenciahalmaza:

$$KH(\sum f_n) = \{x \in \mathbb{R} \sum f_n(x) \text{konvergens számsor.}\}$$

$\sum f_n$ sor összegfüggvénye:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

pl.: $f_n(x) = x^n$

$$s_1(x) = x^1, s_2(x) = x^1 + x^2 \dots$$

$\sum f_n(x)$ milyen x-re konvergens?

$$KH(\sum f_n) = (-1, 1)$$

$\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens a H halmazon, ha $S_n = f_1 + f_2 + f_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a H halmazon.
Fontos speciális függvénysor:
hatványsor:
Legyen C_n egy számsorozat, és legyen $a \in \mathbb{R}$ egy szám.

$$\sum c_n \cdot (x - a)^n$$

függvénysort a közepű hatványsornak nevezik.

$$\sum x^n \quad C_n = 1 \;\; a = 0$$

<u>pl.:</u> $\sum \frac{x^n}{n}$ $KH = ?$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

ez konvergens, mert $< \frac{1}{2^n}$ Tehát $(-1, 1)$ benne van a KH-ban-

$$x = 2 \sum \frac{2^n}{n}$$

ez erősen divergens: $x = 1$
$\sum \frac{1}{n}$ divergens
$x = -1$
$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ez konvergens

Kalkulus II

Balog Dániel

2010.03.02

1. Hatványsorok és Taylor sorok:

Def.: Hatványsor: ilyen függvénysor $\sum c_n \cdot (x-a)^n$
c_n adott számsorozat *(együtthatók)*
$a \in \mathbb{R}$ adott hatványsor közepe
pl.:

$$\begin{array}{ccc} \sum x^n & c_n = 1 & a = 0 \\ \sum n \cdot x^n & c_n = n & a = 0 \\ \sum \frac{x^n}{n!} & c_n = \frac{1}{n!} & a = 0 \end{array}$$

Alapkérdés:
Konvergenciahalmaz (KH) milyen x-re konvergens?

pl.:

$\sum x^n$
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ konvergens
$x = 2 \rightarrow$ divergens

Általában milyen x-re konvergens?
Használjuk a gyökkritériumot.

$$\sum a_n \text{sor} \begin{cases} \text{konvergens, ha} & \lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \\ \text{divergens, ha} & \lim \sqrt[n]{a_n} > 1 \end{cases}$$

$$\sum x^n \text{példáján: } a_n = x^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |x|$$

Ha negatívok is vannak akkor megnézzük az abszolultértékes sort.

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \begin{cases} \text{konvergens, ha} & |x| < 1 \\ \text{divergens, ha} & |x| \geq 1 \end{cases}$$

pl.:

$\sum n \cdot x^n$ milyen x-re konvergens?

$$a_n = n \cdot x^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}|x|$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot n|x|$$

Nehéz, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Gyökkritérium azt mondja meg, hogy

$$\text{ha} \begin{cases} |x| < 1 & \text{akkor} \sum n \cdot x^n \text{konvergens} \\ |x| \geq 1 & \text{akkor} \sum n \cdot x^n \text{divergens} \end{cases}$$

Általános eset:

$\sum c_n \cdot (x-a)^n$ milyen x-re konvergens?

$$a_n = \sum c_n \cdot (x-a)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{c_n} \cdot |x-a|$$

Kell ennek a sorozatnak a limese.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \cdot |x-a| < 1$$

hogy konvergens legyen

$$|x-a| < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{c_n}}$$

Def.:

$\sum c_n \cdot (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{c_n}}$$

(ha a $\lim = 0, \Rightarrow R = \infty$)

$$|x-a| < R \Longleftrightarrow x \in \underbrace{(a-R, a+R)}_{\text{ennek } a \text{ a közepe}}$$

Hogyha az x a-tól legfeljebb R távolságra van akkor konvergens.

Ezt fogalmazza meg a tétel:

(Cauchy-Hadamard) Tétel:

A $\sum c_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciahalmazára fennál:

$$(a-R, a+R) \subset KH \subset [a-R, a+R]$$

ahol

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{c_n}}$$

Azért sugár, mert ez komplex számmokkal is szépen működik.
Bizonyítás fennt.

Megj.: Az intervallum végpontjai benne lehetnek KH-ban, de ez c_n-től függ. *(a tétel arról nem szól, ha x pont a határon van)*

pl.:

$$\sum x^n \quad c_n = 1 \;\; a = 0$$
$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{1}} = 1$$
$$(-1,1) \subset KH \subset [-1,1]$$

végpontok:
$(-1)^n$ (nem tart sehova)
1^n divergens (∞-hez tart.)

$$KH = (-1,1)$$

$$\sum \frac{x^n}{n^2} \quad c_n = \frac{1}{n^2} \;\; a = 0$$
$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = 1$$

segítség:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim \frac{\sqrt[n]{1}}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$
$$(-1,1) \subset KH \subset [-1,1]$$

végpontok:

$$x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} \text{konvergens}$$
$$x = -1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \text{konvergens}$$
$$KH = [-1,1]$$

$$\sum \frac{x^n}{n} \quad c_n = \frac{1}{n} \;\; a = 0$$
$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$
$$(-1,1) \subset KH \subset [-1,1]$$

végpontok:

$$x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{divergens}$$
$$x = 1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{konvergens}$$
$$KH = [\,-1,1\,)$$

Def.:

Legyen $\sum c_n(x-a)^n$ egy hatványsor. A hatványsor függvénye:

$$f(x) = \sum_0^\infty c_n(x-a)^n x \in KH$$

pl.:

$\sum x^n f(x) =?$

$$x \in (-1,1)$$
$$\sum_0^N x^n = 1 + x + x^2 + \dots x^N = {}^{1}1 \cdot \frac{x^{N+1}-1}{x-1}$$
$$\sum_{n=0}^\infty x^n = \lim_{N\to\infty} (\sum_0^N x^n) = \lim_{N\to\infty} 1 \cdot \frac{x^{N+1}-1}{x-1}{}^{2} = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

Ötlet:$\sum nx^n$ összegére:

$$\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

Deriváljuk! Később megnézzük hogy szabad-e…

$$\sum_{n=0}^\infty nx^{n-1} = \frac{--1}{1-x}^2 \Big/ \cdot x$$
$$\sum_{n=0}^\infty nx^n = \frac{1}{1-x}^n$$

pl.:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$$

Ez hagyományos módszerrel esélytelen…

$$\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 2$$

Igaz-e hogy:$(\sum fn)' = \sum fn'$?
Ez nem mindig igaz! Kulcsszó: egyenletes konvergencia

Tétel:

Legyen $\sum c_n(x-a)^n$ egy hatványsor
Legyen az összegfüggvény

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n(x-a)^n, x \in KH$$

Ekkor f akárhányszor deriválható, és tagonként lehet a sort deriválni, azaz

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n n(x-a)^{n-1}(\cdot 1)$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^\infty c_n n(n-1)(x-a)^{n-2}{}^{3}$$

[1] mértani sorozat
[2] x^{N+1} 0-hoz tart, kicsi a sokadikon
[3] 1-től illetve 2-től, hiszen az 1 ill. 2 tag 0 lesz.

2. Az összegfüggvény és az együtthatók kapcsolata:

Legyen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

$$f(a) = c_0$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots$$

$$f'(a) = c_1$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 4\cdot 3(x-a)^2 + \dots$$

$$f''(a) = 2c_2$$

$$f'''(a) = 6c_3$$

Rájövünk, hogy:

$$1c_0 = 0!c_0 6c_3 = 3!c_3$$

Tétel:

Legyen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \Rightarrow f^{(n)}(a) = c_n \cdot n!$$

2.1. Taylor sor:

Eddig adott volt:

$$c_n \text{ és } (a), \Rightarrow \sum c_n(x-a)^n$$

Ebből legyen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Érdekes: az $f^{(n)}(a)$ visszaadja a c_n-t
Most legyen adott:

$$f_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

,

$$a \in \mathbb{R}$$

akárhányszor deriválható.
Legyen most

$$c_n = \frac{f^{(n)}a}{n!} \forall n$$

Nézzük

$$f(x) = \sum c_n(x-a)^n$$

hatványsort
Def.:

Az f függvény a középű Taylor sora:

$$\sum \frac{f^{(n)}a}{n!}(x-a)^n$$

Kérdés: $KH =$? valamint összegfüggvény
(de ezt nem illik f-el jelölni!)

