

Readme

Balog Dániel

2009. december 24.

A jegyzet Dr. Simon Péter: Kalkulus I (*mflnla01*) órái alapján készült a 2009/2010 tanév első félévében.

A jegyzet letölthető a honlapomról: <http://balogdani.web.elte.hu/Kalkulus/>.

A jegyzet kinyomtatható, nyomtatott formában, illetve e-mailben/IM programokkal ezen readme csatolásával szabadon terjeszthető.

Más tárhelyen való elhelyezéshez e-mailben kell értesíteni! Címem: skippersd@gmail.com

A jegyzet nem módosítható. Amennyiben hibát találsz benne, kérlek értesíts a fenti címen.

Külön köszönet:

Dr. Simon Péternek, amiért a jegyzetet szabadidejében átnézte, valamint Monoki Sándornak, a hasznos magyarázatokért.

utóirat:

A jegyzet teljesen ingyen használható, de a közzisöröket szívesen fogadom ☺

Kalkulus

Balog Dániel

2009.09.08

1. Halmazok

1.1. Alapjai

A halmaz olyan valami, amiről tudjuk, hogy mik vannak benne, és mik nincsenek.

(Lehet pontosabban definiálni, de mindegy, semmi szükség nem lesz rá)

Pl.: $A = \{1; 2; 3; 8\}$ $2 \in A$ $5 \notin A$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$

Jelölések: $\forall$ Minden $\exists$ Van olyan, létezik (ezek az ún. kvantorok)

$\rightarrow$ Következik $\iff$ Ekvivalens

Részhalmaz: $A \subset B$, ha $\forall x \in A$ -ra $x \in B$

Magyarul: A minden eleme B -ben is benne van, de B -nek lehet olyan eleme, ami nincs benne A -ban.

Tehát, ha két halmaz egyenlő, akkor $A \subset B$, $B \subset A$, a két halmaz részhalmaza egymásnak.

Valós részhalmaz: $A \neq B$

Üres halmaz: jele: $\emptyset$ Nincs eleme.

1.2. Halmazműveletek:

$A \cup B$ Az A és B elemei együttesen. $x \in A \cup B \iff x \in A$ vagy $x \in B$

$A \cap B$ A és B közös elemei. $x \in A \cap B \iff x \in A$ és $x \in B$

$A \setminus B$ Azon elemek, amelyek csak A -ban vannak benne, de B -ben nem. $x \in A \setminus B \iff x \in A$ és $x \notin B$

Pl.: $A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{3; 4; 5\}$ $A \setminus B = \{1; 2\}$ $B \setminus A = \{4; 5\}$

1.2.1. Komplementer halmaz:

A^c (B re vonatkozóan) Azon elemek, melyek $x \notin A$; $x \in B$

$A^c = B \setminus A$ (Lehet A^c helyett $\bar{A}$) pl.: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100\}$; $B = \{\mathbb{N}\}$ $A^c = \{x \in \mathbb{N} : x > 100\}$

1.2.2. Rendezett pár:

$\exists$ halmazok, amelyeknek elemei halmazok.

Legyen például: $C = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

$|C| = 7$ C elemeinek száma

$C_1 = \{2\}$ $C_2 = \{\{2\}\}$

$C_1 \in C$ $C_2 \subset C$

A, B két halmaz, $a \in A; b \in B$

Az (a, b) rendezett pár - szó szerint az a -ból és b -ből álló pár.

Formális definíció: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

A "rendezett" annyit jelent, hogy a sorrendjük is számít: $(a, b) \neq (b, a)$ (de $\{a, b\} = \{b, a\}$).

(Nyilván lehetne rendezett hármast, négyeseket stb. is definiálni ugyanígy: $(a, b, c), (a, b, c, d), \dots$)

1.2.3. Descartes-szorzat

$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ b \in B\}$

Az olyan rendezett párok halmaza, amelyek első eleme A -beli, a második B -beli.

Pl.: $A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{4; 5\}$

$A \times B = \{(1, 4); (1, 5); (2, 4); (2, 5); (3, 4); (3, 5)\}$

(Vehetnénk kettőnél több halmazt is - háromnak a szorzata rendezett hármastokból áll, stb.)

1.2.4. Reláció

A reláció olyan halmaz, amely két másik halmaz Descartes-szorzatának részhalmaza - vagyis olyan halmaz, ami rendezett párokból áll.

pl: $M = \{\text{Magyar szavak halmaza}\}$

$A = \{\text{Angol szavak halmaza}\}$

$M \times A$ olyan párokból áll, amiknek az első tagja egy magyar, a második egy angol szó. ($A \times M$ azokból a párokból áll, ahol az angol szó áll elől, a magyar hátul. Ez két különböző halmaz.)

$r \subset M \times A$, r azokból a párokból áll, ahol az angol és a magyar szó ugyanazt jelenti.

(Angol-magyar szótár. Részhalmaza a szópárok összességének.)

$(\text{kutya}; \text{dog}) \in M \times A$

$(\text{dog}; \text{kutya}) \notin M \times A$

$(\text{kutya}; \text{dog}) \in r$

$(\text{kutya}; \text{yes}) \notin r$

$< \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(1; 2) \in <$ $(5; 3) \notin <$ $(4; 4) \notin <$

Szülő-gyerek reláció:

$E = \{\text{emberek}\}$ $r \subset E \times E$ $(a; b) \in r$ ha a gyereke b -nek.

2. Függvények

Az $f \subset A \times B$ relációt függvénynek nevezzük, ha:

$(x_1; y_1) \in f$ és $(x_1; y_2) \in f$ esetén $\iff y_1 = y_2$ (Vagyis ha minden x -hez csak egy y tartozik)

2.1. Értelmezési tartomány:

$$D_f = \{x \in A : \exists y; (x; y) \in f\}$$

Azok az x -ek, amikhez az f hozzárendel valamilyen y -t. Vagyis: ha x eleme D_f -nek, akkor létezik olyan y , hogy az $(x; y)$ rendezett számpár eleme f -nek.

2.2. Értékkészlet

$$R_f = \{y \in B : \exists x \in A; (x; y) \in f\}$$

Azok az y -ok, amiket a függvény valahol értéként felvesz. Vagyis: Ha y eleme R_f -nek, akkor létezik olyan x eleme A -nak, hogy az $(x; y)$ rendezett számpár eleme f -nek.

$$f \subset A \times B \Rightarrow f : A \rightarrow B$$

Az f függvény A -ból B -be képez.

$$\text{Pl: } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$(1; 1) \in f \quad (2; 4) \in f \quad (2; 9) \notin f \quad (3; -8) \notin f$$

2.3. Függvények kompozíciója:

Összetett függvények

$$g : A \rightarrow B \quad f : B \rightarrow C$$

$$f \circ g \text{ "f kör g" } A \rightarrow C \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{pl.: } g(x) : x + 1 \quad f(x) : x^2 \quad g, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad (g \circ f)(x) = x^2 + 1$$

2.4. Függvények tulajdonságai:

Legyen $f \subset A \times B$ függvény, $f : A \rightarrow B$

f injektív: ha $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ - magyarul különböző helyeken nem veheti fel ugyanazt az értéket, kölcsönösen egyértelmű

f szürjektív: ha $R_f = B$ - vagyis minden lehetséges értéket fölvesz.

f bijektív: ha az előző kettő teljesül, vagyis injektív és szürjektív egyszerre.

2.5. Inverz függvény:

Legyen $f : A \rightarrow B$ injektív függvény.

$$f \text{ inverze: } f^{-1} : B \rightarrow A \quad f^{-1}(y) = x, \text{ ha } y = f(x)$$

"visszakeresi" y ból x et, a függvényértékhez rendeli az ősképet.

Az $f^{-1} R_f$ je Injektív függvélynél megegyezik az ősképpel.

$$\text{pl.: } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x + 1 \quad f^{-1}(y) = y - 1, \text{ mert } y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \text{ (egyenletmegoldás)}$$

Kalkulus

Balog Dániel

2009.09.15

1. Számhalmazok

1.1. Természetes számok halmaza

Jele: $\mathbb{N}$

Műveletek: Összeadás, szorzás.

