

KALKULUS I. GYAKORLAT, MEGOLDÁSVÁZLATOK  
FIZIKA BSC I/1.

1. gyakorlat

1. Ábrázoljuk a következő halmazokat a síkon!

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$ ,
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ ,
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x + y < 1\}$ ,
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$ .

2. Ha  $A, B$  és  $C$  adott halmazok, akkor írjuk fel az alábbi halmazokat  $A, B, C$  és az  $\cup, \cap, \setminus$  halmazműveletek segítségével:

- (a)  $E = \{x : x \in A \text{ és } (x \in B \text{ vagy } x \in C)\}$ ;
- (b)  $F = \{x : (x \in A \text{ és } x \in B) \text{ vagy } x \in C\}$ .

**Megoldás.** (a)  $E = A \cap (B \cup C)$ ;

(b)  $F = (A \cap B) \cup C$ .

3. Igazak-e az alábbi halmazegyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg konkrét halmazokat, amelyekre nem teljesül az egyenlőség.

- (a)  $(A \cup B) \setminus A = B$ ;
- (b)  $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ ;
- (c)  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**Megoldás.** (a) Nem igaz, legyen  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ . Ekkor  $(A \cup B) \setminus A = \{2\} \neq B$ .

(b) Nem igaz, legyen  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1\}$ ,  $C = \{2\}$ . Ekkor  $(A \cup B) \setminus C = \{1\}$ , de  $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\}$ .

(c) Igaz, ugyanis  $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \iff x \in (A \cup B)$  és  $x \notin (A \cap B) \iff$  vagy  $x \in A$ , vagy  $x \in B \iff$  vagy  $x \in (A \setminus B)$ , vagy  $x \in (B \setminus A) \iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

4. Igazak-e az alábbi állítások?

- (a)  $(A \subset B \text{ és } A \subset C) \iff A \subset B \cup C$ ;
- (b)  $(A \cup C = B \cup C \text{ és } A \setminus C = B \setminus C) \iff A = B$ ;

**Megoldás.** (a) A balról jobbra való következtetés természetesen igaz, ugyanakkor visszafelé nem, legyen például  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $C = \{3, 4, 5\}$  és  $A = \{2, 3, 4\}$ . Ekkor  $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \supset A$ , de  $A \not\subset B$  (és  $A \not\subset C$ ).

(b) Itt a jobbról balra történő ( $\Leftarrow$ ) következtetési irány teljesül nyilvánvaló módon, ugyanakkor a másik irány itt sem következik. Legyenek a halmazok olyanok, hogy nemüresek,  $A, B \subset C$  és  $A \cap B = \emptyset$ . Ekkor mindkét feltétel teljesül, de  $A \neq B$ . Például  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$  és  $C = \{1, 2\}$ .

5. Legyen  $X$  egy halmaz,  $A, B \subset X$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$(a) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad (b) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

**Megoldás.**  $x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A$  és  $x \notin B \iff x \in \overline{A}$  és  $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ . A másik állítás bizonyítása teljesen hasonló.

6. Legyenek  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a következő függvények:  $f(x) = x + 3$ ,  $g(x) = x^2$ . Határozzuk meg az  $f \circ g$  és a  $g \circ f$  függvényeket.

**Megoldás.**  $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$ .  $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(g \circ f)(x) = (x + 3)^2$ .

7. Írjuk be a hiányzó függvényeket:

**Megoldás.**

- (a)  $f(x) = x^2$        $g(x) = x + 1$        $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$
- (b)  $f(x) = x - 4$        $g(x) = x + 4$        $(f \circ g)(x) = x$
- (c)  $f(x) = \sqrt{x}$        $g(x) = x^2$        $(f \circ g)(x) = |x|$

8. Legyenek  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények. Igaz-e, hogy ha mindkettő injektív, akkor  $f + g$  is injektív?

**Megoldás.** Nem igaz. Legyen  $f(x) = x$ ,  $g(x) = -x$ . Mindkettő injektív, de  $(f + g)(x) = 0$  nem injektív.

9. Mely függvények injektívek? Amennyiben létezik, adjuk meg az inverzét!

(a)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ;

(b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3$ ;

(c)  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x - \frac{1}{x}$ ;

(d)  $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $k(x) = \frac{1}{x}$ .

**Megoldás.** (a) Ha  $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2}$ , akkor  $1 - x^2 = 1 - y^2 \iff x^2 = y^2$ , amiből következik, hogy  $x = y$  (hiszen csak a  $[0, 1]$ -en vagyunk), tehát  $f$  injektív. Mivel az  $y = f(x)$  egyenlet minden  $y \in R(f)$ -re egyértelműen megoldható, így van inverz. Az  $y = \sqrt{1 - x^2}$  egyenletből  $x = \sqrt{1 - y^2}$ , azaz  $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f^{-1}(y) = \sqrt{1 - y^2}$ . (A függvény inverze önmaga.) (b) A függvény injektív ( $x^3 = y^3 \iff x = y$ ). Mivel az  $y = f(x)$  egyenlet minden  $y \in R(f)$ -re egyértelműen megoldható, így van inverz. Az  $y = x^3$ -ből  $x$  és  $y$  szerepét felcserélve, majd  $y$ -t kifejezve kapjuk, hogy  $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ . (c) A függvény injektív, tegyük fel ugyanis, hogy  $h(x) = h(y)$ , azaz  $x - 1/x = y - 1/y \iff \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{y^2 - 1}{y} \iff (x - y)(xy + 1) = 0$ . Ez a  $h$  értelmezési tartományán csak úgy lehet, hogy  $x = y$ . Minden  $y \in \mathbb{R}$  esetén az  $y = h(x)$  egyenlet egyértelműen megoldható, hiszen  $y = x - 1/x \iff x^2 - xy - 1 = 0$ . Ebből  $x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ , vagyis mindig két gyök van és itt pontosan az egyik gyök lesz az értelmezési tartomány eleme. Az inverz itt is az  $x = h(y)$  egyenletből számolható,  $y$ -t kifejezve:  $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $h^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ .

(d) A függvény injektív, ugyanis  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ -ből  $x = y$  következik. Mivel az  $y = f(x)$  egyenlet minden  $y \in R(f)$ -re egyértelműen megoldható, így van inverz. Az  $y = \frac{1}{x}$  egyenletből  $x$ -et kifejezve:  $x = \frac{1}{y}$ , vagyis  $k$  inverze önmaga.

10. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvény. Határozzuk meg az  $f^{-1}([4, 9])$ ,  $f^{-1}([-1, 0])$ ,  $f^{-1}([-2, -1])$  halmazokat, ha

(a)  $f(x) = x^2$ ;

(b)  $f(x) = \sin x$ .

**Megoldás.** (a)  $f^{-1}([4, 9]) = [-3, -2] \cup [2, 3]$ ,  $f^{-1}([-1, 0]) = \{0\}$ ,  $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$ .

(b)  $f^{-1}([4, 9]) = \emptyset$ ,  $f^{-1}([-1, 0]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi]$ ,  $f^{-1}([-2, -1]) = \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

11. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy függvény,  $A, B \subset \mathbb{R}$  tetszőleges halmazok.