Jó lenne, ha az összegfüggvény egyenlő lenne f-el.
pl.:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \text{ legyen } a = 0$$

$$\begin{array}{cc} f^{(n)} & f^{(n)}(a) \\ f(x) = (1-x)^{-1} & c_0 = 1 \\ f'(x) = -1(1-x)^{-2} - 1 & c_1 = 1 \\ f''(x) - 2(1-x)^{-3} - 1 & c_2 = 2 \\ f'''(x) - 6(1-x)^{-4} - 1 & c_3 = 6 \end{array}$$

$$f^{(n)}(a) = n!$$

$$c_n = 1$$

A kapott hatványsor: $\sum x^n$
Ismert:
$KH = (-1, 1)$ összegfüggvény: $\frac{1}{1-x}$
Visszakaptuk az f-et, de csak $(-1, 1)$-re! Az f értelmezve volt $\mathbb{R}/1$-re, az összegfüggvény $(-1, 1)$-en és ott $=f$

2.2. Fontos Taylor sorok:

$$\begin{array}{cc} f^{(n)} & f^{(n)}(a) \\ f(x) = e^x & c_0 = 1 \\ f'(x) = e^x & c_1 = 1 \\ f''(x) = e^x & c_2 = \frac{1}{2} \\ f'''(x) = e^x & c_3 = \frac{1}{6} \end{array}$$

Általánosan:

$$c_n = \frac{1}{n!}$$

e^x Taylor sora $\sum \frac{x^n}{n!}$
KH, összegfüggvény?

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \infty$$

Segítség:

$$\sqrt[n]{n!} = \infty$$

Magyarul: akármit írok be, konvergens lesz.

Hányadoskritériummal kijön a KH
$KH = \mathbb{R}$ *(0 középű jobbra-balra végtelen intervallum)*

$$\sum \frac{x^n}{n!} \ \forall x\text{-re konvergens}$$

Mi az összegfüggvény?
Taylor polinom, Lagrange maradéktaggal. **Tétel:**
$\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_0^{\infty} \sum \frac{x^n}{n!} = e^x$$

biz: Lagrange maradéktag.
<u>Tétel:</u>

$$\begin{array}{cc} f^{(n)} & f^{(n)}(a) \\ f(x)=\sin(x) & c_0=0 \\ f'(x)=\cos(x) & c_1=1 \\ f''(x)=-\sin(x) & c_2=0 \\ f'''(x)=-\cos(x) & c_3=-1 \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{array}{cc} f^{(n)} & f^{(n)}(a) \\ f(x)=\cos(x) & c_0=1 \\ f'(x)=-\sin(x) & c_1=0 \\ f''(x)=-\cos(x) & c_2=-1 \\ f'''(x)=\sin(x) & c_3=0 \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Taylor sor=∞ fokú Taylor polinom

Kalkulus II

Balog Dániel

2010.03.09

Trigonometrikus és Fourier sorok:

A hatványsor és Taylor sor ismétlése:

1. A hatványsor fogalma: $\sum C_n(x-a)^n$
2. Konvergenciahalmaz: $(a-R, a+R)$ intervallum CH képlet
3. Összegfüggvény és együtthatók kapcsolata
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n \quad C_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$
4. f Taylor sora:
$$\sum \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$
5. példák: $e^x, \sin(x), \cos(x) \quad \forall x$-re egyenlő

Trigonometrikus sor:

1. Trigonometrikus sor definíciója:
$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$
2. A konvergenciahalmaza nehéz, úgyhogy itt nem tárgyaljuk
3. Legyen:
$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) = f(x)$$
valamilyen x-ekre ahol ez konvergens
    - Hogyan szedjük ki a_m-t és b_n-t?
4. Előkészület:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(kx)$$
és hasonlók kiszámítása:
    - $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) = 0 \forall\ k\text{-ra}$$
    $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) = \begin{cases} 2\pi, & \text{ha } k = 0 \\ 0, & \text{ha } k \neq 0 \end{cases}$$
    - $$\begin{array}{rr} & \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ + & \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline & \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right) \end{array}$$
    $$\begin{array}{rr} & \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ - & \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline & -\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \end{array}$$
    $$\begin{array}{rr} & \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ + & \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline & \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right) \end{array}$$
    - $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\underbrace{nx}_{\alpha}) \cdot \sin(\underbrace{kx}_{\beta}) =$$
    $$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin\left[(k+n)x\right] + \cos\left[(k-n)x\right]\right) dx =$$
    $$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-\cos(k+n)x}{n+k} + \frac{-\cos(k-n)x}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$
    Mert a $\cos$ függvény periodikus 2π-n ként.
    $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\underbrace{nx}_{\alpha}) \cos(\underbrace{kx}_{\beta}) =$$
    $$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\left[(k+n)x\right] + \cos\left[(k-n)x\right]\right) dx =$$
    $$= \begin{cases} 2\pi, & \text{ha } n = k = 0 \\ \pi, & \text{ha } n = k \neq 0 \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases}$$
    $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx) = \begin{cases} \pi, & \text{ha } n = k \neq 0 \\ 0, & \text{midnen más esetben} \end{cases}$$

- $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big/ \cdot \sin(kx); \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(kx)dx}_{=0} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)dx +$$

$$b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx \Bigg] =$$

A kérdés az egyenletes konvergencia.

$$= b_k \cdot \pi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \pi a_k$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)dx$$

$k \in \mathbb{N}$

TÉTEL:

Most nem írjuk le, de meg lehet fogalmazni.
Most az f adott.

<u>Def.:</u> Legyen f 2π szerint periodikus függvény (vagy adott $(-\pi\pi)$-n és legyen $a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)dx$ és $= b_k \cdot \pi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$
Az f függvény $(-\pi\pi)$ intervallumhoz tartozó Fourier-sora:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

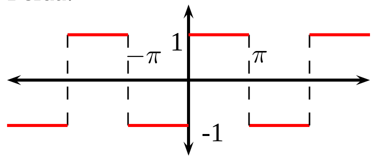
<u>Def.:</u> Az f függvény Fouriet-sora sorba fejthető $(-\pi\pi)$-n, ha a Fouriet sora ott konvergens, és előállítj f-et, azaz:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$\forall x \in (-\pi\pi)$

<u>*Megj.:*</u>Itt sok matematikai tétel van.

5. Példa:



$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx =$$

$$\frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx =$$

$$\frac{-1}{\pi} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{0}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{k\pi} [\cos(k \cdot 0) - \cos(k \cdot \pi)] - \frac{1}{k\pi} [\cos(k \cdot \pi) - \cos(k \cdot 0)] =$$

$$\frac{1}{k\pi} \left(1 - (1)^k\right) - \frac{1}{k\pi} \left((1)^k - 1\right) =$$

$$\frac{2\pi}{k} - \frac{2\pi}{k}(1)^k = \begin{cases} 0, & \text{ha "k" páros} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{ha "k" páratlan} \end{cases}$$

$a_k = 0 \; \forall k$
Mert f páratlan függvény.

Kalkulus II

Balog Dániel

2010.03.16

Többváltozós függvények: $\mathbb{R}^n$

Def.:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\ db}$$

$\mathbb{R}^n$ tér elemei szám n-esek *(n dimenziós vektorok)*
pl: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R} \forall i$
$\mathbb{R}^n$-ben műveletek:
$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

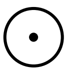
$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

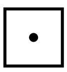
$x \in \mathbb{R}^n$ hossza:
Megjegyzés: a hosszra sokféle definíció van.

$$|x| = \sqrt{(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)} \qquad P = 2$$
$$||x|| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \qquad P = 1$$
$$||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p} \qquad P \geq 1$$

Ezek metrikát definiálnak

$P = 2$  $s = \{y \in \mathbb{R}^2 \ \ ||y||_2 = r\}$

$P = 1$  $s = \{y \in \mathbb{R}^2 \ \ ||y||_1 = r\}$

$P = \infty$  $|x| + |y| = r$

Többváltozós függvény:
Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ többváltozós függvény
pl.:

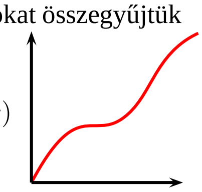
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 && n = 2 \quad k = 1 \\ f(x_1, x_2) &= (x_1 \cdot x_2; e^{x_1} \cdot \cos(x_2)) && n = 2 \quad k = 2 \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2^2; x_1 + x_3) && n = 3 \quad k = 2 \end{aligned}$$

Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \ \Rightarrow \ f_1, f_n, \ldots f_k$ koordinátafüggvényei
$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \ \ f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x))$

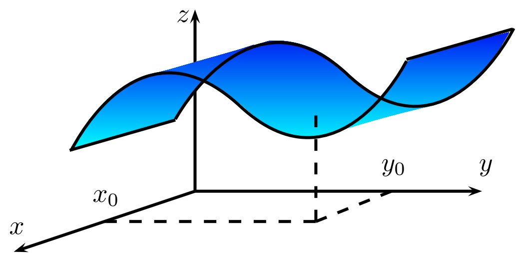
pl:
$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$

Többváltozós függvény ábrázolása:

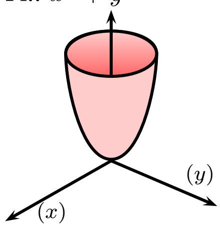
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eset
  $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$
  pontokat összegyűjtük



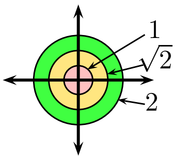
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset
  $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^3$
  a pontok egy felületet alkotnak.
  vízszintes: $\mathbb{R}^2$
  függüleges: $\mathbb{R}$



Pl.: $x^2 + y^2$

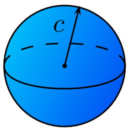


- Egyszerűsített ábrázolás:
  Szintvonalak



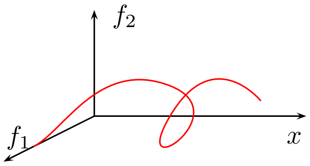
Az előző példánál is hasonló, de mások a számok.