$a, b, c \in \mathbb{N}$	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	Kommutatív
	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	Asszociatív
	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Disztributív

Nézzük ezt az egyenletet: $a + x = b$; $a, b, x \in \mathbb{N}$

Ha b kisebb mint a , az egyenletnek nincs megoldása $\rightarrow$ bővítjük a halmazt. (Hogy legyen.)

1.2. Egész számok halmaza

$a + x = b$; $a, b, x \in \mathbb{Z}$ Az egyenletnek mindig van megoldása

A negatív számokhoz kellene új jelek, így "kitalálunk".

$\exists 0 \in \mathbb{Z}$, hogy $a + 0 = a \forall a \in \mathbb{Z}$

$\forall a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{Z}$ hogy $a + b = 0$ ezt $-a$ -val jelöljük

Algebrában csoportnak nevezzük azt, amire igazak az eddigi axiómák.

$\exists 1 \in \mathbb{N}^1$ hogy $a \cdot 1 = a \forall a \in \mathbb{Z}^2$

Itt is van hiányosság, mert $3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, nem értelmezhető!

1.3. Racionális számok halmaza

$\frac{p}{q} \Rightarrow \mathbb{Q} \quad p, q \in \mathbb{Z}$

$\forall a \in \mathbb{Q} \exists b \in \mathbb{Q} \quad a \cdot b = 1 \quad a, b \neq 0$

A racionális számok halmazában az eddigi összes axióma érvényes.

Az újabb áruló a gyökvonás, Phitagorasz tanítványai öngyilkosok lettek a $\sqrt{2}$ miatt.

Az egyiptomiak $\frac{22}{7}$ el számolták a π -t, de pontosabban utánaszámolva kiderül, hogy $\pi; \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

¹Az egész számoknak is eleme, mert $\forall a \in \mathbb{N} \in \mathbb{Z}$

²Egészen $\mathbb{C}$ -ig igaz

1.4. Valós számok halmaza

Nehéz definiálni, mert sok új jel van.

A felső határ a suprénum, az alsó az infimum.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{R}$ a halmaz egy felső korlátja

$\forall x \in H$ igaz, hogy $x \leq k$

Az alsó korlátnál $\forall x \in H$ igaz, hogy $x \geq k$

Legyen a H egy olyan halmaz, aminek van felső korlátja. H legkisebb felső korlátját (ha van) nevezzük H felső határának. Jele: $\sup H$.

$$H = \{x \in \mathbb{R} : x < +1\}$$

$$\max H = \emptyset \quad \sup H = +1$$

$$H = \{x \leq +1\}$$

$$\max H = +1 \quad \sup H = +1$$

1.5. Felső határ axióma

A $\mathbb{R}$ olyan halmaz, amelyben minden felülről korlátos halmaznak van felső határa. $\mathbb{Q}$ nem ilyen, mert:

$H = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ Értelmes, de $\sup H$ nem értelmezhető.

A felső határ axióma minden lyukat betöm. XD folytonos számegyenes

Az eddigi axiómákból az összes többi szabály levezethető.

1.6. Hatványok

$$a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N} \rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Def.: $\sqrt[n]{a} = \sup \{x \in \mathbb{R} : x^n < a\}$

Jelölés: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a \geq 0$

Páratlan n esetén negatív számokra is teljesül.

$$\forall a \geq 0 \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$p, q \in \mathbb{N}; a < 0 \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$n \in \mathbb{N}; a \neq 0 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a \neq 0 \quad a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$$

Ezzel $n \in \mathbb{N}; a > 0$ értelmezve van. **NOTE!**

$$r \in \mathbb{Q} \quad a \geq 0$$

Az $r \in \mathbb{Q}$ szám definíció szerint, két egész szám hányadosa. A negatív kitevő, és a törtre emelés is értelmezve volt, tehát a^r értelmezve van.

$2^{\sqrt{2}}$ értelmezése:

$$x \in \mathbb{R}; a > 0 \quad a^x = \sup \{a^r : r < x; r \in \mathbb{Q}\}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \exists r \in \mathbb{Q}$ hogy $r < x$ Amennyiben $r - x = \varepsilon \rightarrow 0$ akkor r "megfeleltethető" x nek.

1.7. Intervallumjelölések:

$$a, b \in \mathbb{R}; a < b$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \text{ Zárt intervallum}$$

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \text{ Nyílt intervallum}$$

$$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$$

$$(\infty; \infty) = \{x \in \mathbb{R}\}$$

1.8. Egyenlőtlenségek

$$x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

1.8.1. Számtani-, és mértani közép egyenlőtlenség

Számtani közép	Mértani közép
$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$	$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

$$G_n \leq S_n \text{ Bizonyítás } n = 2 \text{ esetén:}$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

$$(a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1 a_2$$

$$a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 0$$

$$(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

Ez pedig mindig teljesül.

Kalkulus

Balog Dániel

2009.09.22

1. Komplex számok

1.1. Definíciók

$$x^2 = -1$$

$$x^2 \in \mathbb{R}, \text{ de } x \notin \mathbb{R}$$

Kell egy új halmaz: $\mathbb{C}$

$$\text{Legyen } \mathbb{R} \times \mathbb{R} (2, 5) \in \mathbb{C}$$

(2 dimenziós "vektor") *csak hasonlít hozzá, mert vektorokkal nem lehet osztani*

Definiálás: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ A kettőnek más a szimbolikája, ahogy $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ nak is.

Pl.: $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, addig $\frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$ vagy $(a + i \cdot b) \in \mathbb{C}$ addig $(a + i \cdot 0) = a \in \mathbb{R}$

Műveletek:

$$\underbrace{(a, b) + (c, d)}_{\text{Új művelet}} = \underbrace{(a + c, b + d)}_{\text{Régi művelet}} \quad \underbrace{(a, b) \cdot (c, d)}_{\text{Új művelet}} = \underbrace{(ac - bd, ad + bc)}_{\text{Régi művelet}}$$

Az új műveletek megtartották a régiek tulajdonságait.

Legyen $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ új jel, imaginárius (képzetes) egység.

$$i^2 = -1 \quad (a, b) \text{ helyett } a + i \cdot b$$

Osztás:

$$\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{1 + 2i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{9 - (-1)} = \frac{3 - 2 + i + 6i}{10} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

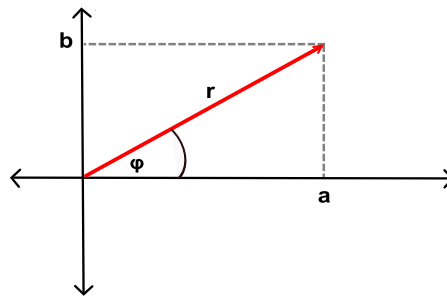
Egy komplex szám konjugáltja: $\overline{a + ib} = a - ib$

1.2. Polárkoordináta

Komplex számok trigonometrikus alakja.

$a + ib$ felírható $r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ alakban is.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}; \quad |a + ib| = r; \quad a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$



1. ábra. Komplex szám trigonometrikus alakja.

Az $a + ib \in \mathbb{C}$ trigonometrikus alakja miért is hasznos? Mert a szorzás, osztás könnyebben elvégezhető.

1.3. Műveletek

Legyen

$$Z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1), \quad Z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$

1.3.1. Szorzás

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Bizonyítás:

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\underbrace{(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)}_{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i \cdot \underbrace{(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)}_{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \right)$$

1.3.2. Osztás

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Bizonyítás: Z_2 vel való visszaszorítás.

1.3.3. Hatványozás

$$Z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$$

$$Z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

Bizonyítás: Az szorzásra vonatkozó képletből következik.

1.3.4. Példák

$$Z^3 = 1 \quad Z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$Z^3 = r^3(\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi)) \quad r^3 = 1 \quad \varphi = \frac{0+2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow \varphi = 0^\circ \quad k = 1 \rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \quad k = 2 \rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

$$k = 3 \rightarrow \varphi = \frac{6\pi}{3} = 360^\circ \text{ Def szerint! } \varphi < 360^\circ$$

Tehát a megoldások:

$$Z_1 = 1$$

$$Z_2 = \cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_3 = \cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.4. Komplex számok exponenciális alakja:

Egy komplex szám felírható $r \cdot e^{i\varphi}$ alakban is.

