

**Kalkulus gyakorlat**  
**Fizika BSc I/2 (emelt szint), 2. zh feladatsor**

1. Legyen  $E: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(t, x, y) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right)$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\partial_t E = \partial_x^2 E + \partial_y^2 E$ !  
(5 pont)
2. Keressük meg az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 6xy$  függvény szélsőértékeit a  $K = [-3, 3] \times [-3, 3]$  halmazon!  
(5 pont)
3. Legyen  $\gamma: [-1, 1]$ ,  $\gamma(t) = (\sqrt{3}t^2, t^3 - t)$ .
  - a) Rajzoljuk fel (vázlatosan) a görbét és számítsuk ki az ívhosszát!
  - b) Számítsuk ki az  $\int_{\gamma} f$  vonalintegrált, ha  $f(x, y) = ((y+2)^{y+2}, e^{\log x + (y+2)\log(y+2)} + (y+2)^{y+2} \log(y+2)^x)$ .
  - c) Számítsuk ki az  $\int_{\gamma} f$  vonalintegrált, ha  $f(x, y) = (y, 0)$ .  
(2+3+3 pont)
4. Legyen  $H$  a  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  csúcspontok által meghatározott háromszög a síkon. Számítsuk ki az  $\int_H f$  integrált, ha  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a következő alakú:
  - a)  $f(x, y) = x - y$
  - b)  $f(x, y) = x + y$ .  
(3+3 pont)
5. Legyen  $H := \{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$ . Számítsuk ki az  $\int_H f$  integrált, ha  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a következő alakú:
  - a)  $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)^4$
  - b)  $f(x, y) = \arctg(x^3 - y^3)$ .  
(3+3 pont)

**Kalkulus gyakorlat**  
**Fizika BSc I/2 (emelt szint), 2. zh feladatsor**

1. Legyen  $E: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(t, x, y) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right)$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\partial_t E = \partial_x^2 E + \partial_y^2 E$ !  
(5 pont)
2. Keressük meg az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 6xy$  függvény szélsőértékeit a  $K = [-3, 3] \times [-3, 3]$  halmazon!  
(5 pont)
3. Legyen  $\gamma: [-1, 1]$ ,  $\gamma(t) = (\sqrt{3}t^2, t^3 - t)$ .
  - a) Rajzoljuk fel (vázlatosan) a görbét és számítsuk ki az ívhosszát!
  - b) Számítsuk ki az  $\int_{\gamma} f$  vonalintegrált, ha  $f(x, y) = ((y+2)^{y+2}, e^{\log x + (y+2)\log(y+2)} + (y+2)^{y+2} \log(y+2)^x)$ .
  - c) Számítsuk ki az  $\int_{\gamma} f$  vonalintegrált, ha  $f(x, y) = (y, 0)$ .  
(2+3+3 pont)
4. Legyen  $H$  a  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  csúcspontok által meghatározott háromszög a síkon. Számítsuk ki az  $\int_H f$  integrált, ha  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a következő alakú:
  - a)  $f(x, y) = x - y$
  - b)  $f(x, y) = x + y$ .  
(3+3 pont)
5. Legyen  $H := \{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$ . Számítsuk ki az  $\int_H f$  integrált, ha  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a következő alakú:
  - a)  $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)^4$
  - b)  $f(x, y) = \arctg(x^3 - y^3)$ .  
(3+3 pont)