(a) Mutassuk meg, hogy

i.  $A \subset f^{-1}(f(A))$ ;

ii.  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

(b) Adjunk példát arra, hogy a fenti tartalmazásoknál általában nincs egyenlőség! (Nézzük meg az előző feladatot.)

**Megoldás.** (a) Legyen  $x \in A$ , ekkor az ösképz definíciója szerint  $x \in f^{-1}(f(A))$ , hiszen  $f(x) \in f(A)$ . Itt általában a két halmaz nem egyenlő, pl. az előző feladatbeli  $f(x) = x^2$  függvény és  $A = [2, 3]$  halmaz esetén  $f(A) = [4, 9]$ ,  $f^{-1}(f(A)) = [-3, -2] \cup [2, 3] \neq [2, 3]$ .

(b) Ha  $x \in f(f^{-1}(B))$ , akkor van olyan  $y \in f^{-1}(B)$ , hogy  $f(y) = x$ . Másrészt  $y \in f^{-1}(B)$  azt jelenti, hogy  $f(y) \in B$ , azaz  $x \in B$ . Általában itt sincs egyenlőség: ha  $f(x) = x^2$  és  $B = [-1, 0]$ , akkor  $f^{-1}(B) = \{0\}$ ,  $f(f^{-1}(B)) = f(\{0\}) = \{0\} \neq [-1, 0]$ .

## 2. gyakorlat

1. Mivel egyenlők az alábbi számok?

**Megoldás.**

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \log_6 6 = 1, \quad \log_6 6^6 = 6, \quad 2^{\log_2 3} = 3, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{29\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{-2010\pi}{4} = -1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{sgn} \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} = -1, \quad \operatorname{sgn} \operatorname{sgn} \cos \sqrt{2010}\pi = -1.$$

2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Melyek lesznek párosak, páratlanok, periodikusak? Mi az értelmezési tartomány?

$$x \mapsto 2x - 5, \quad x \mapsto 6 - x, \quad x \mapsto x^2 - 3, \quad x \mapsto (x - 3)^2, \quad x \mapsto 6x - x^2, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(6x - x^2),$$

$$x \mapsto \frac{1}{x+3}, \quad x \mapsto \frac{-2x-11}{x+3}, \quad x \mapsto 2^x, \quad x \mapsto 2^{1-x}, \quad x \mapsto \log_3 |x|, \quad x \mapsto 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 1,$$

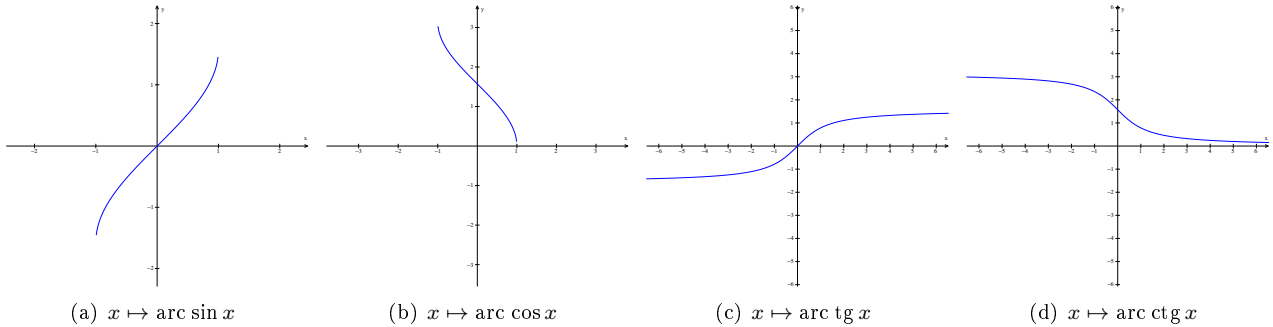
$$x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \cos 2x, \quad x \mapsto 2 \cos \frac{x}{2} - 2, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto |\cos |x||.$$

3. Ábrázoljuk a trigonometrikus függvények inverzeit! Mi az értelmezési tartomány és az értékészlet?

$$\arcsin x = \left( \sin \left|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \right. \right)^{-1}(x), \quad \arccos x = \left( \cos \left|_{[0, \pi]} \right. \right)^{-1}(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = \left( \operatorname{tg} \left|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \right. \right)^{-1}(x), \quad \operatorname{arcc tg} x = \left( \operatorname{ctg} \left|_{(0, \pi)} \right. \right)^{-1}(x).$$

**Megoldás.**



### 3. gyakorlat

1. Mi a határértéke az alábbi  $(a_n)$  sorozatoknak? Definíció alapján adott  $\varepsilon > 0$ -hoz adjunk meg  $n_0 \in \mathbb{N}$  küszöbindexet is.

$$(a) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (b) \quad a_n = \frac{6n+7}{11n-5}.$$

**Megoldás.** (a) A sorozat határértéke 0. Legyen ugyanis  $\varepsilon > 0$  adott, ekkor

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > 1/\varepsilon \iff n > 1/\varepsilon^2.$$

Tehát az  $n_0 := \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil + 1$  küszöbindex-választás jó lesz.

(b) Ennek a sorozatnak a határértéke  $6/11$ . Legyen  $\varepsilon > 0$  adott, ekkor

$$\left| \frac{6n+7}{11n-5} - \frac{6}{11} \right| = \left| \frac{11 \cdot (6n+7) - 6 \cdot (11n-5)}{121n-55} \right| = \frac{107}{121n-55} < \varepsilon \iff n > \frac{55}{121} + \frac{107}{121 \cdot \varepsilon},$$

azaz  $|a_n - 6/11| < \varepsilon$  teljesül, ha  $n$  nagyobb, mint a jobb oldalon álló ( $\varepsilon$ -tól függő) szám.

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad (b) \quad \frac{2}{n}, \quad (c) \quad \frac{3}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (d) \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{n^2 + 1}.$$

**Megoldás.** (a) A sorozat a  $b_n = 1$  és  $c_n = \frac{1}{n}$  sorozatok összege, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek összege:  $\lim a_n = 1 + 0 = 1$ .

(b) A sorozat a  $b_n = \frac{1}{n}$  sorozat kétszerese, így a határértéke a  $(b_n)$  sorozat határértékének kétszerese:  $\lim a_n = 2 \cdot 0 = 0$ .

(c) A sorozat a  $b_n = \frac{3}{n}$  és  $c_n = 1 + \frac{1}{n}$  sorozatok szorzata, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek szorzata:  $\lim a_n = 0 \cdot 1 = 0$ .

(d) A sorozat a  $b_n = \sqrt[3]{2}$  és  $c_n = n^2 + 1$  sorozatok hányadosa, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek hányadosa:  $\lim a_n = \frac{1}{+\infty} = 0$ .