Az átalakítás az Euler-formulával történik:

$$r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

A műveletek úgy végzendőek, mint a trigonometrikus alaknál.

1.5. Gyökvonás:

$$\sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : k < n$$

Tehát egy szám n -edik gyökének n darab komplex megoldása van!

Kalkulus

Balog Dániel

2009.09.29

1. Számsorozatok

1.1. Példák

$$1, 2, 3, 4 \quad a_n = n \quad (1)$$

$$1, 4, 9, 16 \quad a_n = n^2 \quad (2)$$

$$2, 4, 8, 16 \quad a_n = 2^n \quad (3)$$

$$-1, 1, -1, 1 \quad a_n = (-1)^n \quad (4)$$

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256} \quad a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (5)$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \quad a_n = \frac{1}{n} \quad (6)$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (7)$$

1.2. Definíciók

A számtani sorozat ugyanannyival változik.

A mértani sorozat ugyanannyiszorosára változik.

Def: A sorozat olyan függvény, aminek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$. (értsd: első, második harmadik tag.)

Def: A számsorozat olyan sorozat, amelynek értékészlete $\mathbb{R}$ (esetleg $\mathbb{C}$)

Jelölés: a függvény, mely $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a sorozat n -edik tagja $a(n)$ helyett a_n

1.3. Sorozatok tulajdonságai

(a_n) a sorozat jelölése

(a_n) korlátos, ha $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{R} \quad K_1 \leq a_n \leq K_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Korlátos	Nem korlátos
(4),(5),(6),(7)	(1),(2),(3)

Def: (a_n) monoton nő, ha $(a_n) \leq (a_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}$
 (a_n) monoton csökken, ha $(a_n) \geq (a_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}$

Szig. mon nő, ha $\geq$ helyett $>$

TÖRTÉNELMI PILLANAT:

2. Határérték

2.1. A határérték fogalma

Def: Egy (a_n) van határértéke, és ez $A \in \mathbb{R}$ ha,
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}(\text{küszöbindex}), \text{ hogy } A - \varepsilon \leq a_n \leq A + \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Jelölés: (a_n) határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

Pl.: (6) $a_n = \frac{1}{n}$

Tetszőleges $\varepsilon \quad N = \frac{1}{\varepsilon}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Fontos. Nem minden sorozatnak van határértéke!

Pl: $a_n = (-1)^n$

Def: (a_n) sorozat $+\infty$ -be tart, ha

$\forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } K \leq a_n \quad \forall n \geq N$

Jelölés:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Def: (a_n) sorozat $-\infty$ -be tart, ha

$\forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } K \geq a_n \quad \forall n \geq N$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

2.2. Néhány határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

2.3. A határérték és a rendezés kapcsolata:

1. ha $\forall n \ a_n \leq b_n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$
2. Rendőrelv: ha $\forall n \ a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim a_n = \lim c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$
Ha a_n és c_n ugyanoda konvergál, akkor b_n is oda konvergál.

2.4. Határértékek és műveletek kapcsolata:

1. $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
2. $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$

$A - B$	$-\infty$	$A < 0$	0	$A > 0$	∞
$-\infty$	?	∞	∞	∞	?
$B < 0$	$-\infty$	$A - B$	$A - B$	$A - B$	∞
0	$-\infty$	$A - B$	$A - B$	$A - B$	∞
$B > 0$	$-\infty$	$A - B$	$A - B$	$A - B$	∞
∞	?	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?

$A + B$	$-\infty$	$A < 0$	0	$A > 0$	∞
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$B < 0$	$-\infty$	$A + B$	$A + B$	$A + B$	∞
0	$-\infty$	$A + B$	$A + B$	$A + B$	∞
$B > 0$	$-\infty$	$A + B$	$A + B$	$A + B$	∞
∞	?	∞	∞	∞	?

Szorzásnál, osztásnál is hasonló szabályok, de több kivétellel.

$A \cdot B$	$-\infty$	$A < 0$	0	$A > 0$	∞
$-\infty$	∞	∞	?	$-\infty$	$-\infty$
$B < 0$	∞	AB	0	AB	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$B > 0$	$-\infty$	AB	0	AB	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	?	∞	∞

$\frac{A}{B}$	$-\infty$	$A < 0$	0	$A > 0$	∞
$-\infty$	?	0	0	0	?
$B < 0$	?	$\frac{A}{B}$	0	$-\frac{A}{B}$	?
0	?	?	?	?	?
$B > 0$	?	$-\frac{A}{B}$	0	$\frac{A}{B}$	?
∞	?	0	0	0	?

Egy példa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(2n-3)} = \text{leosztom a számlálót, nevezőt } n\text{-nel}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{1}{2} \quad \text{mert a hozzáadott, ill. kivont tagok tartanak } 0 \text{ hoz.}$$

2.5. Fontos határértékek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m = \begin{cases} +\infty & \text{ha, } m > 0; \\ 1 & \text{ha, } m=0; \\ 0, & m < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{ha, } q > 1; \\ 1 & \text{ha, } q=1; \\ 0 & \text{ha, } -1 < q < 1; \\ \text{nincs, ha} & q \leq -1. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$a > 0$ különben $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$ Bizonyítás: *rendőrelv, számtani mértani közép*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(a_n) Szig mon nő, és felülről korlátos. Bizonyítsuk hogy $a_n < 4$

Ha egy sorozat monoton nő, és felülről korlátos, akkor $\exists$ véges határértéke.

Biz: $\lim a_n = \sup a_n$

2.6. e mint határérték:

Def: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ limeszét jelölje e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad e \simeq 2,7182 \quad e \in \mathbb{Q}^*$$

Euler-féle összefüggés.

Kalkulus

Balog Dániel

2009.10.06

1. Számsorok

Sorozat: a_1, a_2, a_3

Sor: $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Pl.: $a_n = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Legyen $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ *Trükkös...*

A sorozatot egy mértani sorozatként fogjuk fel, ha az első tagot ($\frac{1}{2}$) a_1 nek vesszük, a q pedig legyen egyenlő $\frac{1}{2}$ -el.

S_n másképp felírva:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Def: Legyen (a_n) egy számsorozat,

legyen $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \forall n$ az a_n sorozatból képzett részletösszege sorozat.

Az a_n sorozatból képzett végtelen sor jele: $\sum a_n$

ha $\exists \lim S_n \Rightarrow \sum a_n$ van összege.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$$

Ha ez a lim véges, akkor a sorozatot konvergensnek hívjuk, ha nem akkor divergensnek.

¹mert $\frac{1}{2^n}$ nullához konvergál

Divergens: $\begin{cases} - & \text{nincs limes;} \\ - & \text{van limes, de végtelen.} \end{cases}$

Pl: $a_n = q^n$ $\begin{cases} |q| < 1 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens, } = \lim S_n \\ q \geq 1 & \sum_{n=1}^{\infty} = \infty \rightarrow \text{divergens} \\ q \leq -1 & \text{nincs összege a sornak, ezért divergens} \end{cases}$

$$\lim S_n = \lim (q + q^2 + \dots + q^n) = \lim q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \stackrel{2}{=} \frac{1}{1 - q} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

Pl: Ez végtelen, de nem látszik...

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} + \dots$$

Akárhányszor $\frac{1}{2}$ (-nél nagyobb) lehet az összeg.

Pl.: v2.0 $\frac{1}{n^2}$

Véges az összeg, mert:

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Erre konkrét képletet nem találni, de adjunk rá becslést egy hasonlóval.

