Kalkulus II. Vizsga 2017. május 26.

1. Fogalmazza meg a hányados kritériumot. Számítsa ki az $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ integrált.

2. Definiálja egy függvénysorozat konvergencia halmazát és határfüggvényét. Konvergens-e az alábbi sor?
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{n!}$$

3. Definiálja egy függvény Taylor-sorának fogalmát. Vezesse le az
$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$
függvény 0 körüli Taylor-sorának képletét.

4. Határozza meg az $f(x) = 1 - 2x$ függvény $(-\pi, \pi)$ intervallumra vonatkozó Fourier-sorát.

5. Adja meg egy kétváltozós, valós (skalár) értékű függvény második deriváltjának (Hesse mátrix) általános képletét. Határozza meg az $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

6. Fogalmazza meg a lokális szélsőérték elégséges feltételét kétváltozós függvény esetében. Keresse meg az $f(x, y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^x$ függvény lokális szélsőértékeit.

7. Vezesse le, hogy egy primitív függvénnyel rendelkező függvénynek hogyan számítható ki a vonalintegrálja. Van-e primitív függvénye az $f(x, y) = (2y, 2x + 3y^2)$ függvénynek, és ha igen, akkor mi az?

8. Definiálja egy többváltozós függvény Riemann-integrálját. Számítsa ki az $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$ függvény integrálját az origó közepű, egység sugarú kör pozitív síknegyedbe ($x \geq 0$, $y \geq 0$) eső negyedrészén.

9. Definiálja a felszíni integrál fogalmát. Számítsa ki az $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ függvény felületi integrálját az origó közepű, egység sugarú gömb felszínén a Gauss-tétel segítségével.

Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz puszta közléséért nem jár pont. A vizsgán egysoros kijelzőjű számológép használható.