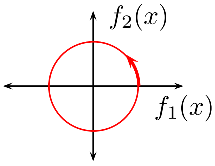
- $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eset
  $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^4$ Nehéz ábrázolni, szintvonalas csak $\mathbb{R}^3$-hez kell
  pl: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ szintfelületei.
  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = c$



- $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ itt semmi sem segít.

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
  $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^3$ pontokat gyűjtünk
  pl.: $f(x) = (\cos(x), \sin(x)) \quad x \in \mathbb{R}$





Jobbra a rendes, balra az egyszerűsített ábrázolás

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
  $(x, f(x))$ ezt már nem rajzoljuk, de az egyszerűsített rajz $\mathbb{R}^3$-ban van, és ez egy görbe a térben.
  $f(x) = (x, \cos(x), \sin(x))$ ennek az egyszerűsített rajza az előbbi csavarvonal.

- $\underbrace{\mathbb{R}^2}_{\mathbb{C}} \to \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\mathbb{C}}$ eset, ez nagyjából reménytelen.

- $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
  pl: gravitációs erőtér.
  Matematikus ezt vektormezőnek hívja.

(Nagysága $\gamma\frac{Mm}{r^2}$ iránya M felé)

$$f(x) = -x \cdot \frac{M \cdot m}{|x|^3}\gamma$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{-Mm\gamma}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} x_1$$

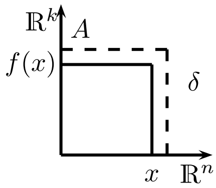
$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Határérték és folytonosság többváltozós függvényekre:

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Def.: $\lim f(x) = A$
Ez mit jelent?

Az f függvény határértéke az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban $A \in \mathbb{R}^k$, ha
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $|x - a| < \delta$, és $x \neq a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$



Def.: az f függvény folytonos az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $|x - a| < \delta$ és $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Többváltozós függvények deriválása:

Parciális derivált:

Def.: Legyen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Az f függvény első változó szerinti parciális deriváltja az $x \in \mathbb{R}^n$ pontban:

$$\partial_1 f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n)) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n))}{h}$$

Egy változó esetében volt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Az i-edik változó szerinti parciális derivált:

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)) - f(x_1, \ldots, x_n))}{h}$$

Más jelöléssel:

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Példák:

- $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = \underbrace{x_2}_{(c \cdot x)' = c}$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1$$

- $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = \underbrace{1}_{(c + x)' = 1}$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = 1$$

- $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{x_2}$

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = e^{x_2}$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{x_2}$$

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^3 + 2x_1 + x_2$

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2^3 + 2$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 3x_2^2 + 1$$

- $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_1 =$$

$$= -x_1 \cdot \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = -x_2 \cdot \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \cdot \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f) = -\frac{x}{|x|^3}$$

Ez a gradiens (grad)

Furcsa példa:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_1 \cdot x_2 = 0 \\ 1, & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

Folytonos-e a függvény $(0, 0)$-ban?
Ez nem folytonos...

$$\begin{array}{lll} \partial_1 f(0,0) = 0 & \partial_2 f(0,0) = 0 & \\ \partial_1 f(1,0) = 0 & \partial_2 f(0,1) & \\ \partial_1 f(0,1) = \nexists & \partial_2 f(1,0) = \nexists & \lim\limits_{h \to 0} \frac{1-0}{h} \end{array}$$

Ez a limes divergens, tehát nincs limese.

Kalkulus II

Balog Dániel

2010.03.23

Többváltozós függvények deriválása
Volt:
parciális derivált

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$\partial_i f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2\dots,x_i+h,\dots x_n)-f(x_1,\dots x_n)}{h}$$

Derivált vagy Jacobi mátrix:

Egy változós függvény $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Most
$$f:\mathbb{R}^h\to\mathbb{R}$$

az a baj a képlettel, hogy $h\in f:\mathbb{R}^n$-el osztani kellene
Átalakítva:

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h}{h}$$

Ha ez a határérték 0, akkor az abszolultértéke is 0!

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h|}{|h|}$$

Az abszolultértékes trükk csak akkor igaz, ha 0 a határérték, hiszen $\pm 0=0$ (de $\pm 2\neq 2$)
$f'(x)\cdot h\in\mathbb{R}$ kell, különben nem jön ki! (szám - vektor!)

$$f'(x)=(\underbrace{(\dots),(\dots),(\dots)}_{n-darab})$$

Def:
Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Ez $x\in\mathbb{R}^n$ helyen differenciálható ha $\exists A\in\mathbb{R}^{1\times n}$ sormátrix, hogy

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-A\cdot h|}{|h|}=0$$

Ekkor $f'(x)=A$ derivált/Jacobi mátrix
Honnan tudjuk az A mátrixot?
Próbáljuk meg néhány speciális h vektornál $h=(1,0,\dots,0)t \quad t\in\mathbb{R}$
$(t,0,\dots,0) \quad t\to 0$

$$x+h=(x_1t+x_2+x_3+\dots+x_n)|h|=|t|$$

$$A\cdot h=\begin{pmatrix}A_1 & \dots & A_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}=A_1t$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{|(x+h)-f(x)-A_1t|}{|t|}=$$

$$\lim_{t\to 0}\left|\underbrace{\frac{f(x+h)-f'(x)}{t}}_{\partial_1 f(x)}-A_1\right|$$

Tehát $A_1=\partial_1 f(x)$
Hasonlóan $A_2=\partial_2 f(x)$

Állítás:
Ha $f:\mathbb{R}^h\to\mathbb{R}$ differenciálható x-ben $\Rightarrow$

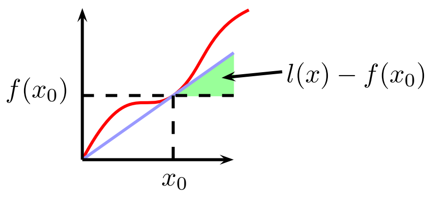
$$f'(x)=(\partial_1 f(x),\dots,\partial_n f(x))=\operatorname{grad} f(x)$$

Ez a kiszámítás módja
Bizonyítás a fenti
pl.:

$$f(x_1,x_2)=x_1\cdot e^{x_2} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$f'(x_1,x_2)=(e^{x_2},x_1e^{x_2})$$

Lineáris közelítés: Emlékeztető: $n=1$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$



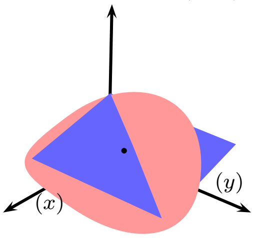
$$\frac{l(x)-l(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Másképp:
$$l(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0))$$ [1]

Ugyan ezt kellene többváltozósra?
$n=2$
$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

[1] $f(x_0=l(x_0)$

Szeretnénk egy $l(x, y)$ lineáris közelítést.



$$l(x, y) = f(x_0, y_0) + f'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

$$l(x, y) f(x_0, y_0) + (\partial_1(x_0, y_0), \partial_1(x_0, y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$l(x, y) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Ezt írjuk át síkegyenletbe:

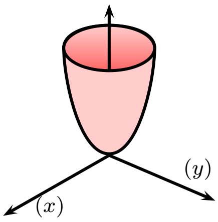
$$z = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

(tehát $l(x, y)$ helyett z)

Legyen $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$0 = \underbrace{(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1)}_{\vec{n}} \cdot \underbrace{(x - x_0, y - y_0 - z - z_0}_{r - r_0}$$

pl:
$f(x, y) x^2 + y^2$



$(x_0, y_0) = (1, 2)$-höz érintő síkot akarunk
$y_0 = f(x_0, y_0) = 1^2 + 2^2 = 5$
A sík normálvektora:

$$\vec{n} = \partial_1 f(1, 2), \partial_2 f(1, 2), -1)$$

$$\partial_1 f(1, 2) = 2x = 2$$

$$\partial_2 f(1, 2) = 2x = 4$$

$$\vec{n} = (2, 4, -1)$$

$$[(2, 4, -1), (x - 1, y - 2, z - 5)] = 0$$

$$2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0$$

$$\underline{\underline{2x + 4y - z = 5}}$$

Derivált mátrix $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
(eddig k=1 volt)
Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ Ez $x \in \mathbb{R}^h$ helyen differenciálható ha $\exists A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x + h) - f(x) - A \cdot h|}{|h|} = 0$$

Ekkor $f'(x) = A$ Itt most vektorok vannak skalárok helyett!
Itt hogyan jön ki az A mátrix?
Állítás:
Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ differenciálható x-ben akkor