Ötlet: Helyette

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{\frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}_{\frac{1}{20}} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \stackrel{3}{=} 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \rightarrow S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Az első sorozat $n+1$ -ik tagja kisebb, mint a második n -edik tagja. ($n \geq 1 \in \mathbb{N}$)

Ha a második sorozat összegéhez hozzáadjuk az első sorozat első tagját, akkor biztosan nagyobb lesz az összeg.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+1)} + 1 = 2$$

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

Ha $\sum a_n$ konvergens $\rightarrow \lim a_n = 0$ (nem bizonyítjuk)

²mert $q^n \rightarrow 0$

³ $(n+1) \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$

Fontos: Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n + b_n$ is konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

1.1. Összehasonlító kritérium:

Legyen: $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n$

$$\text{Ha} \begin{cases} 1, & \sum b_n \text{ konvergens} \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergens} \\ 2, & \sum a_n \text{ divergens} \Rightarrow \sum b_n \text{ divergens} \end{cases}$$

Ezt már használtuk, szereposztás: $a_n = \frac{1}{n^2}$; $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$

pl.: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergens-e?

Divergens, mert: $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{n^{1.5}}$? Tudjuk, hogy $\frac{1}{n}$ divergens, $\frac{1}{n^2}$ konvergens. Ez a mocskok meg a kettő közé esik.

Nem bizonyítjuk: Ha a kitevő > 1 , akkor konvergens.

1.2. Hányados kritérium:

Pl.: $\sum \frac{n^2}{2^n}$?

Tegyük úgy, mintha ez egy mértani sorozat lenne, ekkor két tagot egymással elosztva megkapjuk a q -t.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}_{\approx 1} \cdot \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2}$$

Legyen $a_n > 0$ sorozat. Ha $\exists q < 1$, amelyre igaz, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ (kellően nagy n esetén) $\rightarrow \sum a_n$ konvergens.

Az is jó, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \rightarrow \sum a_n$ konvergens.

1.3. Gyök kritérium:

pl:

$\sum \frac{2^n}{n^2}$ másképp

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{2} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Legyen $a_n > 0$ Ha $\begin{cases} \lim \sqrt[n]{a_n} < 1 & \sum a_n \text{ konvergens} \\ \lim \sqrt[n]{a_n} > 1 & \sum a_n \text{ divergens} \\ \lim \sqrt[n]{a_n} = 1 & ? \end{cases}$

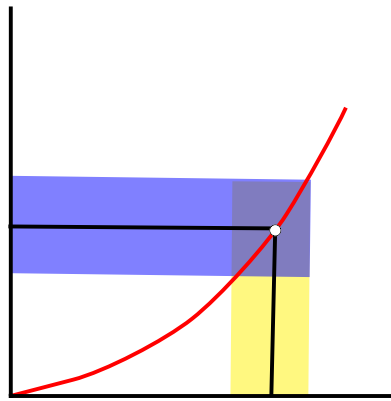
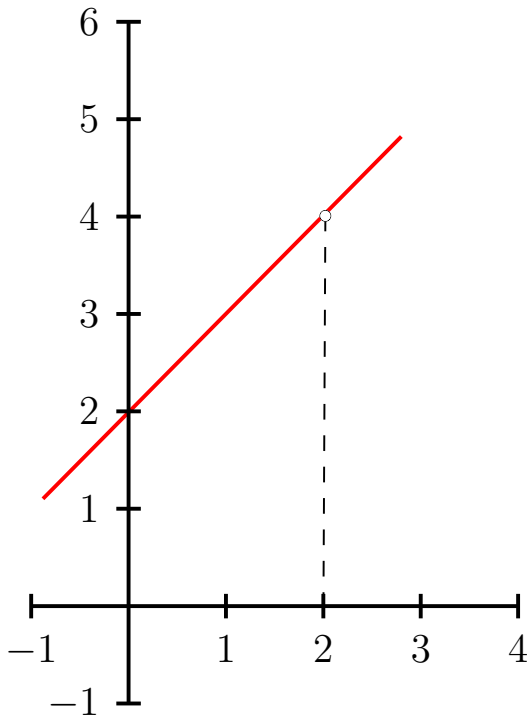
Kalkulus

Balog Dániel

2009.10.13

1. Függvények határértéke

pl.: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+2} = x+2$
Mit csinál $f(x)$, ha x közeledik 2-höz?



$f(x) = x + 2$ ha $x \neq 2$ (szakadás $x=2$ nél) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Def.: Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$

Az f függvény határértéke a pontban A , ha:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ hogy $x \in (a - \delta, a + \delta)$ és $x \neq a \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

Egy tetszőleges $A \pm \varepsilon$ -hoz választok $a \pm \delta$ intervallumot. Ez a logikai sorrend, bár úgy tűnhet hogy nem.

Ábrán előbbi kék, utóbbi sárga

Jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \quad \text{vagy} \quad \lim_a f = A \quad \text{vagy} \quad f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

$x \neq a$ A határérték független a függvényértéktől

Ez kurva fontos, olvassuk el még egyszer!

Pl.:

$$g(x) = \begin{cases} +1, & \text{ha } x > 0; \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

ha $\varepsilon \geq 1 \quad \exists \delta$ de a teljes x tengely megfelel ennek.

ha $\varepsilon < 1 \quad \nexists \delta \Rightarrow$ ez a limesz nem létezik.

Példa: (nem annyira degenerált fajta)

$f(x) = \frac{1}{x}$ ha $x \rightarrow 0; y \rightarrow \infty$ De nem éri el!

Ha $x \rightarrow \infty; y \rightarrow 0$ akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Def.: legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Az f függvénynek ∞ ben A a határértéke, ha $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R}$, ha $x > K$, $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

és nem mászik ki a mocsok!

pl:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x = \text{nem létezik!}$$

Def.:¹Az f függvénynek $-\infty$ ben A a határértéke, ha $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R}$, ha $x < K$, $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{nem létezik!} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad 2$$

Def: Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, legyen $a \in \mathbb{R}$

A határérték a ban $+\infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0$, hogy $x \in (a - \delta, a + \delta)$ és $x \neq a \quad f(x) > K$

2. Egyoldali határértékek:

Def: Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ legyen $a \in \mathbb{R}$

Az f függvény jobboldali határértéke az a ban ∞ , ha $\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0$, ha $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > K$

Jele:

$$\lim_{a+} f(x) = +\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty$$

Műveletek, és kivételek ugyanazok mint a sorozatoknál.

¹mint az első, csak $x > K$ helyett $x < K$

²Azért kell $()^2$, mert különben felváltva ugrálna $-\infty, \infty$ között. Ld.:A fölötté lévő

Kalkulus

Balog Dániel

2009.10.20

Valós függvények néhány tulajdonsága: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Def.: Egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről korlátos, ha $\forall x \exists K \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq K$,
korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

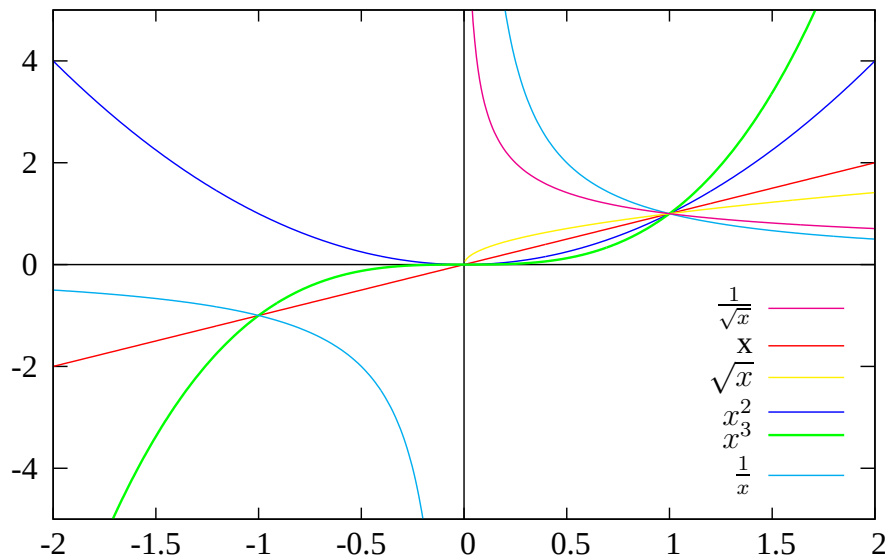
Def.: egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő, ha bármely $x_1 < x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

