Kalkulus II. Próbavizsga (2006/2007 II. félév)

Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz puszta közléséért nem jár pont.

---

1. Definiálja korlátos függvény nem-korlátos intervallumon vett improprius integrálját. Számítsa ki az $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ integrált.
2. Definiálja egy függvénysor egyenletes konvergenciáját. Határozza meg az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat konvergenciahalmazát.
3. Fogalmazza meg a hatványsor összegfüggvényének deriválhatóságáról szóló tételt. Vezesse le az arctg függvény Taylor-sorának képletét.
4. Írja fel a trigonometrikus sor definícióját. Határozza meg az $f(x) = x^2$ függvény $(-\pi, \pi)$ intervallumra vonatkozó Fourier-sorát.
5. Írja fel a többváltozós függvény folytonosságának definícióját. Határozza meg az $f(x, y, z) = xy^2z^3$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.
6. Vezesse le egy felület érintősíkjának egyenletét.
7. Fogalmazza meg egy többváltozós függvény lokális maximumának definícióját. Keresse meg az $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x + 3y + 1$ függvény lokális szélsőértékeit.
8. Fogalmazza meg többváltozós függvényre a primitív függvény létezésének szükséges feltételét. Van-e primitív függvénye az $f(x, y, z) = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)$ függvénynek, ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
9. Definiálja egy görbe ívhosszát. Számítsa ki az $f(x, y, z) = (x+y, x-y, z)$ függvény vonalintegrálját az $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (t, 2t, 3t)$ görbe mentén.
10. Definiálja egy többváltozós függvény Riemann-integrálját. Számítsa ki az $f(x, y, z) = xyz$ függvény integrálját a $[0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$ téglatesten.
11. Vezesse le az integráltranszformáció képletét gömb-koordinátákban. Számítsa ki az R sugarú gömb térfogatát.
12. Írja fel a felszín kiszámításának képletét. Számítsa ki az R sugarú gömb felszínét.
13. Fogalmazza meg a Stokes-tételt. Számítsa ki az $f(x, y, z) = (xyz, \exp(x)z^2, x^3 \sin(y^2))$ függvény felületi integrálját a $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ kocka felszínén a Gauss-tétel segítségével.