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \dots & \partial_n f_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_k(x) & \partial_2 f_k(x) & \dots & \partial_n f_k(x) \end{pmatrix}$$

Ez az igazi Jacobi mátrix
(ez előző is az volt, de az nem volt annyira szép mátrix) (itt most nincs bizonyítás)

pl:

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ sin(x_1 + 3x_2) \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = \sin(x_1 + 3x_2)$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ \cos(x_1 + 3x_2) & 3\cos(x_1 + 3_x 2) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ x \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Más jelölés: $Df(x) = A$
Lineáris közelítés:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \text{függvényre:}$$

$$f(x + h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \alpha(h)$$ [2]

$$\lim \frac{|\alpha(h)|}{|h|} = 0$$

Olyan kicsi az $\alpha(h)$, hogy még egy kicsi h-val leosztva is 0-át ad
Más jelöléssel:

$$x = x_0$$

$$h = x - x_0$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cancel{\alpha(x - x_0)}$$

α lehúzása a lineáris közelítés:

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

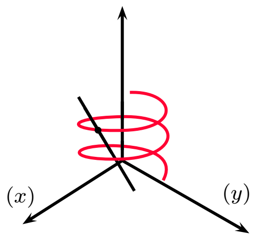
[2] ez kicsi

(eddig is ez volt, csak k=1-el)

$$l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

Alkalmazás spec esetre:

$$n = 1(t)$$
$$k = 3(x, y, z)$$



pl:

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

ennek a lineáris közelítése egy egyenes a térben.

$$l(t) f(t_0) + f'(t_0) \cdot (t - t_0)$$

Konkrétan:

$$f'(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t_0 = \pi$-ben érintő

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \pi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (t - t_0)$$

$x = -1$
$y = \pi - t$
$z = \cancel{\pi} + t \cancel{-\pi}$
$t \in \mathbb{R}$

Második derivált:
Egy változó esetén f'' nem más, mint $(f')'$
Ha n-változó van.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Ez más tipusú mint az f
Jó hír: $f' =: \mathbb{R}^{1 \times n}$ tekinthető úgy $\mathbb{R}^n$
Ekkor:

$$f''(x) \in \mathbb{R}^{n \times n} f'' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

pl:

$$f(x, y) = x^3 + y^4$$
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f'(x, y) = (3x^2, 4y^3) f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Szélsőérték többváltozóban

Balog Dániel

2010.03.30.

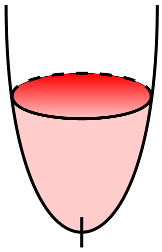
Ugyanezt szeretnénk $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ esetén.

($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$-ba nem akarjuk ugyanezt?
Nem, mert $\mathbb{R}^k$-ban nincs $<$ jel.)

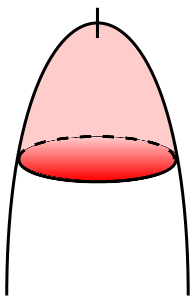
Def.:

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ lokális minimum, ha $\exists \delta > 0$ $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

Pl:



(n=2 a rajzon) ez egy szigorú lokális minimum



ez egy szigorú lokális maximum

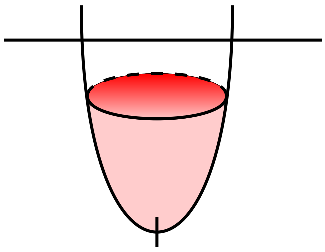
$>$ szigorú lokális minimum
$\leq$ lokális maxikmum
$<$ szigorú lokális maximum
szélsőérték $=$ min. $\cup$ max.

Tétel:

(Szükéges feltétel:) Ha $a \in \mathbb{R}^n$ lokális szélső érték $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek; akkor a $\partial_i f(a) = 0$ $\forall_i = 1, \ldots, n$ azaz $f'(a) = 0$

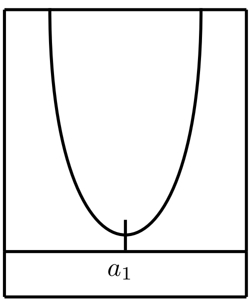
[Emlék: $\partial_1 f(a)$, $\partial_2 f(a)$,. . .,$\partial_n f(a)$]
$(8 : 35)$ - "Állandó rettegésben élek, hogy egy vektor nem egyenlő-e 5 számmal"

Nem bizonyítom, de rajzolok:



Elmeteszem egy síkkal, x_1 vált

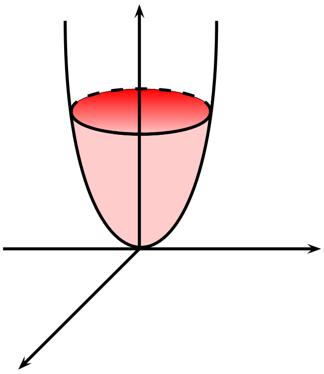
$$\begin{aligned} x_2 &= a_2 \\ x_3 &= a_3 \\ &\vdots \\ x_n &= a_n \end{aligned}$$



egyváltozós függvény, ennek van lokális minimuma
ez a görbe $f(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, ennek deriváltja 0, azaz $\partial_1 f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = 0$

Pl:

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$



Kérdés sz. é. (szélsőérték):

$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1$ $\partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_2$

ezeket 0-val egyenlővé teszem:

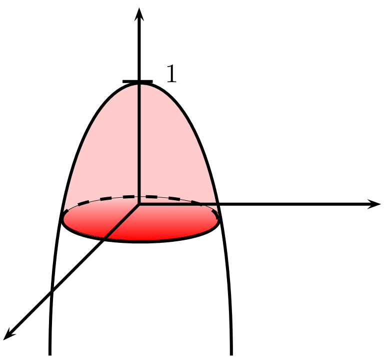
$2x_1 = 0 \qquad 2x_2 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$

Szélsőérték lehet $(0;0)$ pontban

Pl2:

$f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$



Kérdés sz. é.:

$\partial_1 f(x_1, x_2) = -2x_1 \qquad \partial_2 f(x_1, x_2) = -2x_2$

$-2x_1 = 0 \qquad -2x_2 = 0$

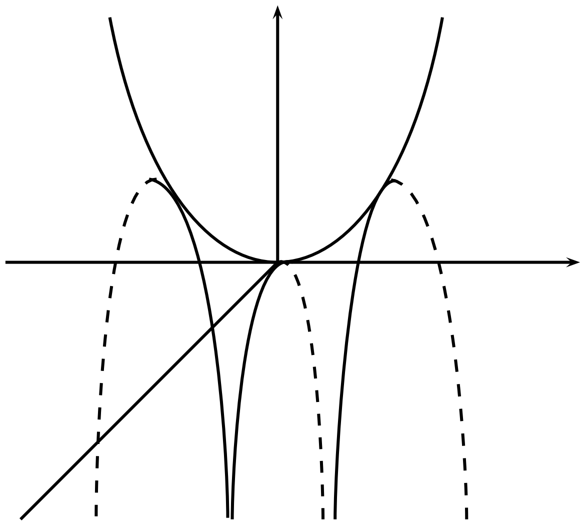
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$

Sz. é. lehet $(0;0)$ pontban

$(8:47)$ - "Voltak mérnöki tanulmányaim. 0 percig voltam mérnök, tehát.."

Pl3:

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$
nyereg felület



Kérdés sz. é.:

$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 \qquad \partial_2 f(x_1, x_2) = -2x_2$

$2x_1 = 0 \qquad -2x_2 = 0$

$x_1 = 0 \qquad -x_2 = 0$

Sz.é. lehet $(0;0)$ pontban, persze nincs sz. é.

Elégséges feltétel f'' segítségével

Először a példákkal:

1. lokális minimum

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f'(x_1, x_2) = (2x_1; 2x_2) \qquad f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$
$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad f'' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

2. lokális maximum

$$f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$$
$$f'(x_1, x_2) = (-2x_1, -2x_2)$$

$\partial_1 \partial_1 f$ $\qquad$ $\partial_2 \partial_1 f$

$$f'' = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. nyereg

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$
$$f'(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2)$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$(9:00)$ - "Az izgalmas résznél jön a reklám."

Tétel:

(Elégséges feltétel $n = 2$ esetén):
Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ differenciálható. Legyen $f'(a) = 0$.