1. Elemi függvények:

1.1. Hatványfüggvények:

Adott $x \in \mathbb{R}$ hatványfüggvény $f(x) = x^m$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ $m = \begin{cases} 1, & x \\ 2, & x^2 \\ 3, & x^3 \\ -1, & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{2}, & \sqrt{x} \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$

$x < 0$ nem mindig értelmes pl: $\sqrt{x}$ az értelmezési tartomány függ m től. $m = \begin{cases} 2, & \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}, & \mathbb{R}^+ + \{0\} \\ \frac{1}{3}, & \mathbb{R} \end{cases}$

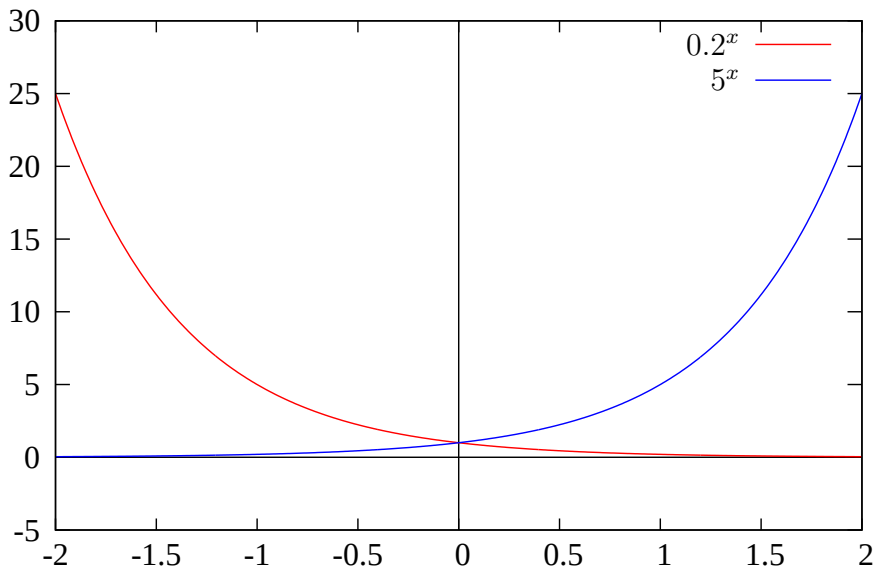


Ha $m > 0 \Rightarrow$ szig mon nő

Ha $m < 0 \Rightarrow$ szig mon csökken

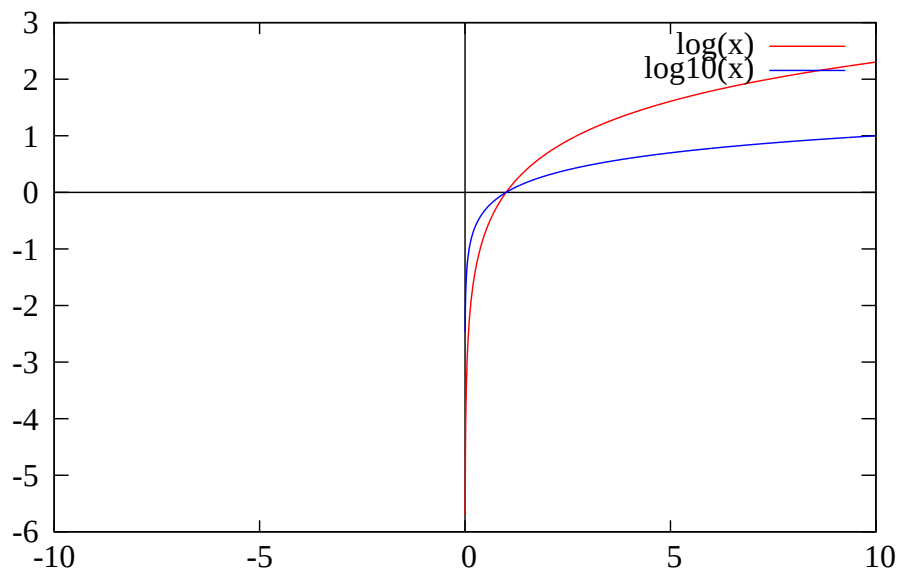
1.2. Exponenciális függvény:

Adott egy $a \in \mathbb{R}^+$, és $f(x) = a^x = \exp_a(x)$ $\exp(x) = e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$



(minden érték pozitív) Az összes a^x függvény alulról korlátos. ($R_f = \mathbb{R}^+$)

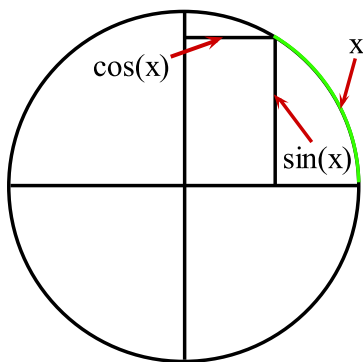
1.3. Logaritmus függvény



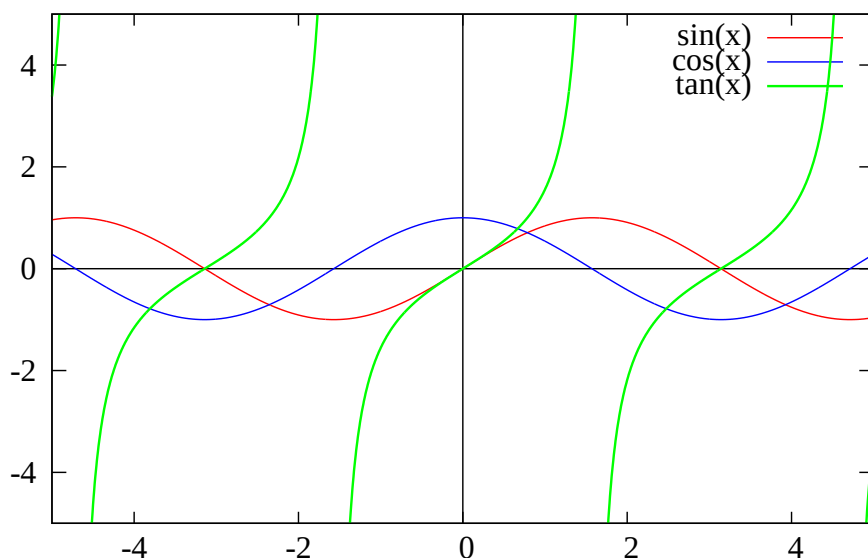
Az exponenciális függvény inverze. $\log_a = (\exp_a)^{-1}$

y -ből x -et keresünk. $x = \log_a y$ Ez működik, mert $\exp_a$ injektív, ha $a \neq 1$ egyértelműen visszakereshető, mert szig mon nő

$\log_a$ csak akkor van értelmezve, ha $a > 0; a \neq 1$ $D(\log_a) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, mert $R(\exp_a) = \{y \in \mathbb{R}; y > 0\}$



1.4. Trigonometrikus függvények



Sin, cos tg, ctg

x az ívhossz (el van számolva)

x ívhosszhoz tartozó függőleges koordináta a $\sin x$ a vízszintes a $\cos x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

1.4.1. Nevezetes szögek szögfüggvényei:

$\sin 1 = ?$ Ez nehéz.

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ Ez nem. Kör kerülete 2π ezt se bizonygatjuk, ezért $\frac{\pi}{2}$ negyede kör sugarának, ezért hozzá tartozó pont: $(0, 1)$

$\sin \pi = 0$; $\cos \pi = -1$ Koordinátái: $(-1, 0)$

Egyéb nevezetes: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (Szabályos háromszög)

$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Egyenlőszárú, derékszögű háromszög)

Nem tudom a többi, így azokat sorokból fogjuk kiszámolni.