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \frac{n+2}{3n-4} \quad (b) \frac{2n^2-3n-5}{6-n^2} \quad (c) \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5}$$

$$(d) \frac{3^n-5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n+1, 8^{n+5}} \quad (e) \frac{3^{2n}-4 \cdot 2^{n+3}}{5^n-2 \cdot 9^{n+1}+n^6} \quad (f) \frac{2n!+3^n}{5n^2-1+n!}$$

**Megoldás.**

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{3-\frac{4}{n}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n-5}{6-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{6}{n^2}-1} = -2.$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+2}{3+\frac{5}{n}} = \frac{3}{3} = 1.$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n+1, 8^{n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2+1, 8^5 \cdot 0, 6^n} = \frac{1}{2}.$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n}-4 \cdot 2^{n+3}}{5^n-2 \cdot 9^{n+1}+n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n-32 \cdot 2^n}{5^n-18 \cdot 9^n+n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-32 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n-18+\frac{n^6}{9^n}} = -\frac{1}{18}.$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!+3^n}{5n^2-1+n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3^n}{n!}}{5\frac{n^2}{n!}-\frac{1}{n!}+1} = \frac{2}{1} = 2.$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \quad (b) \sqrt{n^2+6n+1}-n.$$

**Megoldás.** A „ $\infty - \infty$ ”-típusú kifejezést az alábbi módon alakíthatjuk át:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+6n+1}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{\sqrt{n^2+6n+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Igaz-e a megfordítás?

**Megoldás.** Ha  $(a_n)$  konvergens, akkor létezik olyan  $a \in \mathbb{R}$ , hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $n_0 \in \mathbb{N}$ , hogy minden  $n \geq n_0$ -ra  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Rögzítsünk egy tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -t, például legyen  $\varepsilon = 1$ . Ekkor választható hozzá egy olyan  $n_0$  küszöbszám, hogy a sorozatnak a nála nagyobb indexű elemei az  $(a-1, a+1)$  intervallumban vannak, azaz ezen az intervallumon kívül legfeljebb véges sok tagja lehet a sorozatnak (az  $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$  lehet kívül). Ha  $M$ -mel jelöljük az első  $n_0 - 1$  tag maximumát,  $m$ -mel a minimumát, akkor a sorozatnak felső korlátja lesz a  $\max\{a+1, M\}$  szám, alsó korlátja pedig a  $\min\{a-1, m\}$ .

A megfordítás nem igaz, az  $a_n = (-1)^n$  sorozat korlátos, de nincs határértéke.

#### 4. gyakorlat

A határértékek kiszámításakor jó ötletnek tűnhet, hogy egyszerűen „megpróbálunk behelyettesíteni”, de ez általában nem hoz sikert, pl. mert  $0/0$  típusú eredményt kapunk. Ilyenkor egy ügyes átalakítás segíthet (algebrai, vagy trigonometrikus azonosságok).

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =?$$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \frac{-1}{-1} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1/2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{2(x+1/2)} = \frac{2}{3}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =? \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =? \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =?$$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} &= \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}; \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(-2x+5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{5-2x} = -\frac{5}{9}; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} - 2 + \frac{10}{x^2}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} =? \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} =?$$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+x} + 2}{\sqrt{4+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} = \frac{1}{4}; \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + 3}{\sqrt{1+2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{1+2x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x^2-9) \cdot (\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3) \cdot (\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} =?$$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + \dots + x + 1) = n; \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^m - 1} = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} =?$$

**Megoldás.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x) \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. Mi legyen  $A$  értéke, hogy  $f$  folytonos legyen az  $x = 2$  pontban is?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^3-8}, & \text{ha } x \neq 2 \\ A, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$$

**Megoldás.** A megadott függvény (amely az egész  $\mathbb{R}$ -en értelmezett) akkor lesz folytonos  $x = 2$ -ben, ha az ottani határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+2x+4} = \frac{1}{12},$$

ezért  $f$  folytonos lesz  $x = 2$ -ben, ha  $A = 1/12$ .

## 5. gyakorlat

1. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy a következő függvények minden  $a \in \mathbb{R}$  pontban differenciálhatók és számítsuk is ki a deriváltakat:

$$(a) \quad f(x) = x^n, \quad n \geq 1 \text{ egész}, \quad (b) \quad h(x) = \sin x$$

**Megoldás.**

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + \dots + a^{n-1}) = n \cdot a^{n-1};$$

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cdot \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos a = \cos a.$$

2. Deriváljuk az alábbi függvényeket, felhasználva a deriválási szabályokat.

**Megoldás.**

- (a)  $(2 + x - x^2)' = 1 - 2x,$   
 (b)  $(a^5 + 5a^3x^2 - x^5)' = 10a^3x - 5x^4,$   
 (c)  $((x - a)(x - b))' = 1 \cdot (x - b) + (x - a) \cdot 1 = 2x - a - b,$   
 (d)  $\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)' = \frac{2(1 - x^2) + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2},$   
 (e)  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}},$   
 (f)  $\left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\right),$   
 (g)  $\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right),$   
 (h)  $(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$   
 (i)  $\left((1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3\right)' = -(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3 - 4x(1 - x^2)(1 - x)(1 - x^3)^3 - 9x^2(1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^2,$   
 (j)  $(\cos 2x - 2 \sin x)' = -(\sin 2x) \cdot 2 - 2 \cdot \cos x,$   
 (k)  $((x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha))' = \sin \alpha(x \cos \alpha - \sin \alpha) + \cos \alpha(x \sin \alpha + \cos \alpha) = x \sin 2\alpha + \cos 2\alpha,$   
 (l)  $\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' = \frac{2 \sin x \cos x \sin x^2 - 2x \sin^2 x \cos x^2}{\sin^2 x^2}$   
 (m)  $(e^{-x^2})' = (e^{-x^2}) \cdot (-2x),$   
 (n)  $(\ln \ln \ln x)' = \frac{1}{\ln \ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x},$   
 (o)  $\left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$

3. Legyen  $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ . Mi lesz  $f'(0)$  ?

**Megoldás.** Mivel külön-külön mindegyik tényező deriválja 1, a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály szerint a derivált egy öttagú összeg lesz, minden tagból pontosan az egyik tényező „hiányzik” (amikor öt deriváljuk, a többihez pedig nem nyúlunk). Az öt tag mindegyikében fog szerepelni az  $x$ -es szorzó, kivéve egyet. Emiatt  $f'(0) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)|_{x=0} = 24$ .

4. Az inverzfüggvény deriválási szabályát használva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját (ahol értelmes):

(a)  $f(x) = \sqrt[n]{x},$       (b)  $g(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$

**Megoldás.** Mivel az  $x^n$ , illetve a  $\operatorname{tg} x$  függvények deriváltját már tudjuk, az inverzfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' \Big|_{x=b} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot b^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot b^{\frac{1}{n}-1}.$$

$$\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x\right)' \Big|_{x=b} = \frac{1}{\operatorname{tg}'(a)} \Big|_{a=\operatorname{arc} \operatorname{tg} b} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 a}} \Big|_{a=\operatorname{arc} \operatorname{tg} b} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(a)} \Big|_{a=\operatorname{arc} \operatorname{tg} b} = \frac{1}{1 + b^2}.$$

5. Mennyi az  $f(x) = \sin x + x$  függvény inverzének deriváltja a  $b = 1 + \frac{\pi}{2}$  pontban?

**Megoldás.** Ha  $f$  invertálható, differenciálható az  $a$  pontban és  $f'(a) \neq 0$ , akkor  $f^{-1}$  differenciálható a  $b = f(a)$  pontban és  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(\frac{1}{f^{-1}(b)})}$ . Ezt alkalmazva

$$(f^{-1})' \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'(\pi/2)} = \frac{1}{1 + \cos x} \Big|_{x=\pi/2} = 1.$$