1. Ha det $f''(a) > 0$ és $\partial_{11} f(a) > 0 \Rightarrow a$-ban lokális minimum. $\partial_{11} f(a) = \partial_1 \partial_1 f(a)$
2. Ha det $f''(a) < 0$ és $\partial_{11} f(a) < 0 \Rightarrow a$-ban lokális maximum.
3. Ha det $f''(a) < 0 \Rightarrow$ nincs sz. é. (nyereg)
   Nem bizonyítom

Megjegyzés:

Ez megfogalmazható $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényre is. $f''(a)$
pozitív definit $\to$ lok. min. negatív definit $\to$ lok. max.
($< Ax, x >> 0$: ez a pozitív definit) - NEM KELL TUDNI

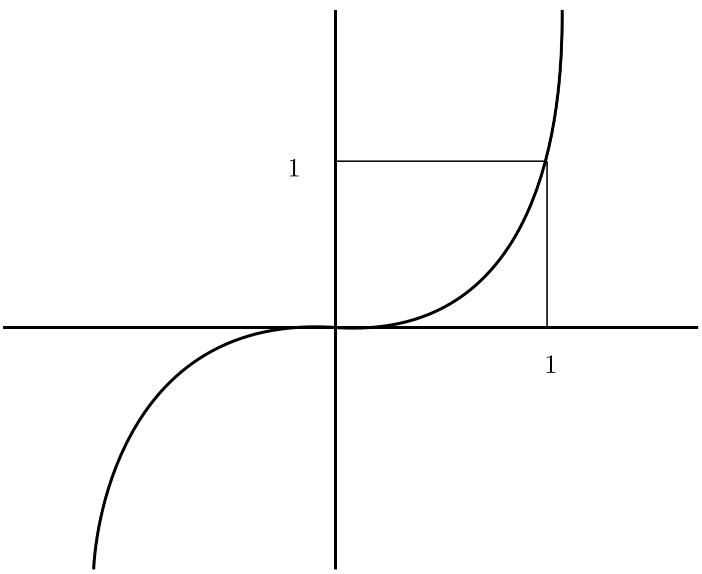
Pl:

$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$
Sz.é.=?

$f'(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 3x_2, 3x_2^2 - 3x_1)$

$$\begin{array}{ccc} 3x_1^2 - 3x_2 = 0 & \text{és} & 3x_2^2 - 3x_1 = 0 \\ x_1^2 = x_2 & & x_2^2 = x_1 \end{array}$$

$$x_1^4 = x_1 \Rightarrow x_1(x_1^3 - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 1 & x_2 = 1 \\ x_1 = 0 & x_2 = 0 \end{cases}$$



Sz. é. lehet: $(0;0)$ vagy $(1;1)$

Most jön az elégséges feltétel:

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

Beírjuk az egyik jelöltet és megnézzük mit kapunk:

$f''(0;0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \to$ det $f''(0;0) = 0 - (-3)\cdot(-3) = -9 < 0$
$(0;0)$ nem sz. é.
$f''(1;1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \to$ det $f''(1;1) = 6 \cdot 6 - (-3)\cdot(-3) = 27 > 0$
$\partial_{11} f(1;1) = 6 > 0 \Rightarrow (1;1)$ lok. min.
HF: $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2 + 4x_1x_2$; sz. é.=?

Primitív függvény (potenciál) többváltozós függvényre

Emlék:

1-változóban
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ adott, keresem: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ melyre $F' = f$, "F" primitív függvénye "f"-nek.

Def:

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
primitív függvénye f-nek ha $F' = f$
$F' = (\partial_1 F, \partial_2 F, \ldots, \partial_n F)$
$F' = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Megjegyzés:

baj $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nincs F

PL:

$f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$F = ?$
$\frac{\partial F}{\partial x} F(x, y) = 2x + y$
$\frac{\partial F}{\partial y} F(x, y) = x + 2y$
Ki az, akit "x" szerint deriválva $2x + y$ jön ki?

$$F(x, y) = x^2 + xy + C$$

ez a C x szerint konstans, tehát akármilyen y függvény lehet.
(pl.:$\sin y$ utólag: $C(y)$)

$$F(x, y) = x^2 + xy + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}F(x,y) = x + C'(y) = x + 2y$$

$$x + C'(y) = x + 2y / -x$$

$$C'(y) = 2y$$

$$C(y) = \int 2y \, dy = y^2 + K$$

$$F(x,y) = x^2 + xy + C(y) = x^2 + xy + y^2 + K$$

Ez a K valódi konstans.

Megoldás:

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 + K$$

Amikor nincsen, tehát Antipélda :)

$f(x,y) = (-y, x)$

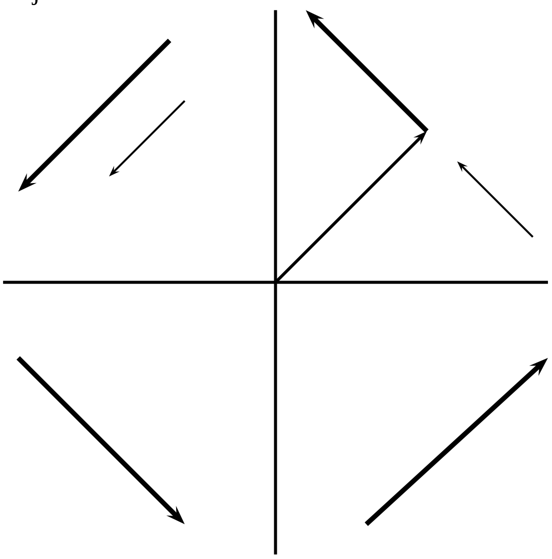
$\partial_1 F(x,y) = -y$

$\partial_2 F(x,y) = x$

$F(x,y) = -yx + C(y)$

$$-x + C'(y) = \partial_2 F(x,y) = x$$

Baj: nem esik ki az "x" Nincs F



Ennek az erőtérnek nincs potenciálja

Hogyan látszik "f"-en, hogy van primitív függvénye?

Levezetés(Bizonyítás):

$F' = f \iff \partial_1 F = f_1, \partial_2 F = f_2, \ldots, \partial_n F = f_n$
(két vektor egyenlő, ha koordinátáik egyenlőek)
ötlet:

$$\partial_1 F = f_1$$

deriválom x_2 szerint

$$\partial_2 \partial_1 F = \partial_2 f_1$$

$$\partial_2 F = f_2$$

deriválom x_1 szerint

$$\partial_1 \partial_2 F = \partial_1 f_2$$

$(9 : 55)$ - "Ez egy matematikus volt. Először fiatal volt, aztán nem tudom."

Tétel(Young):

szükséges feltétel primitív függvény létezésére
Legyen egy függvény, melynek második deriváltja létezik és folytonos. Ekkor:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Nem számít a sorrend.

Ebből következik:
Van egy függvényem, aminek szeretném kiszámítani a primitív függvényét. Ha $\exists$ primitív függvény $\Rightarrow \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \; \forall_{i,j} = 1, \ldots, n$

Young-tételes felírásban:

$$\frac{\partial f_i}{\partial d_j} = \frac{\partial f_j}{\partial d_i}$$

Pl:

$f(x,y) = (-y, x)$
$\partial_1 f_2(x,y) = 1 \; \partial_2 f_1(x,y)$
$1 \neq -1$
különbözőek $\Rightarrow$ nincs F

Megjegyzés:

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ esetben ez a rotációmentességet jelenti

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{pmatrix}$$

Ha $\exists$ primitív függvény, akkor ez a mátrix szimmetrikus.
$rot = 0 \Rightarrow$ mátrix szimmetrikus

Kalkulus II

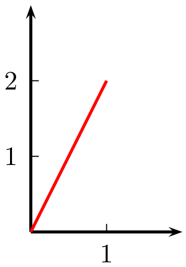
Balog Dániel

2010.04.13

Ívhossz és vonalintegrál:

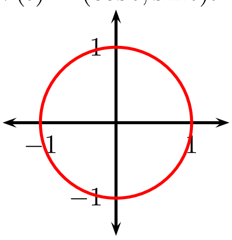
Def.: Egy $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ függvényt nevezünk görbének az $\mathbb{R}^n$-ben.

- **pl.:**
  $r(t) = (t, 2t) t \in [0,1]$
  $r : [0,1]\mathbb{R}^2$



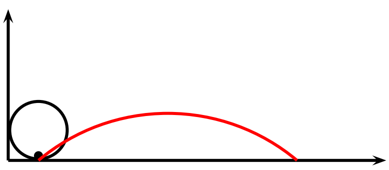
  $r(t) = (2t, 4t) t \in [0\frac{1}{2}]$ ugyanaz a rajz.
  Ugyanaz a vonal többféleképpen paraméterezhető.

- **pl.:**
  $r(t) = (\cos t, \sin t) t \in [0, 2\pi]$



  $r(t) = (\cos t, \sin t) t \in [0, 4\pi]$
  Ugyanez a rajz, de minden pontot 2x rajzolunk meg

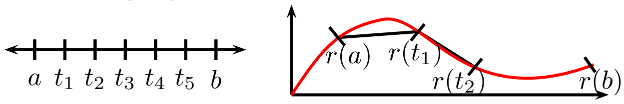
- **pl.:**
  $r(t) = (Rt - R\sin t), R - R\cos t)$



  Ez a pálya íve, a pálya az ún. ciklois

Ívhossz:

Legyen $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$



Hosszközelítő összeg:

$$\sigma(r, t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})|$$

Def.: az r görbének van hossza *(rektifikálható)* ha $\sup\{\sigma(r, t_1, t_2, \dots, t_n) : n \in \mathbb{N} t_i$tetszőleges felosztás$\}$ véges.