1.4.2. Trigonometrikus függvények inverze:

Nem kereshető vissza, hogy mennyi volt a $\sin$ függvény¹, mert nem injektív $\rightarrow$ nincs inverze. De $\sin \left| \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right|$ már injektív. Ennek az inverze, $\arcsin x = \left(\sin \left| \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right| \right)^{-1}$
 $\arccos x = \left(\cos \left| [0, \pi] \right| \right)^{-1}$
 $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} \left| \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right| \right)^{-1}$
 $\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg} \left| [0, \pi] \right| \right)^{-1}$

2. Hiperbolikus függvények:

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e^x és e^{-x} távolságainak megfelelése.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

2.1. Hiperbolikus függvények inverze:

$$\operatorname{arsh} = \operatorname{sh}^{-1}$$

$$\operatorname{arch} = \left(\operatorname{ch} \left| [0, +\infty] \right| \right)^{-1}$$

$$\operatorname{arth} = \operatorname{th}^{-1}$$

$$\operatorname{arcch} = \operatorname{cth}^{-1}$$

¹sem a $\cos$, tg ctg

Kalkulus

Balog Dániel

2009.11.03

Deriválás:

Def.: Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f differenciálható (deriválható) egy $x \in \mathbb{R}$ helyen, ha $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ és véges.

Az f deriváltja x pontban:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{dx} &= f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ f'(x_0) &= \lim_{(x-x_0) \rightarrow 0} \frac{f(x)-(f(x-x_0))}{x-x_0} \end{aligned} \right\} x - x_0 = h$$

pl.: $f(x) = x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$

$f(x) = x^2 \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$

$$f(x) = |x| \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \begin{cases} x > 0, & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \\ x < 0, & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x-h+x}{h} = -1 \\ x = 0, & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \emptyset \end{cases}$$

Tehát az abszolútértékfüggvény nem deriválható a 0 pontban, de minden más pontban igen.

Lehet a lim végtelen is, pl.: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 0 ban. (Itt nem is deriválható.)

Az érintő vízszintessel bezárt szögének tangense: $\tan \alpha = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Fontos további példák kiszámítása:

$f(x) = e^x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$

$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$

$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$

$f(x) = \cos x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$

$$(f+g)' = ?$$

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$(f \cdot g)' = ?$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{g(x)} + f(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Deriválási szabályok:

$$\begin{array}{l|l} (f \pm g)' & f' \pm g' \\ (c \cdot f)' & c \cdot f' \\ (f \cdot g)' & f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' & \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ (f \circ g)' & f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{array}$$

pl.: $h(x) = e^x \cdot \sin x$

Legyen $f(x) = e^x$ és $g(x) = \sin x$

$h'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$

$h(x) = \frac{e^x}{\sin x}$
 $h'(x) = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

$h(x) = e^{\sin x}$

Legyen: $f(x) = e^x$ és $g(x) = \sin(x)$ *gondold végig mit használnál először számológépen!*

$h'(x) = (f \circ g)'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

$h(x) = \sqrt{1+x^2}$

Legyen (szereposztás) $g(x) = 1+x^2$ és $f(x) = \sqrt{x}$

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{1x}{\sqrt{1+x^2}}$

HF $h(x) = \sqrt{\sin(x^2+2)}$

Deriválási táblázat:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$(x^n)'$	$n \cdot x^{n-1}$	x^x	$x^x(1 + \ln x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{cth} x$	$\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		

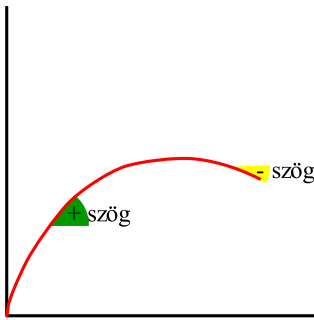
Kalkulus

Balog Dániel

2009.11.10

1. A deriválás három haszna:

1.1. Növekedés, fogyás, szélsőérték



Monotonitás (Növekedés, fogyás, szélsőérték)

Lényeg:

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ A függvény nő

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ A függvény csökken

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ (lokális) szélsőérték

Ez matematikailag kifejezve:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ha $f'(x) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, hogy $|h| < \delta (-\delta < h < \delta) \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$

Ha $0 < h < \delta \quad f(x+h) > f(x)$
Ha $-\delta < h < 0 \quad f(x+h) < f(x)$

Ezt lokálisan növénynek nevezzük.

A δ függ az x -től (nem lehet túl távol tőle "az a poén ha a δ kicsi")

Állítás: Ha $f'(x) > 0 \Rightarrow$ az f függvény az x pontban lokálisan szigorúan nő.

Állítás: Ha $f'(x) < 0 \Rightarrow$ az f függvény az x pontban lokálisan szigorúan csökken.

Def.: Az f függvénynek az x pontban lokális¹ maximuma van, ha $\exists \delta > 0; -\delta < h < \delta \quad f(x+h) \leq f(x)$ ²

Def.: Az f függvénynek az x pontban lokális³ minimuma van, ha $\exists \delta > 0; -\delta < h < \delta \quad f(x+h) \geq f(x)$ ⁴

A lokális és a globális minimum közötti különbség a δ -ban van. (A globálisnál lehet nagyon nagy is)

Állítás: Ha f -nek x -ben lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x) = 0$

Bizonyítás: Kizárásos alapon.

Ha f szig mon nő: $f'(x) > 0$

Ha f szig mon csökken: $f'(x) < 0$

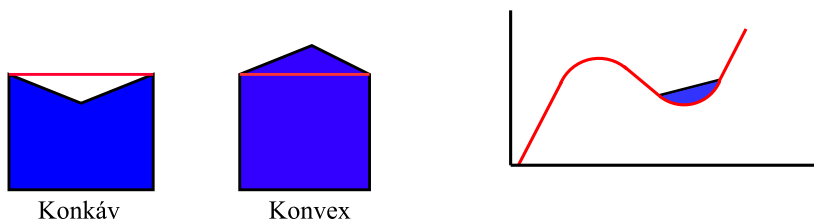
A kettő kizárja egymást, marad az hogy egyenlő 0, és a szélsőérték. Lehetséges még az, hogy nem lehet ott deriválni.

Fontos: Ez fordítva nem igaz!

pl: $f(x) = x^3$

$f'(0) = 0$, de itt nincs szélsőértéke!

1.2. Konvexitás:



A konvex síkidom két pontját összekötő bármely egyenest tartalmazza.

A függvényeknél a görbe feletti részt tekintjük mérvadónak. "síkidomnak"

Def.: Az f függvény az I intervallumon konvex, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ -re $f(x_1)$ és $f(x_2)$ pontokat összekötő szakasz a függvény grafikonja felett van.

Def.: Az f függvény az I intervallumon konkáv, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ -re $f(x_1)$ és $f(x_2)$ pontokat összekötő szakasz a függvény grafikon alatt van.

Def.: Ha f az $\bar{x}$ pontban vált konvexitást, akkor azt a pontot inflexiós pontnak nevezzük.

Mi köze van ennek a deriváláshoz?

Észre lehet venni, hogy konvex részen a szög nő, konkávban csökken.

¹lehet globális is, de az nem biztos!

²Az x közelében nincs nála nagyobb érték

³lehet globális is, de az nem biztos!

⁴Az x közelében nincs nála kisebb érték

Állítás: Ha f' növekvő az I intervallumon, akkor ott f konvex, ha csökkenő, akkor konkáv.

Def.: Legyen $f'' = (f')'$ ez az f függvény második deriváltja.

Állítás: Ha $\begin{cases} f'' > 0 \mid I, & f \text{ konvex } I\text{-ben} \\ f'' < 0 \mid I, & f \text{ konkáv } I\text{-ben} \\ f\text{-nek inflexiós pontja van } x\text{-ben} & f'' = 0 \end{cases}$

Biz:

$$f'' > 0 \Rightarrow f' \text{ nő} \Rightarrow f \text{ konvex}$$

$$f'' < 0 \Rightarrow f' \text{ csökken} \Rightarrow f \text{ konkáv}$$

1.3. Függvény ábrázolás:

Pl.: $f(x) = x^3 - 3x$ Ezt kéne ábrázolni...