## 6. gyakorlat

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

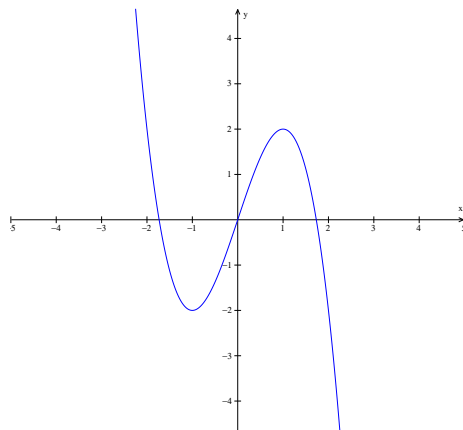
$$(a) \quad f(x) = 3x - x^3, \quad (b) \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (c) \quad h(x) = x + \frac{1}{x}, \quad (d) \quad k(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

### Megoldás.

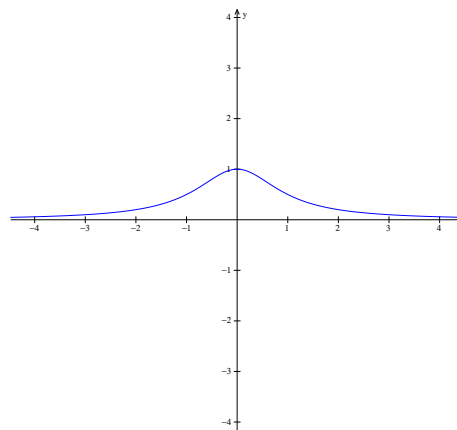
(a) A függvény egész  $\mathbb{R}$ -en értelmezett, zérushelye van a  $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$  pontokban,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .  $f'(x) = 3 - 3x^2$ ,  $f''(x) = -6x$ ,  $f'''(x) = -6$ . A derivált zérushelyei (lehetséges lokális szélsőérték helyek):  $-1, 1$ , a második derivált zérushelyei (lehetséges inflexiós pontok):  $0$ . Mivel  $f$  polinom, ezért mindenhol folytonos. Az alábbi táblázat segít eldönteni  $f$  alakú tulajdonságait:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	↘ konvex	lokális minimum	↗ konvex	inflexiós pont	↗ konkáv	lokális maximum	↘ konkáv

A derivált mindkét zérushelyén lokális szélsőérték van, mert ott a második derivált nem nulla. Az  $x = 0$ -ban inflexiós pont van, mert a harmadik derivált ott nem nulla (illetve a  $0$ -ban a függvény konvexből konkávba vált át). A rajzhoz még számoljuk ki a függvényértékeket az  $x = \pm 1$ -ben, azaz a lokális minimum és maximum értékeit:  $f(-1) = -2$ ,  $f(1) = 2$ . A függvény értékkészlete az egész  $\mathbb{R}$ .



(e)  $f(x) = 3x - x^3$



(f)  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(b) A  $g$  függvény mindenhol értelmezett, nincs zérushelye,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Rövid számolásal adódik, hogy  $g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ,  $g''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ . Ennek megfelelően a derivált zérushelye az  $x = 0$ , a második derivált zérushelyei az  $x = -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$  pontok.

$x$	$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	$-1/\sqrt{3}$	$(-1/\sqrt{3}, 0)$	$0$	$(0, 1/\sqrt{3})$	$1/\sqrt{3}$	$(1/\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗ konvex	inflexiós pont	↗ konkáv	lokális maximum	↘ konkáv	inflexiós pont	↘ konvex

Valóban inflexiós pontokról van szó, mert a függvény konvexből konkávba vált azokban a pontokban. A függvény értékei az inflexiós pontokban, illetve a lokális szélsőérték helyen:  $f(0) = 1$ ,  $f(\pm 1/\sqrt{3}) = 3/4$ . A függvény egy racionális törtefüggvény, amely mindenhol értelmezett, így mindenhol folytonos. Mivel zérushely nincs, a végtelenbeli limeszekből és a szélsőérték helyen felvett értékből a folytonosság miatt következik, hogy  $g$  értékkészlete a  $(0, 1]$  intervallum.

(c) A  $h$  függvény mindenhol értelmezett, kivéve az  $x = 0$  pontot. Ettől a ponttól eltekintve mindenhol máshol folytonos. Zérushelye nincs.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \infty$ . Az első és második deriváltak:  $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ,  $h''(x) = \frac{2}{x^3}$ . A derivált zérushelyei:  $-1$  és  $1$ , a második deriváltnak nincs zérushelye.



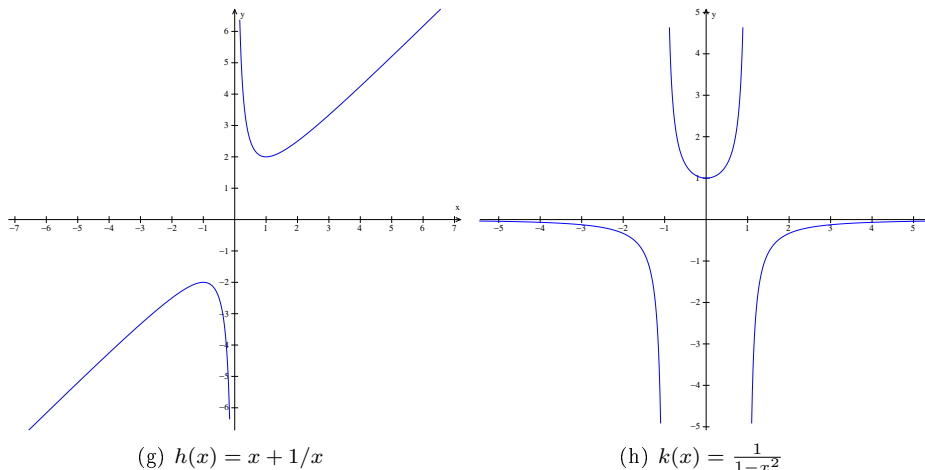
$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$		$-$	$0$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ konkáv	lokális maximum	$\searrow$ konkáv	nincs értelmezve	$\searrow$ konvex	lokális minimum	$\nearrow$ konvex

$h(-1) = -2$ ,  $h(1) = 2$ . A végtelenbeli és a szakadási pontbeli határértékeket figyelembevéve, a függvény értékkészlete a  $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$  halmaz.

(d) A  $k$  függvény értelmezési tartománya a  $D(k) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  halmaz, továbbá  $D(k)$  minden pontjában folytonos. A limeszek  $\pm\infty$ -ben és  $\pm 1$ -ben:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+} k(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-} k(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+} k(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1-} k(x) = -\infty$ . Zérushely nincs,  $k(0) = 1$ . A deriváltak:  $k'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ ,  $k''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$ . A derivált egyetlen zérushelye  $x = 0$ , a második deriváltnak nincs zérushelye  $D(k)$ -ban.