A görbe hossza

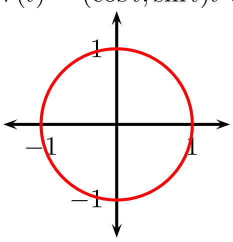
$$l(r) = \sup\{\sigma(r, t_1, t_2, \dots, t_n) : n \in \mathbb{N} t_i \text{tetszőleges felosztás}\}$$

- **pl.:** *(az egyszerű):*
  $r(t) = (t, 2t) t \in [0,1]$
  $\sigma = l(r) \quad \forall$ felosztásra
  $l(r) = \sqrt{5}$

- **pl.:** *(a furcsa)*
  $r(t) = (t, \sin\frac{1}{t}) t \in (0,1]$
  itt a $\sup = \infty$

Tétel:
Ha r differenciálható, és r' folytonos, akkor véges hossza van, és $l(r) = \inf\limits_{a}^{b} |r'(t)| dt$
Ezt nem bizonyítjuk be.

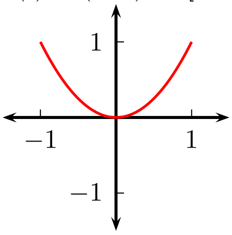
- **pl.:**
  $r(t) = (\cos t, \sin t) t \in [0, 2\pi]$



$r'(t) = (-\sin t, \cos t)$
$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$
$l(r) = \int\limits_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$

- Mazohista példa:
  $r(t) = (\cos t^2, \sin t^2) t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ A kör ugyanaz, de ugyanaz e a körív?

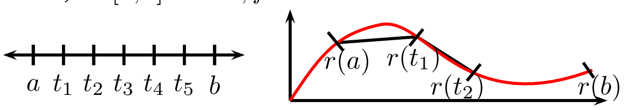
- **pl.:**
  $r(t) = (t, t^2) t \in [-1, 1]$



- **pl.:**
  $r(t) = (t, R\cos t, R\sin t) t \in [0, 2\pi]$

Vonalintegrál:

(munkavégzés egy görbe mentén)
Adott, $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$



Legyen $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$
A vonalintegrál közelítő összege:

$$\sigma(r, f, t_1, \dots, t_n, t_1^*, \dots t_n^*) == \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle f(r(t_i^*)), r(t_i) - r(t_{i-1})\rangle}_{\vec{F}\cdot\vec{s}\cdot\cos\alpha}$$

Finomítjuk a felosztást, és megnézzük, hogy mihez tart.

Def: Az f függvénynek az r görbe mentén van vonalintegrálja, ha $\exists I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, ha $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, akkor bármilyen $t_i^* \in [t_i, t_{i-1}]$ választás esetén $|I - \sigma()| < \varepsilon$
Ez az I a vonalintegrál, jele: $\int\limits_r f = I$

Tétel: *(kiszámítás módja)*
Ha r differenciálható, az r' folytonos és f (erőtér) is folytonos.
Ekkor $\exists \int\limits_r = \int\limits_a^b \langle f(r(t)), r'(t)\rangle \, dt$
Nem bizonyítjuk, ugyanis nehéz.

- **pl:**
  $r(t) = (\cos t, \sin t) t \in [0, 2\pi]$
  $f(x, y) = x, y$
  Centrális erőtér

$$\int\limits_r f = \int\limits_0^{2\pi} < (\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)) > dt =$$

$$= f \int\limits_0^{2\pi} -\cos t \sin t + \sin t, \cos t dt = 0$$

- **pl:**
  $r(t) = (\cos t, \sin t) t \in [0, 2\pi]$
  $f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$
  Rotációs erőtér

$$\int\limits_r f = \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \left(\left(\frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1} \right), (-\sin t, \cos t) \right) \right\rangle dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int\limits_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Vonalintegrál és potenciál kapcsolata:

Adott egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erőtér. a potencál: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hogy $F' = f (-\operatorname{grad} F = f)$
Legyen $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ görbe
Cél: Vonalintegrált a potenciából számolhatunk-e?

Lényeg:
Van primitív függvény
$\Updownarrow$
$\int\limits_r f$ csak az r végpontjaitól függ
$\Updownarrow$
zárt görbén $(r(a) = r(b))$ 0 a vonalintegrál.

Tétel:
A vonalintegrál kiszámítása a primitív függvénnyel.
Ha r differenciálható, r' és f folytonos, valamint $\exists F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, hogy $F' = f \Rightarrow \int\limits_r = F(r(b)) - F(r(a))$
Bizonyítás:

$\int\limits_r$ definíció szerint $= \int\limits_a^b \langle f(r(t)), r'(t)\rangle =$
$\int\limits_a^b \langle F'(r(t)), r'(t)\rangle = \int\limits_a^b F(r(t)) = F(r(b)) - F(r(a))$
Azért van ez, mert az r $[a, b]$-ből $\mathbb{R}^n$-be képez viszont F ezt visszahozza $\mathbb{R}$-be, így $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a függvény, és erre kényelmesen használható a Newton-Leibnitz tétel.
$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot$ [1] g' ezt kiterjesztjük $\mathbb{R}^n$ esetre

[1] mátrixszorzás lesz

Kalkulus II

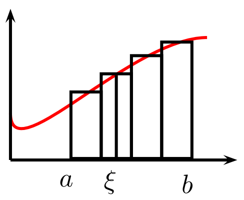
Balog Dániel

2010.04.20

Többváltozós függvény Riemann-integrálja

Emlékeztető: egyváltozós:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b$$

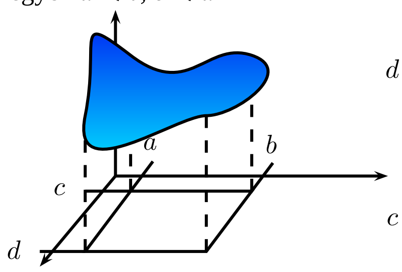
(A téglalap magassága legyen ξ)
Legyen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
A közelítőösszeg:

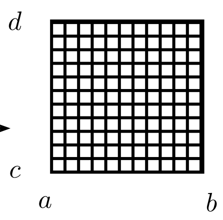
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Def.: Ha $\exists I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ hogy
$\forall x_i - x_{i-1} < \delta \forall i \Rightarrow \forall \xi_i$ választás mellett $|I - \sigma| < \varepsilon$
Ekkor f Riemann integrálható $[a,b]$-n és $\int\limits_a^b = I$

A cél:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényre a Riemann integrál definiálása:
Legyen $a < b$, $c < d$





A felosztások:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots y_m = d$$

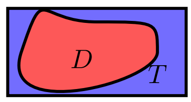
Ezzel "berácsozzuk" a téglalapot. Az egyváltozós függvényeknél területet számítottunk, most térfogatot szeretnénk kihozni.

Legyen $\xi_i \in [xi - 1 - x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1} - y_j]$
$i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$
Legyen

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

A két szumma szabadon fölcserélhető, csak az összegzés módszere változik meg. Például sorok helyett oszloponként összegzünk, de a végösszeg ugyan annyi!

Def: az f függvény az $[a,b] \times [c,d]$ téglalapon Riemann integrálható, ha $\exists I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ hogy $\forall x_i - x_{i-1} < \delta$ és $\forall y_i - y_{i-1} < \delta \forall i \forall j \Rightarrow \forall \xi_i, \eta_j$ választás mellett $|I - \sigma| < \varepsilon$
Ekkor f Riemann integrálható $[a,b] \times [c,d]$-n és $\int\limits_T = I$, itt $T = [a,b] \times [c,d]$ téglalap
Ez azonban nem működik, ha nem téglalap a grafikon alatti terület. *pl. félgömb* Ha most $D \subset \mathbb{R}^2$ egy halmaz (pl. kör) akkor $\int\limits_D$ hogyan



értelmezhető?
Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartomány
Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ olyan téglalap, ami magába fogalalja a D-t
Legyen $\tilde{f} : T \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha} x \in D \\ 0 & \text{ha} x \notin D \end{cases}$$

Def: Az f függvény Riemann integrálható D-n, ha $\tilde{f}$ Riemann integrálható T-n, és $\int\limits_D f = \int\limits_T \tilde{f}$
(igazolható, hogy megfelelő $\tilde{f}$ választásával tök mindegy, milyen a téglalap)
Nehéz kérdés: milyen lehet a D?
Szép D pl az, amit egy differenciálható görbe határol (pl kör)

Az integrál kiszámítása:

Fubini-tétel:
Legyen $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos
Ekkor

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Ezért gyakori jelölés $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f$ helyett $\int_c^d \int_a^b f$ Fizikusok kiírják a többszörös integrált, hiszen nem dolgoznak n dimenzióban. A tétel bizonyításának alapondolata:

Legyen $g(x) \int_c^d f(x,y)dy$

$g(x)$ egy egyváltozós riemann integrál, amit σ közelítőösszeggel definiáltunk.

Egy kis rács mérete nagyságrendileg az egyváltozós függvény σ-ja.

$\int_c^d g(x)dx$ az oszlopok területeinek összege.