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$0 = 3x^2 - 3 \mid +3$$

$$3 = 3x^2 \mid \div 3$$

$$x^2 = 1 \mid \sqrt{}$$

$$x = \pm 1$$

Itt lehet előjelváltás.

$$f''(x) = 6x$$

$$0 = 6x \mid \div 6$$

$$x = 0$$

Itt lehet előjelváltás.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +1)$	1	$(+1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↑ konk.	↑ konk.	↑ konk.	inf. pont	↓ konv.	↓ konv.	↓ konv.

A függvény határértéke $\pm\infty$, illetve beteg helyeken

Most nincs beteg hely Indoklás:

$$x^3 - 3x = \underbrace{x^3}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}_{\rightarrow 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty$$

1.4. A függvény grafikonja:

$$f(x) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Lokális maximum helye: } x = -1 \text{ Értéke: } (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$$

$$\text{Lokális minimum helye: } x = +1 \text{ Értéke: } (1)^3 - 3 \cdot (1) = -2$$

$$\text{Inflexió pont: } x = 0$$

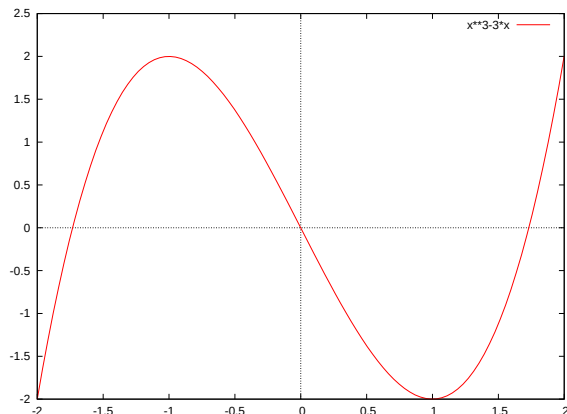
Hol metszi az X tengelyt?

$$0 = x^3 - 3x \text{ Ennek 0 megoldása. Harmadfokú az egyenlet, szal van még 2!}$$

$$3x = x^3 / \div x$$

$$3 = x^2 / \sqrt{()}$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$



A "recept" összefoglalva:

1. f' kiszámítása, 0 előjelváltás
2. f'' kiszámítása, 0 előjelváltás
3. Ezekből összerakni táblázatot
4. A limesz $\pm\infty$ és beteg helyeken
5. Függvényértékek, és grafikon

1.5. Egy genya példa:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$1 = \frac{1}{x^2} \cdot ()^{-1}$$

$$1 = x^2 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Na ez nem lesz nulla. Nem csak a görbület változik meg 0 nál, hanem el is szakad.

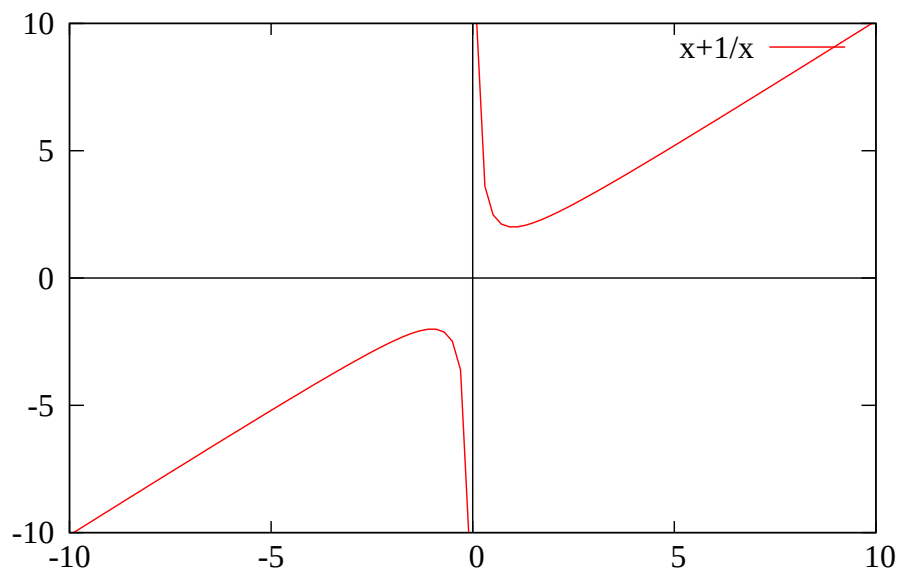
Táblázat:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +1)$	1	$(+1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	x	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	x	+	+	+

Beteg limes: $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} = \infty$$

Ábra:



Kalkulus

Balog Dániel

2009.11.17

1. A deriválás további haszna:

Def: Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f''' = (f'')'$; $f^{(4)} = (f''')'$; $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ $k \in \mathbb{N}$
Ezek f többszörös deriváltjai

1.1. Taylor polinom

Cél: függvény közelítése polinommal

Motiváló példa: $f(x) = e^x$

$x = 0$ körül közelítjük.

Legegyszerűbb közelítés: $e^x \approx 1$ Ez egy 0-ad fokú polinom.

Kicsit pontosabb az érintő egyenes. $e^x \approx 1 + x$ Hogyan jött ez ki?

$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1 = \tan \alpha = \text{meredekség}$

Érintő (egyenes) egyenlete: $\underbrace{a}_{f(0)} + \underbrace{b}_{f'(0)}x = 1 + 1 \cdot x$

"Keressék olyan elsőfokú polinomot, melyre $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ "

Ugyanígy logikával keressék egy másodfokút:

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x$$

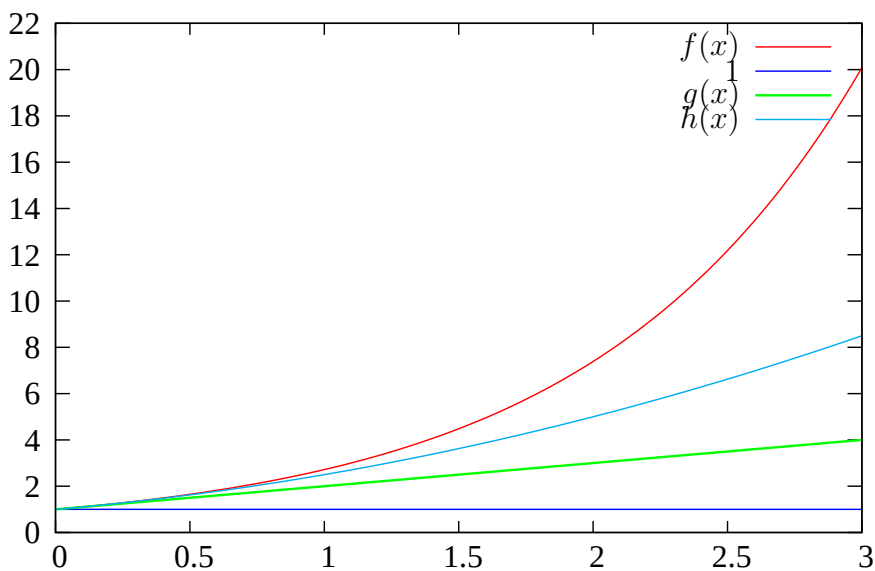
$$p'(x) = c_1 + c_2x$$

$$p'(x) = 2c_2$$

Ez még nem az igazi, az eredeti elképzelésünk második deriváltja kétszer annyi mint kéne!

Nem gond, leoszjuk kettővel.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \text{ Ez } e^1\text{-re 2,5-öt ad. } f(x) = e^x \quad h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad g(x) = 1 + x$$



Harmadfokú közelítő polinom:

$$p(0) = f(0); p'(0) = f'(0); p''(0) = f''(0); p'''(0) = f'''(0)$$

$$p'(0) = c_1 = f'(0) = 1$$

$$p(0) = 2c_2 = f(0) = 1$$

$$p(0) = 6c_3 = f(0) = 1$$

$$\text{Tehát: } c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{6}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \quad e^1 \approx 2,66$$

1.1.1. Általános megközelítés

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sokszor differenciálható.

$a \in \mathbb{R}$ pont körül közelíték. ($x=0$ helyett $x=a$ -ban)

Rögtön n -ed fokú polinomot keresek, melyre:

$$p(a) = f(a), p'(a) = f'(a), p''(a) = f''(a), \dots, p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Észrevétel: keressük p -t ilyen alakban:

$$p(a) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n$$

$$p'(a) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$p''(a) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \dots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

Észrevehető, hogy a deriválás miatt egy konstans szorzó jön ki. Ezek szerint:

$$p^{(n)}(a) = n!(c_n)$$

Ez így nagyon szimpatikus, legyen belőle tétel!