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	$0$	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	$+$	$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$ konkáv	nincs értelmezve	$\searrow$ konvex	lokális minimum	$\nearrow$ konvex	nincs értelmezve	$\nearrow$ konkáv

A 0-ban lokális minimum van, mert a második derivált pozitív, a minimum értéke  $k(0) = 1$ , ez viszont nem globális minimum, hiszen a szakadási pontokban van  $-\infty$  határérték is. Az értékkészlet az  $R(k) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$  halmaz.



2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális és globális szélsőérték helyeit!

(a)  $f(x) = 2x - x^4$ ,      (b)  $g(x) = e^x \sin x$ .

**Megoldás.** (a)  $f'(x) = 2 - 4x^3$ , ennek a zérushelye  $x_0 = 1/\sqrt[3]{2}$ . Tehát ebben a pontban lehet lokális szélsőérték hely. Mivel  $f''(x_0) < 0$ , ezért  $x_0$ -ban lokális maximum van, a maximum értéke  $f(x_0) \approx 1,19$ . Ez egyben globális maximum is, mert a függvény limesze a  $\pm\infty$ -ben  $-\infty$ .

(b)  $f'(x) = e^x (\sin x + \cos x)$ ,  $f''(x) = 2e^x \cos x$ . Ott lehet lokális szélsőérték hely, ahol  $f'(x) = 0$ , azaz az  $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$  pontokban ( $k \in \mathbb{Z}$ ). A második derivált előjele ezekben a pontokban páros  $k$ -ra negatív, páratlan  $k$ -ra pozitív. Ebből következően  $f$ -nek lokális maximuma van az  $x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi$  helyeken és lokális minimuma van az  $x = \frac{3\pi}{4} + (2l+1)\pi$  pontokban ( $l \in \mathbb{Z}$ ). A függvénynek azonban nincs globális maximuma, illetve minimuma, mert  $f$  értékei a lokális maximumhelyeken végtelenhez tartanak, a minimumhelyeken felvett értékei pedig  $-\infty$ -hez. Például a maximumhelyeken

$$f(x_{\max}^{(l)}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2l\pi} \rightarrow \infty, \text{ ha } l \rightarrow \infty.$$

3. (a) Egy  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre  $f'(0) = 0$ . Igaz-e, hogy a 0-ban lokális szélsőértéke van?  
 (b) Egy  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre  $f''(0) = 0$ . Igaz-e, hogy a 0-ban inflexiós pontja van?

**Megoldás.** Egyik sem igaz. Az első esetben az  $f(x) = x^3$  függvény szigorúan monoton növekvő, így nyilván nincs lokális szélsőértéke az  $x = 0$ -ban, bár ott a deriváltja 0. A (b) részhez az  $f(x) = x^4$  függvényre  $f''(0) = 0$ , de sehol sincs inflexiós pontja, hiszen végig konvex.

4. Írjuk fel az  $f(x) = \cos x + \frac{2}{x^2}$  függvény érintőjének egyenletét az  $x_0 = 2$  pontban.

**Megoldás.** Az érintő egyenlete az  $x_0$  pontban:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ . Mivel  $f'(x) = -\sin x - \frac{4}{x^3}$  és  $f(2) = \cos 2 + 1/2$ , ezért a keresett érintő egyenlete

$$y = -\left(\sin 2 + \frac{1}{2}\right)(x - 2) + \cos 2 + \frac{1}{2}.$$

5. Írjuk fel a  $k(x) = \frac{1}{1-x^2}$  függvény érintőjének egyenletét az  $x_0 = 2$  pontban. Húzzuk be ezt az egyenest az 1. (d) feladat ábrájába!

**Megoldás.** Az érintő egyenlete az  $x_0$  pontban:  $y = k'(x_0)(x - x_0) + k(x_0)$ . Mivel  $k'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$  és  $k(2) = -1/3$ , ezért a keresett érintő egyenlete  $y = \frac{4}{9}x - \frac{11}{9}$ .

6. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

**Megoldás.**

$$(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1),$$

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x,$$

$$(\log_x e)' = \left(\frac{\ln e}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\left(\ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})\right)' = \frac{1}{(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})} \cdot \left(e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot 2\right),$$

$$\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + \sqrt{1+x^2})\right)' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

7. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

Hogyan kell megválasztani  $a$  és  $b$  értékét, ha azt akarjuk, hogy  $f$  differenciálható legyen  $x_0 = 1$ -ben is?

**Megoldás.** A függvény két részből van összerakva, egy paraboladarabból és egy félegyenesből áll. Azt szeretnénk, hogy a függvénygrafikon két része „csatlakozzon” (azaz  $f$  legyen folytonos) és a két darab illeszkedése legyen „sima”, ne törjön meg (azaz legyen  $f$  differenciálható). A folytonossághoz az kell, hogy a jobb és bal oldali határértékek megegyezzenek, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = a + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

azaz  $1 = a + b$ -nek teljesülnie kell, hogy  $f$  egyáltalán folytonos legyen. A másik követelmény a jobb és bal oldali deriváltak egyezése, azaz

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = a = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = f'_+(1),$$

azaz  $a = 2$  és  $b = 1 - a = 1 - 2 = -1$ .

## 7. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital-szabállyal.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} =? \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} =? \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} =?$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =? \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x =? \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} =?$$

**Megoldás.**

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0;$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1;$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos ax} (-\sin ax)a}{\frac{1}{\cos bx} (-\sin bx)b} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \frac{1}{\cos^2 ax}}{b^2 \frac{1}{\cos^2 bx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cos^2 bx}{b^2 \cos^2 ax} = \frac{a^2}{b^2}.$$

2. Írjuk fel az alábbi függvények  $n$ -edfokú  $x_0$ -körüli  $T_{n,x_0}(x)$  Taylor-polinomját.

$$(a) f(x) = e^x, T_{6,0}(x) = ?$$

$$(b) g(x) = \sqrt{1+x}, T_{2,0}(x) = ?$$

$$(c) h(x) = x^x, T_{2,1}(x) = ?$$

**Megoldás.**

$$(a) T_{f, 6, 0}(x) = \sum_{n=0}^6 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^6 \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!};$$

$$(b) T_{g, 2, 0}(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8};$$

$$(c) T_{h, 2, 1}(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{h^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (x-1) + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2.$$

3. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \left( x \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right).$$

**Megoldás.** Használjuk a Taylor-formula Lagrange-maradéktagos alakját. Eszerint ha  $f$  legalább  $(n+1)$ -szer differenciálható az  $a$  pont egy környezetében, akkor

$$f(x) = T_{f, n, a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

ahol  $\xi$  egy  $a$  és  $x$  közötti érték. Az  $f = \sin$  függvény akárhányszor differenciálható és a megadott közelítő formula éppen  $T_{f, 3, 0}(x)$ , sőt, mivel a függvény negyedik deriváltja a 0-ban  $\sin 0 = 0$ , ezért valójában  $x - \frac{x^3}{6} = T_{f, 4, 0}(x)$  is igaz. Mivel  $|x| \leq 1/2$ , ezért

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{6} \right) \right| = |f(x) - T_{f, 4, 0}(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \right| \leq \frac{1}{5!} |x^5| \leq \frac{1}{5!} \left( \frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{3840}.$$

4. Számoljuk ki  $e$  értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal csak a négy alpművelet felhasználásával!