Példák:

Legyen $f(x,y) = x \cdot y, T = [0,1] \times [2,3]$

$\int_T f = ?$

Fubini tétel szerint:

$$\int_0^1 \left(\int_2^3 xydy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_2^3 =$$

$$= \int_0^1 (\frac{9}{2}x - 2x)dx = \int_0^1 (\frac{5}{2}x) =$$

$$\frac{5}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

Legyen $T = [1,2] \times [1,2], f(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$\int_T = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_1^2 = \int_1^2 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{x^2+1}{x^2+4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \ln \frac{25}{16} = \ln \frac{5}{4}$$

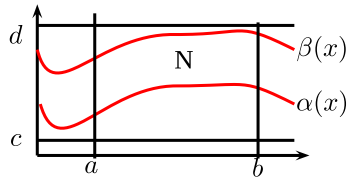
Integrálkiszámítás normáltartományon

Most a "krumpli" helyett két függvény által közbezárt terület lesz a D

De mi is az a normáltartomány?

Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum , legyen $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények. $\alpha(x) \le \beta(x)\ \forall x \in [a,b]$

Def: Az α és β függvények által meghatározott normáltartomány



$N\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [\alpha(x), \beta(x)]$

Szeretnénk $\int_N f$-et megadni.

Veszek egy c és d-t úgy, hogy $c \le \alpha(x) \le \beta(x) \le (d) \forall x$

Legyen $f : N \to \mathbb{R}$ folytonos

Legyen $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha} x \in D \\ 0 & \text{ha} x \notin D \end{cases}$

$$\int_N f = \int \tilde{f}_{[a,b]\times[c,d]} = \int_a^b \left(\int_c^d f dy \right) dx =$$

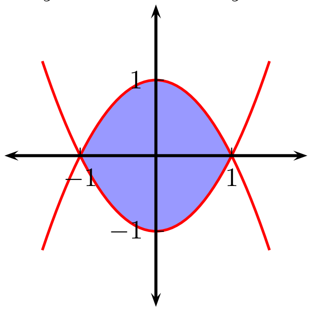
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Tehát a normáltartományon az integrál úgy adható meg, hogy $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$

Példák:

$f(x,y) = x \cdot y$

Az $y = 1 - x^2$ és az $y = x^2 - 1$ parabolák között fekvő tartományon



Most $a = -1, b = 1$ $\alpha(x) = x^2 - 1, \beta(x) = 1 - x^2$

$N = \ldots$

$$\int_N = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2-1}^{x^2} 1 - x^2(x \cdot y)dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{x^2-1}^{1-x^2} dx =$$

$$x\frac{(1-x^2)^2}{2} - x\frac{(x^2-1)^2}{2} = \int_{-1}^1 0$$

Kalkulus II

Balog Dániel

2010.04.27

Integráltranszformáció

(helyettesítésées integrálás többváltozós függvényre)

<u>**Cél:**</u> Integrál kiszámítása nem téglalapon.

mert $\int\limits_T f = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dxdy$ *de ez körön már nem működik.*

Emlékeztető:
Helyettesítéses integrál egyváltozós függvényre:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g_[\alpha, \beta] \to [a,b]$
$Hag(\alpha) = a$
$g(\beta) = b$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

gyakorlatilag $x = g(t) \quad dx = g'(t)dt$ Fontos hogy a g egy bijekció legyen *(ne legyen hullámzó)*
Ha szigorú monoton növekvő helyett szigorú monoton csökkenő, akkor a határok helyet cserélnek.*Úgy is meg lehet oldani, hogy egy minuszjelet kap.*
Erre kellene valami összevont dolog.
Észrevehető: ha a g nő g'(t) pozitív ha g csökken g'(t) negatív, de az egész kap egy minuszjelet (ha a határok maradnak) Tehát az összevont képlet:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot |g'(t)|dt$$

Próbáljuk meg ugyanezt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre
$\int\limits_T f$-et akarjuk kiszámítani helyettesítéssel. itt $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
Legyen a g függvényünk $g : [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \to T$ bijekció.
Először spec g függvényre. $g(t_1, t_2) = (g_1(t_1), g_2(t_2))$
Ez azért speciális mert g_1, g_2 csak egyféle t-től függ.

$$\int\limits_T f = \int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy\right)dx$$

A zárójelben lévő valami x függvénye! (hiszen y szerint kiintegráltuk, attól már nem függ)
Most y helyére behelyettesítjük a $g_2(t_2)$-t

$$\int\limits_T f = \int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x, g_2(t_2))|g_2'(t_2)|dt_2\right)dx$$

y helyett $g_1(t_1)$

$$\int\limits_T f = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\left(\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} \underbrace{f(g_1(t_1), g_2(t_2))}_{f(g(t))}|g_2'(t_2)|dt_2\right)|g_1'(t_1)|dt_1$$

Mi is a $g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t_1) & 0 \\ 0 & g_2'(t_2) \end{pmatrix}$
Ez összesítve:

$$\int\limits_R (f \circ g) \cdot |\det g'|$$

Ahol $R = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$
Ez a levezetés két irányban is általánosítható.

- $g(t_1, t_2) = (g_1(t_1, t_2), g_2(t_1, t_2))$
- a T lehet más tartomány, nem csak téglalap

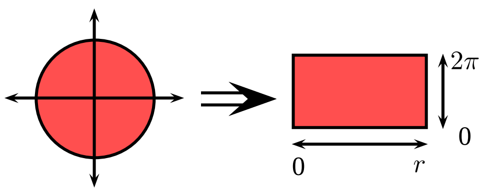
Ezeket nem vezetjük le.

Tétel:

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}$ folytonos
Legyen $R \subset \mathbb{R}$ téglalap, $g : R \to D$ bijekció
Ekkor igaz, hogy $\int\limits_D f = \int\limits_R (f \circ g) \cdot |\det g'|$

Ez az integráltranszformáció képlete.
Megj.:*Ez a képlet n dimenzióban is így van*

Példa



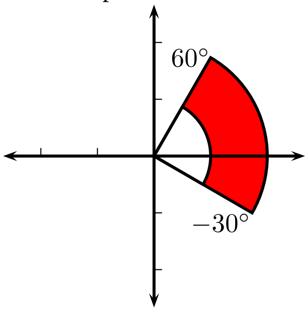
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ *(körlap)*
$f(x,y) = x^2 + y^2$
Kell egy R téglalap, és egy $g : R \to D$ bij.
Polárkoordináta-gyanús...

$$r \in [0,2]\varphi = [0, 2\pi]^1$$

[1]itt $[0, 2\pi)$, és $r = (0, 2]$ kellene

$$x = r\cdot\cos\varphi y = r\cdot\sin\varphi$$
$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$
$$\det g'(r,\varphi) = r\cdot 1$$
$$\int_D f = \int_{[0,2]\times[0,2\pi)} \underbrace{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)}_{f\circ g}\cdot r dr d\varphi =$$
$$\int_0^2\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr = \int_0^2 2\pi r^3 dr = 2\pi[\frac{r^4}{4}]_0^2 = 2\pi\cdot 4 = 8\pi$$

Második példa:



A külső sugár 2, a belső 1
$f(\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}})$
$\int_D f = ?$

$$R = \underbrace{[1,2]}_{r}\times\underbrace{[-\frac{\pi}{6},+\frac{\pi}{3}]}_{\varphi},$$
$$g(r,\varphi) = (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)$$
$$\int_D f = \int_1^2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} r d\varphi dr =$$
$$= \int_1^2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{3}} = r^2\frac{1}{2}\sin(2\varphi) d\varphi dr =$$
$$= \int_1^2 \frac{r^2}{2}\left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{3}} dr =$$
$$= \int_1^2 \frac{r^2}{4}(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}))dr = \frac{1}{4}[\frac{r^3}{3}]_1^2 = \frac{7}{12}$$

Az eddigi két példa a polártranszformációt használta.
Most jön a 3D példa. Első a hengerkoordináták:
$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1 z\in[0,2]\}$
$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Kell egy $g : R\to D$ helyettesítő függvény.
$g(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

$$R = \underbrace{[0,1]}_{r}\times\underbrace{[0,2\pi]}_{\varphi}\times\underbrace{[0,2]}_{z}$$

$$g'(x,y,z)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\det g' = r$

$$\int_D f = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{z}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} r dz d\varphi dr =$$
$$\int_D f = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{z}{d} z d\varphi dr = [\frac{z^2}{2}]_0^2 =$$
$$\int_0^1\int_0^{2\pi} 2 d\varphi dr = \int_0^1 4\pi dr = 4\pi$$

gömb térfogata:

Itt három dimenziós polárkoordinátákat kell használni
$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$
$f(x,y,z) = 1$
Az R sugarú hömb térfogata: $V_g = \int_D 1$
Kell egy g függvény:
$z = r\cdot\cos\vartheta$
$x = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi$
$y = r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$

$$g(r,\varphi,\vartheta) = (r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi, r\cot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi, r\cdot\cos\vartheta)$$

$$g'(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta & -r\cdot\sin\varphi\sin\vartheta & r\cdot\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cdot\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta\\ \cos\vartheta & 0 & -r\cdot\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

