Kalkulus II.
2. próba ZH

Minden lapon legyen rajta a **szerző** neve! Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz puszta közléséért nem jár pont. A ZH-n egysoros kijelzőjű (grafikus megjelenítésre nem alkalmas) számológép használható.

---

1. **Beugró** (4 hibátlan részfeladat szükséges!)
   (a) $f(x,y) = (y^2+3x)\cos(3y^4+2xy+x^5), \qquad \partial_y f(x,y) = ?$
   (b) $f(x,y) = \dfrac{e^{2x}y}{x^2} + \sin(2y), \qquad \partial_x f(x,y) = ?$
   (c) $f(x,y) = \ln(xy^2+3x)\; yx^3, \qquad \partial_y f(x,y) = ?$
   (d) $\int_D f = ?$, ha $f(x,y) = \cos(2x-3y+\frac{\pi}{2})$, $D = [0,\pi/2]\times[0,\pi]$
   (e) $\int_{N_x} f = ?$, ha $f(x,y) = y-x$, $N_x = \big\{(x,y \in \mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\ x+1 \le y \le 4-2x\big\}$
2. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sin(x^2y)\cdot\frac{1}{z^2}\cdot e^{7y}$. Számítsd ki a $\partial_x\partial_y\partial_z f(x,y,z)$ parciális deriváltat!
3. Határozd meg az $f(x,y) = (x^2-6x)(y^2-4y)$ függvény lokális szélsőértékeit!
4. Számítsd ki a $\varphi:[0,2]\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (a(t\sin t+\cos t), a(\sin t - t\cos t))$ $(a>0)$ görbe ívhosszát!
5. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-2x^2+2xe^y,\ x^2e^y+y^3)$, és $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (8t^2, 15t^2)$.
   (a) Számítsd ki f egy primitív függvényét!
   (b) Számítsd ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált a primitív függvény felhasználásával!
6. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^{x^2+y}\dfrac{x}{\sqrt{x+y^3}},\ x^2-3y+2)$, és $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (2,t^2)$. Számítsd ki az $\int_\varphi f$ vonalintegrált!
7. Számítsd ki az $\int_D \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ integrált, ahol $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.