**Megoldás.** Az  $e^x$  már kiszámolt Taylor-polinomját használva

$$|e^x - T_{n, 0}(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4} \Leftrightarrow (n+1)! > 3 \cdot 10^4 \Leftrightarrow n+1 \geq 8 \Leftrightarrow n \geq 7.$$

Tehát  $e$  egy jó közelítő értéke:

$$\hat{e} = T_{n,0}(1) = \sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2,718253968,$$

ami a pontosabb  $e = 2,718281828$  értékkel összehasonlítva az első 4 tizedesjegyben valóban megegyezik.

## 8. gyakorlat

1. Végezzük el az alábbi műveleteket:

$$(a) (1+i)(3-2i) =? \quad (b) (i-2)(5-3i) =? \quad (c) (1+\sqrt{3}i)^3 =? \\ (d) 1/i =? \quad (e) (1+i)/(3-2i) =? \quad (f) (5+i)/(1+i) =?$$

**Megoldás.** (a)  $(1+i)(3-2i) = 3-2i+3i+2 = 5+i$ ;

(b)  $(i-2)(5-3i) = 5i+3-10+6i = -7+11i$ ;

(c)  $(1+\sqrt{3}i)^3 = (1+\sqrt{3}i)^2(1+\sqrt{3}i) = (1-3+2\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 2(\sqrt{3}i-1)(1+\sqrt{3}i) = -8$ ;

(d)  $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$ ;

(e)  $\frac{1+i}{3-2i} = \frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{1+5i}{13}$ ;

(f)  $\frac{5+i}{1+i} = \frac{5+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(5+i)(1-i)}{2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$ .

2. Határozzuk meg azokat a  $c+di$  számokat, melyek négyzete  $20i-21$ .

**Megoldás.** A  $(c+di)^2 = c^2 - d^2 + 2cdi = 20i - 21$  egyenlőség akkor áll fenn, ha a valós és képzetes részek megegyeznek, azaz  $c^2 - d^2 = -21$  és  $2cd = 20$ . Az ezekből kapott másodfokú egyenletet megoldva  $c = 2, d = 5$ , illetve  $c = -2, d = -5$  megoldásokat kapjuk.

3. Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:

$$(a) 1+i, \quad (b) 1-i, \quad (c) \sqrt{3}+i, \quad (d) -1-\sqrt{3}i.$$

**Megoldás.**

$$(a) 1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$(b) 1-i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

$$(c) \sqrt{3}+i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$(d) -1-\sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

4. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

$$(a) (1+i)^5 =? \quad (b) \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{2010} =?$$

**Megoldás.** (a)  $(1+i)^5 = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^5 = \sqrt{32} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -4-4i$ ;

(b)  $\left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{2010} = \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)^{2010} = \left( \cos \frac{8040\pi}{3} + i \sin \frac{8040\pi}{3} \right) = \left( \cos 2680\pi + i \sin 2680\pi \right) = 1$ .

5. Oldjuk meg az  $x^3 = 1$ ,  $x^4 = -4$  és az  $x^6 = 1$  egyenleteket!

**Megoldás.** (a)  $x^3 = 1 \iff x^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \iff x = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2)$ , azaz  $x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ ,  $x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

(b)  $x^4 = -4 \iff x^4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) \iff x = \sqrt[4]{2}(\cos \frac{\pi+2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{4}) \quad (k = 0, 1, 2, 3)$ .

(c)  $x^6 = 1 \iff x^6 = \cos 0 + i \sin 0 \iff x = \cos \frac{0+2k\pi}{6} + i \sin \frac{0+2k\pi}{6} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ .

6. Számítsuk ki  $i^n$ -t, ahol  $n \in \mathbb{N}$ .

**Megoldás.**  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  és inntől kezdve ismétlődik, azaz

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 4k \\ i, & \text{ha } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{ha } n = 4k + 2 \\ -i, & \text{ha } n = 4k + 3 \end{cases}$$

7. (a) Vezessük le a  $\sin(\alpha \pm \beta)$ -ra és  $\cos(\alpha \pm \beta)$ -ra tanult addíciós képleteket, felhasználva a komplex számok trigonometrikus alakjával végzett aritmetikus műveleteket (a szorzás szabálya felhasználható).

(b) Fejezzük ki  $\cos 3\varphi$ -t  $\sin \varphi$  és  $\cos \varphi$  segítségével.

**Megoldás.** (a) Legyen  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $w = \cos \beta + i \sin \beta$  két egység hosszúságú komplex szám. Szorozzuk össze őket kétféle módon:  $z \cdot w = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)i$ , a trigonometrikus alakok szorzása után pedig  $z \cdot w = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ . A két végeredmény természetesen ugyanaz, ezért a valós és képzetes részüket megegyezik. Kicserélve  $\beta$ -t  $(-\beta)$ -ra kapjuk a másik két azonosságot.

(b) Tekintsük a  $\cos \varphi + i \sin \varphi$  komplex számot és emeljük köbre kétféleképpen:  $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi i \sin \varphi + 3 \cos \varphi i^2 \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)$ . Összehasonlítva a kétféle úton kapott eredmény valós részét kapjuk, hogy  $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$ .

## 9. gyakorlat

1. Az alapintegrálok felhasználásával számoljuk ki a primitív függvényeket.

**Megoldás.**

$$(a) \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C;$$

$$(b) \int \frac{\sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}} dx = \int \frac{x^{3/10}}{x^{1/6}} dx = \int x^{2/15} dx = \frac{x^{17/15}}{17/15} + C = \frac{15}{17} \sqrt[15]{x^{17}} + C;$$

$$(c) \int (6 \sin x + 5 \cos x) dx = 6 \int \sin x dx + 5 \int \cos x dx = -6 \cos x + 5 \sin x + C;$$

$$(d) \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$(e) \int \frac{5 \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = 5 \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx = 5 \int (\cos x - \sin x) dx = 5(\sin x + \cos x) + C;$$

$$(f) \int \frac{-5}{2 + 2x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{1}{1 + x^2} dx = -\frac{5}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

2. Az  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$  formulát használva számítsuk ki a primitív függvényeket.

**Megoldás.**

$$(a) \int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + C;$$

$$(b) \int (2x-3)^{10} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^{11}}{11} + C = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + C;$$

$$(c) \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx = \int (1-x)^{-3/5} dx = -\frac{(1-x)^{2/5}}{2/5} + C = -\frac{5}{2} (1-x)^{2/5} + C$$

3. Számoljuk ki az alábbi  $f^n(x)f'(x)$  és  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  alakú integrandusok primitív függvényét.