$\det g' = -(r^2\cdot\sin\vartheta)$
$|\det g'| = (r^2\cdot\sin\vartheta)$

$$V_g = \int_D 1 = \int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot r^2\cdot\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr =$$
$$= \int_0^R\int_0^{\pi} r^2\cdot[\sin\vartheta]_0^{2\pi} d\varphi dr = 2\int_0^R\int_0^{\pi} r^2 d\varphi dr =$$
$$2\int_0^R 2\pi r^2 dr = 4\pi[\frac{r^3}{r}]_0^R = \underline{\underline{4\pi\frac{R^3}{3}}}$$

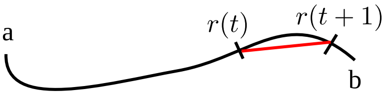
Kalkulus II

Balog Dániel

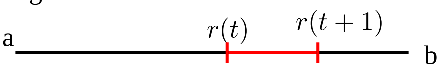
2010.05.04

Felületek:

Emlékeztető: görbék
A görbe egy $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n t \in [a, b]$ leképezésű alakzat



A görbe hossza:



Az egyenes vonalak összege egy közelítő összeg

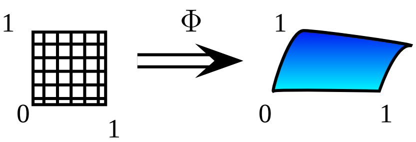
$$\sum_{i=1}^{n} |r(_{t_i} - r_{t_{i-1}}|$$

Ha elég sűrű a felosztás , akkor a közelítőösszeg tart a hosszához.
Tétel.:

$$l(r)(\text{görbe hossza}) = \int_a^b |\dot{r}(t)| dt$$

(a felbontás tart az integrálás féle felbontáshoz)
Mi a felület?
Def.: Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány *(téglalap szokott lenni)*. Egy $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ függvényt felületnek nevezük.
pl.:

$$\Omega = \underbrace{[0, 1]}_{u} \times \underbrace{[0, 1]}_{v}$$



Pontokat képezünk le *(dehogy mi, a gép...)*. Ha elég sűrűen vannak a pontok, akkor felületnek látjuk.
Matematikai értelemben az összes pontot ($x_i - xi - 1 < \varepsilon$-szerű megoldás) kell venni
Megjegyzés: A görbe és a felület döbbdimenziós általánosítása a sokaság *(mainfold)*
pl:
Gömbfelület:

$$\vartheta \in [0, \pi]$$

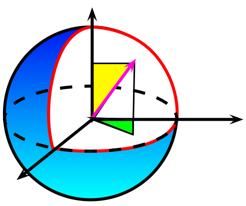
$$\varphi \in [0, 2\pi]^1$$

$$u = \vartheta$$

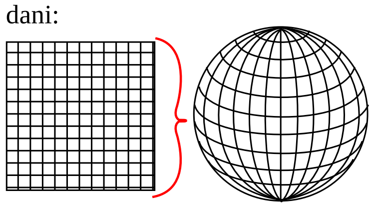
$$v = \varphi$$

$$\Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin u \cdot \cos v \\ R \cdot \sin u \cdot \sin v \\ R \cdot \cos u \end{pmatrix}$$



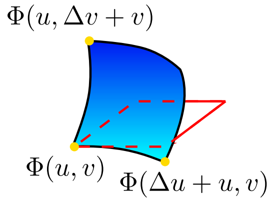
A lilával jelölt szakasz hossza az R, a sárgával jelölt szög *(a z tangelytől való eltérés)* a ϑ, *és a zölddel jelölt (az x tegelytől való eltérés)* a φ.
Ha már úgyis megvan a felület egy téglalapban, és az, hogy ebből hogy lesz gömb, akkor érdemes a felszínt megmondani:



Felszín megadása *(nagyjából)*

Legyen Ω-nak felosztása *(rácsozás)*

Egy kis felületdarab közelítő nagyságát kell definiálni. Az érintősíkon egy paralelogramma területével lehet közelíteni.



$$\partial_u \Phi(u, v) \cdot \Delta u; \partial_v \Phi(u, v) \cdot \Delta v \in \mathbb{R}^3$$

A paralelogramma területe a kettő vektoriális szorzatának abszolult értéke

$$|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)| \Delta u \Delta v$$

σ a felszín közelítő összege

$$\sum \sum |\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)| \Delta u \Delta v$$

[1] $0 = 2\pi$

(bunkó autósként nem indexelünk. . .)
Tétel: Legyen egy $\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^3$ felület differenciálható. Ennek felszíne:

$$S=\int_\Omega |\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)|dudv$$

pl:
Gömbfelszín kiszámítás:

$$\Omega=[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

$$\Phi(u,v)=\begin{pmatrix} R\cdot\sin u\cdot\cos v\\ R\cdot\sin u\cdot\sin v\\ R\cdot\cos u\end{pmatrix}$$

$$\partial_u\Phi=\begin{pmatrix} R\cdot\cos u\cdot\cos v\\ R\cdot\cos u\cdot\sin v\\ -R\cdot\sin u\end{pmatrix}$$

$$\partial_v=\begin{pmatrix} -R\cdot\sin u\cdot\sin v\\ R\cdot\sin u\cdot\cos v\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi=\begin{vmatrix} i & j & k\\ R\cos u\cos v & R\cos u\sin v & -R\sin u\\ -R\sin u\sin v & R\sin u\cos v & 0\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R^2\cdot\sin^2 u\cdot\cos v\\ R^2\cdot\sin^2 u\cdot\sin v\\ \underbrace{R^2\cdot\sin u\cos^2 v+R^2\sin u\cos u\sin^2 v}_{R^2\sin u\cos u}\end{pmatrix}$$

Ennek a hossza

$$R^2\sin u\underbrace{(\underbrace{\sin^2 u\cos^2 v+\sin^2 u\sin^2 v}_{\sin^2 u}+\cos^2 u)^{\frac{1}{2}}}_{1}=R^2\sin u$$

$$s=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}R^2\sin u dvdu=2\pi R^2\int_0^\pi\sin udu=4R^2\pi$$

Felszínintegrál: (skalár értékű függvény integrálja felületen)

Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^2,\Phi:\omega\to\mathbb{R}^3$ differenciálható felület
Legyen $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ folytonos függvény
Definiálni akarjuk az $\int_\Phi U$
Kellene σ és Definicíó, de egyik sincs végigvezetve
Tétel:

$$\int_\Phi U=\int_\Omega U(\Phi(u,v))\cdot|\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)|dudv$$

pl.:

$$\Omega=[0,1]\times[0,1]$$

$$\Phi(u,v)=\begin{pmatrix} u+v\\ u-v\\ u\end{pmatrix}$$

$$U(x,y,z)=x+y+z$$

$$\int_\Phi U=?$$

Kiszámítás a tétellel:

$$\partial_u\Phi==\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\partial_v\Phi=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$|\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$\int_{Phi}U=\int_0^1\int_0^1\underbrace{(u+v+u-v+u)}_{U(\Phi(u,v))}\cdot\sqrt{6}dudv$$

$$=3\cdot\sqrt(6)\int_0^1\left(\int_0^1 udu\right)dv=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Mi van a vektorokkal?
Felületi integrál (vektorértékű függvény integrálja felületen)
Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^2,\Phi:\omega\to\mathbb{R}^3$ differenciálható felület
Legyen $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ folytonos függvény
Definiálandó $\int_\Phi$
Kellene σ, Definíció, de ezek ismét kimaradnak.
Tétel:

$$\int_\Phi F=\int_\Omega\langle F(\Phi(u,v),\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)\rangle dudv$$

$$\Omega=[0,1]\times[0,1]$$

$$\Phi(u,v)=\begin{pmatrix} u+v\\ u-v\\ u\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}$$

$$\int_\Phi F=?\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\int_\Omega F=\int_0^1\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix} u+v\\ u-v\\ u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle dudv$$

$$\int_0^1\int_0^1\underbrace{\cancel{(u-v+u+v-2u)}}_{0}dudv$$

$\nabla, \mathrm{div}, \mathrm{grad}, \mathrm{rot}$

nabla

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\, f$$

A $\mathrm{grad}\, f$, az f parciális deriváltjaiból képezett vektor
Ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$< \nabla, f >= \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3 = \mathrm{div}\, f$$

$$f = (f_1, f_2, f_3), f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f'_{jakobi} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_1 f_2 & \partial_1 f_3 \\ \partial_2 f_1 & \partial_2 f_2 & \partial_2 f_3 \\ \partial_3 f_1 & \partial_3 f_2 & \partial_3 f_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times f = \mathrm{rot}\, f$$

-

$$\begin{vmatrix} i & k & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\, f$$

Házinak:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0 \quad \forall f$$

$$\Delta\, \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$$

Érdemes megnézni az Integrálátalakító tételeket:
Gauss-tétel, és Stokes tétel