**Megoldás.**

$$(a) \int x^2(2x^3 + 4) dx = \frac{1}{6} \int 6x^2(2x^3 + 4) dx = \frac{1}{6} \frac{(2x^3 + 4)^2}{2} + C = \frac{(2x^3 + 4)^2}{12} + C;$$

$$(b) \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

$$(c) \int \sin^4 x \sin 2x dx = 2 \int \sin^5 x \cos x dx = 2 \frac{\sin^6 x}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{3} + C;$$

$$(d) \int \frac{4 \sin x}{5 \cos x + 4} dx = -\frac{4}{5} \int \frac{-5 \sin x}{5 \cos x + 4} dx = -\frac{4}{5} \ln |5 \cos x + 4| + C;$$

$$(e) \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C.$$

4. Primitív függvény kiszámítása parciális integrálással.

**Megoldás.**

$$(a) \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$(b) \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

$$(c) \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C;$$

$$(d) \int \arctg x dx = \int 1 \cdot \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$$

$$(e) \int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) dx = \frac{e^{2x}}{2} \operatorname{sh}(4x) - 2 \int e^{2x} \operatorname{ch}(4x) dx = \frac{e^{2x}}{2} \operatorname{sh}(4x) - 2 \left( \frac{e^{2x}}{2} \operatorname{ch}(4x) - 2 \int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) dx \right) = e^{2x} \left( \frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x) \right) + 4 \int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) dx.$$

A kapott egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\int e^{2x} \operatorname{sh}(4x) dx = -\frac{e^{2x}}{3} \left( \frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x) \right) + C.$$

## 10. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat alkalmas helyettesítéssel, vagy akár más módon is.

**Megoldás.**

(a) A  $t = \sqrt{x}$  helyettesítéssel  $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ , így

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \cdot 2t dt = 2 \left( te^t - \int e^t dt \right) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C;$$

(b) A  $t = (2/3)x$  helyettesítéssel  $x = (3/2)t \Rightarrow dx = 3/2 dt$ , így

$$\int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{3/2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{4} \arcsin t + C = \frac{1}{4} \arcsin \left( \frac{2}{3}x \right) + C;$$

(c) A  $t = \sqrt{x}$  helyettesítéssel  $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ , így

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{1+t} dt = \int 2 - \frac{2}{1+t} dt = 2t - 2 \ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C;$$

(d) A  $t = x/5$  helyettesítéssel  $x = 5t \Rightarrow dx = 5 dt$ , így

$$\int \frac{1}{25+x^2} dx = \frac{1}{25} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{5})^2} dx = \frac{1}{25} \int \frac{5}{1+t^2} dt = \frac{1}{5} \arctg t + C = \frac{1}{5} \arctg \left( \frac{x}{5} \right) + C;$$

(e) A  $t = e^x$  helyettesítéssel  $x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$ , így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C;$$

(f) A  $t = \arcsin x$  helyettesítéssel  $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$ , így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2t dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C; \end{aligned}$$

(g) A  $t = \sqrt[3]{1+x^3}$  helyettesítéssel  $x = \sqrt[3]{t^3-1} \Rightarrow dx = (t^3-1)^{-2/3} \cdot t^2 dt$ , így

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \int (t^3-1)^{2/3} t \cdot t^2 (t^3-1)^{-2/3} dt = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (1+x^3)^{4/3} + C;$$

(h) A  $t = x-1$  helyettesítéssel  $x = t+1 \Rightarrow dx = dt$ , így

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx &= \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}} dt = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{100}} dt = \int \frac{dt}{t^{97}} + 3 \int \frac{dt}{t^{98}} + 3 \int \frac{dt}{t^{99}} + \int \frac{dt}{t^{100}} = \\ &= -\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{t^{96}} - \frac{3}{97} \cdot \frac{1}{t^{97}} - \frac{3}{98} \cdot \frac{1}{t^{98}} - \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{t^{99}} + C = \\ &= -\left( \frac{1}{96} \cdot \frac{1}{(x-1)^{96}} + \frac{3}{97} \cdot \frac{1}{(x-1)^{97}} + \frac{3}{98} \cdot \frac{1}{(x-1)^{98}} + \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{(x-1)^{99}} \right) + C; \end{aligned}$$

(i) A  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$  és az  $\operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{x}{2} \right)$  azonosságokból kapjuk, hogy  $\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} \left( \frac{x}{2} \right)}{1 - \operatorname{th}^2 \left( \frac{x}{2} \right)}$ . A

$t = \operatorname{th} \left( \frac{x}{2} \right)$  helyettesítéssel  $x = 2 \operatorname{ar} \operatorname{th} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1-t^2} dt$ ,  $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$ , így

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \int \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1-t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{th} \left( \frac{x}{2} \right) \right| + C;$$

(j) A  $t = \ln x$  helyettesítéssel  $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$ , így

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x) dx &= \int e^t \cdot \sin t dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \left( e^t \cos t + \int e^t \sin t dt \right) = \\ &= e^t (\sin t - \cos t) - \int e^t \sin t dt; \end{aligned}$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int e^t \cdot \sin t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C,$$

amiből adódik az eredeti feladat megoldása:

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

(k) A  $t = \sqrt{x}$  helyettesítéssel  $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ , így

$$\begin{aligned} \int x \sin \sqrt{x} dx &= \int 2t^3 \sin t dt = 2 \left( -t^3 \cos t + 3 \int t^2 \cos t dt \right) = \\ &= -2t^3 \cos t + 6 \left( t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \right) = \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \left( -t \cos t + \int \cos t dt \right) = \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \sin t + C = \\ &= \cos \sqrt{x} \left( -2\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} \right) + \sin \sqrt{x} (6x - 12) + C; \end{aligned}$$

(l) Legyen  $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$ , ekkor a  $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$  helyettesítéssel  $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ , így

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int 1 dt = t + C = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

## 11. gyakorlat

Határozott integrálok kiszámításához az alábbi tétel szerint elég az integrandus egy primitív függvényét ismerni.

**1. Tétel (Newton–Leibniz).** Ha  $f$  folytonos az  $[a, b]$  intervallumon és  $F$  primitív függvénye  $f$ -nek, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

(a)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x dx &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0; \\ \int_0^1 3x^5 - x^2 dx &= \left[ \frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \\ \int_0^1 e^x dx &= [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx &= [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0; \\ \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx &= -[\ln |\cos x|]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln \cos \frac{\pi}{3} + \ln \cos \frac{\pi}{6} = -\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$



(b) A primitív függvényt mindkét esetben parciális integrálással határozhatjuk meg.

Egy primitív függvény  $xe^x - e^x$ , ezért

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^2 = (2e^2 - e^2) - (0e^0 - e^0) = e^2 + 1.$$

Az  $x \mapsto x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$  függvény egy primitív függvény, így

$$\int_0^3 \operatorname{arctg} x dx = \left[ x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^3 = \left( 3 \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} \ln(1+3^2) \right) - 0 = 3 \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} \ln 10.$$

(c) Ezekben a feladatokban helyettesítéses integrálással lehet egy-egy primitív függvényt megkeresni.

A  $t = 3x + 4$  helyettesítés után  $x = \frac{t-4}{3}$ ,  $dx = \frac{1}{3} dt$ , így

$$\int (3x+4)^3 dx = \int \frac{t^3}{3} dt = \frac{t^4}{12} + C = \frac{(3x+4)^4}{12} + C,$$

ezért

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx = \left[ \frac{(3x+4)^4}{12} \right]_1^2 = \frac{7599}{12} = 633,25.$$

A  $t = \sqrt{x}$  helyettesítés után  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , így

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int te^t dt = 2 \left( te^t - \int e^t dt \right) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C,$$

ezért

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \left[ e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) \right]_0^1 = 2.$$

A  $t = \arcsin x$  helyettesítés után  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ , így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2t dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C, \end{aligned}$$

ezért

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Végül a  $t = e^x$  helyettesítés után  $x = \ln t$ ,  $dx = \frac{1}{t} dt$ , így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C,$$

vagyis

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = [e^x - \ln(e^x+1)]_0^1 = (e - \ln(e+1)) - (1 - \ln 2).$$

2. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!

(a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$ ;

(b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x+2\}$ ;

(c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ ;

(d) az  $y = \sin x$  és az  $y = (2/\pi)x$  görbék által határolt síkidom az első síknegyedben.

**Megoldás.** (a) A megadott parabola az  $x = \pm 2$  pontokban metszi az  $x$ -tengelyt, a keresett terület pedig az  $y = 4 - x^2$  függvény grafikonja alatti terület a  $[-2, 2]$  intervallumon, ami  $\int_{-2}^2 4 - x^2 dx = [4x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$ .

(b) A kérdéses síkidom nem más, mint az  $y = x + 2$  egyenes és az  $y = x^2$  parabola által bezárt síkrész. Az egyenes és a parabola metszéspontjainak abszcisszái  $-1$  és  $2$ . A keresett területet nem más, mint a  $[-1, 2]$  intervallumon értelmezett  $f(x) = x + 2$  grafikonja alatti terület és a  $g(x) = x^2$  grafikonja alatti terület különbsége. A Newton-Leibniz formulából az első terület  $\int_{-1}^2 x + 2 dx = [\frac{x^2}{2} + 2x]_{-1}^2 = (2 + 4) - (\frac{1}{2} - 2) = \frac{15}{2}$ , míg a második  $\int_{-1}^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - (-\frac{1}{3}) = 3$ . Tehát a kérdéses terület  $\frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$ .

(c) A kérdéses terület két integrál különbségként áll elő: a  $[0, 1]$  intervallumon értelmezett  $f(x) = \sqrt{x}$  és a  $g(x) = x^2$  függvények grafikonja alatti területek különbségként. A terület tehát  $\int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .

(d) A keresett terület most is megkapható két integrál különbségként:  $T = \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \int_0^{\pi/2} (2/\pi)x dx = 1 - \pi/4$ .

## 12. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

(a)  $f(x, y) = x^2$       (b)  $f(x, y) = y^3$       (c)  $f(x, y) = x^2 + y^3$

(d)  $f(x, y) = x^2 y^4$       (e)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$       (f)  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{e^y}$

**Megoldás.** (a)  $\partial_1 f(x, y) = 2x, \partial_2 f(x, y) = 0$ .

(b)  $\partial_1 f(x, y) = 0, \partial_2 f(x, y) = 3y^2$ .

(c)  $\partial_1 f(x, y) = 2x, \partial_2 f(x, y) = 3y^2$ .

(d)  $\partial_1 f(x, y) = 2xy^4, \partial_2 f(x, y) = 4x^2 y^3$ .

(e)  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ , így  $\partial_1 f(x, y) = e^{-y^2} e^{-x^2} (-2x), \partial_2 f(x, y) = e^{-x^2} e^{-y^2} (-2y)$ .

(f)  $\partial_1 f(x, y) = 2 \frac{xy^2}{e^y}, \partial_2 f(x, y) = x^2 \left( \frac{2ye^y - e^y y^2}{(e^y)^2} \right) = x^2 \left( \frac{2y - y^2}{e^y} \right)$ .

2. Határozzuk meg a  $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f, \partial_1^2 f, \partial_2^2 f, \partial_1 \partial_3 f, \partial_1 \partial_2 \partial_3 f, \partial_3 \partial_2 \partial_1 f$  függvényeket az alábbi függvények esetén:

(a)  $f(x, y, z) = 5z,$

(b)  $f(x, y, z) = x + y + z,$

(c)  $f(x, y, z) = ze^{x-y}.$

**Megoldás.** (a)  $\partial_1 f(x, y, z) = 0, \partial_2 f(x, y, z) = 0, \partial_3 f(x, y, z) = 5$ . Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(b)  $\partial_1 f(x, y, z) = 1, \partial_2 f(x, y, z) = 1, \partial_3 f(x, y, z) = 1$ . Ebből adódik, hogy minden magasabb rendű parciális deriváltfüggvény 0.

(c)  $\partial_1 f(x, y, z) = ze^{x-y}, \partial_2 f(x, y, z) = -ze^{x-y}, \partial_3 f(x, y, z) = e^{x-y}$ . A másodrendű deriváltak:  $\partial_1^2 f(x, y, z) = \partial_1 \partial_1 f(x, y, z) = ze^{x-y}, \partial_2^2 f(x, y, z) = \partial_2 \partial_2 f(x, y, z) = ze^{x-y}, \partial_1 \partial_3 f(x, y, z) = e^{x-y}$ . A harmadrendű deriváltak:  $\partial_1 \partial_2 \partial_3 f(x, y, z) = -e^{x-y}, \partial_3 \partial_2 \partial_1 f(x, y, z) = -e^{x-y}$ .

3. Mi lesz a  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvény Jacobi-mátrixa, ha  $g(x, y) =$

(a)  $(x, y)$       (b)  $(x^4 + x^2 y^2 + y^4, x^4 + x^2 y^2 + y^4)$       (c)  $(e^x \cos y, e^x \sin y)$

(d)  $(e^{x^2 + \operatorname{sh} 3x} \cos y, e^x \sin(y + \ln 2y))$

**Megoldás.** Ha  $f = (f_1, f_2)$ , akkor

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}.$$

Ennek megfelelően  $g'(x, y) =$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 4x^3 + 2xy^2 & 4y^3 + 2yx^2 \\ 4x^3 + 2xy^2 & 4y^3 + 2yx^2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} e^{x^2 + \operatorname{sh} 3x} (2x + 3 \operatorname{ch} 3x) \cos y & -e^{x^2 + \operatorname{sh} 3x} \sin y \\ e^x \sin(y + \ln 2y) & e^x \cos(y + \ln 2y) (1 + 1/y) \end{pmatrix}$$

4. Számítsuk ki  $f'(x, y, z)$ -t, ha  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) =$

$$(a) (x^2y, y + z) \quad (b) (x^y, x^{y^z})$$

**Megoldás.**

$$(a) \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ y^z x^{y^z-1} & x^{y^z} (\ln x) z y^{z-1} & x^{y^z} (\ln x) y^z \ln y \end{pmatrix}$$

5. Számítsuk ki  $f''(3, 4)$ -et, ahol

$$(a) f(x, y) = xy \quad (b) f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \quad (c) f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

**Megoldás.** Ha  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , akkor

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f & \partial_2 \partial_1 f \\ \partial_1 \partial_2 f & \partial_2^2 f \end{pmatrix}.$$

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 140 & 48 \\ 48 & 210 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} \frac{7}{25^2} & -\frac{24}{25^2} \\ -\frac{24}{25^2} & -\frac{7}{25^2} \end{pmatrix}$$

6. Mutassuk meg, hogy ha  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ , illetve  $u(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ , akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) = 0.$$

**Megoldás.** (a)

$$\partial_1^2 (\ln(x^2 + y^2)) = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2^2 (\ln(x^2 + y^2)) = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

az összegük valóban nulla.

(b)

$$\partial_1^2 \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2^2 \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

az összeg itt is nulla.