1.2. Taylor-polinom

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -szer differenciálható -ban. Ekkor $\exists$ egy, és csakis egy T_n polinom, amelyre igaz, hogy:

$$T_{n,a}(x) = f(x), T'_{n,a}(x) = f'(x), \dots, T^{(n)}_{n,a}(x) = f^{(n)}(x)$$

Ez képlettel is megadható: *Ez fontos!*

$$T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a) \cdot (x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a) \cdot (x-a)^3}{6} + \dots + \frac{f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n}{n!}$$

Avagy tömörebben:

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

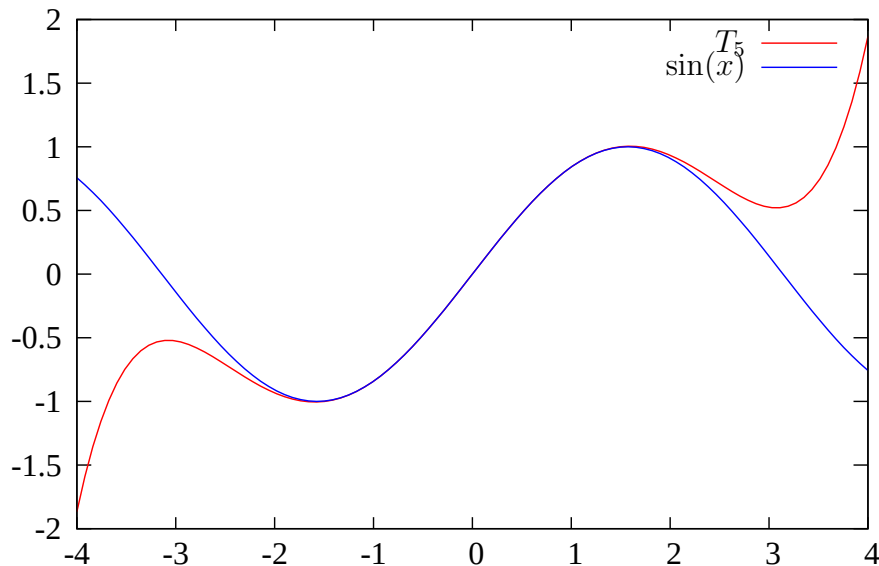
Például:

$\sin$ függvény közelítése: Ötödfokú polinommal, $a = 0$ körül.

Függvény	Érték 0 pontban
$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = 1$

$$T_5(x) = 0 + 1x + \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{120}x^5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Ez így néz ki:



Na jó, de mennyire pontos ez a közelítés?

1.3. Taylor formula Lagrange maradék taggal

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ami $n + 1$ -szer differenciálható. Ekkor $\forall x$ -ben $\exists c \in \mathbb{R}$ a és x között, hogy:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Pl. e^x közelítésének pontossága:

$$T_{5,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$e^x - T_5(x) = \frac{e^c}{6!} \cdot x^6$$

Pl.: $x = 1$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \underbrace{\frac{e^c}{720}}_{\leq \frac{4}{720}}$$

$c \in [0; 1]$ $e^c \leq e^1 < 4$ ezt már bizonyítottuk...

Tehát a különbség kisebb mint $\frac{1}{180}$

Deriválás utolsó haszna:

1.4. L'Hospital szabály:

Képlet a beteg limeszek kiszámítására

Alapötlet:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = {}^1 \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Legyen f, g differenciálható, $\lim_a f = \lim_a g = 0$, vagy $\lim_a f = \lim_a g = \pm\infty$

Ekkor ha $\exists \lim_a \frac{f'}{g'} \rightarrow \exists \lim_a \frac{f}{g}$ és ezek egyenlőek. pl.:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3 \sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - 9 \cos 3x}{2} = \frac{8}{2}$$

Lehet olyan, hogy ez se segít...

¹ $c_{1,2} \in [a, x]$

Kalkulus

Balog Dániel

2009.11.24

1. Integrálás

Határozott: Riemann integrál	Határozatlan: Primitív függvények
---------------------------------	--------------------------------------

1.1. Határozatlan:

Def: Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (Intervallum $\mathbb{R}$ is lehet) Az $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye f -nek, ha $F' = f$

Pl.: $f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin x$, de $F(x) = \sin x + 3$ is jó

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$ + akármilyen konstans

$f(x) = x$ ez gondolkodós...

$f(x) \Rightarrow F(x) = x^2$ Ez helyes?

Ennek a deriváltja $2x$, ezért le kell osztani az x^2 öt 2 vel. Így a megoldás: $\frac{x^2}{2}$

Ez könnyű, de kellően hosszú összetett függvény esetén baj van!

Pl: $f(x) = x^4 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot x^3$ Ez sem ellenfél...

$f(x) = e^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2x} \cdot e^{x^2}$

Visszaderiválva: $-\frac{1}{2x^2} \cdot e^{x^2} + \frac{1}{2x} \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

EZ NEM JÓ! Nem tudjuk megcsinálni! (más se tudta...)

Egy függvénynek hány primitív függvénye van?

Állítás: $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye f -nek $\Rightarrow F - G = \text{konstans}$. (nem függ x től)

Biz: $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$

Van olyan tétel: miszerint ha valakinek a deriváltja 0 egy intervallumon, akkor az konstans. (ezért fontos az intervallum...)

Ha $F' = f$, ezt jelöljük: $\int f = F + c$ $\int f$ az f primitív függvénye, vagy határozatlan integrálja.

Megjegyz.: A határozatlan integrál nem más, mint a deriválás inverze.

A deriválásgépet tudományosabban operátornak hívják..

Inverz akkor van, ha injektív. A deriválás meg nem az...

Hiszen $(\sin + konstans)' = \cos(x)$

Ezért tesszük hozzá a $+c$ -t, és le van tudva.

Integrálási szabályok.

I. $\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$

II. $\int (c \cdot f) = c \cdot \int f$

Fontos: Szorzásra, osztásra kompozícióra nincs szabály. De tényleg...

pl: $\int (\sin x + e^{2x}) \cdot dx = \int \sin x dx + \int e^{2x} dx = -\cos x + e^{2x} \cdot \frac{1}{2} + c$

$\int \sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}$

$\int \sqrt{2-x} = (2-x)^{\frac{3}{2}} \cdot -\frac{2}{3}$

$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} = -\ln(\cos x)$

Baj:

$\int \sqrt{x^2+1} = (x^2+1) \cdot \frac{1}{3x}$ (de ez nem stimmel visszaderiválva!)

Integráltáblázat	
$f(x)$	$\int f(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos(x)$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\int \operatorname{tg} x$	$-\ln(\cos x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arch} x$

2. Integrálási módszerek:

2.1. Parciális integrálás:

(szorzás-szabály helyett)

Ötlet: $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ / $\int$

$fg = \int f'g + \int g'f$

Parciális integrálás: $\int (f'g) = fg - \int (fg')$

pl.:

$$\int \underbrace{(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(e^x)}_{f'(x)} dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x \cdot x - e^x + c$$

$$\text{Ell: } (e^x x - e^x)' = e^x x + e^x 1 - e^x = e^x x$$

$$\int \underbrace{(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(\sin x)}_{f'(x)} = -x \cos x - \int -\cos x \cdot 1 = -x \cos x + \sin x + c$$

$$\text{Ell: } (-x \cdot \cos x + \sin x)' = \cancel{-1 \cdot \cos x} + x \sin x + \cancel{\cos x}$$

Cseles:

$$\int \ln x = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{(\ln x)}_g = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = x \ln x - x + c$$

$$\text{Ell: } (x \cdot \ln x - x)' = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x - 1 = \ln x + 1 - 1$$

2.2. Helyettesítéssel integrálás:

(kompozíció-szabály helyett)

Legyen $F' = f$

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) / \int$$

$$(F \circ \varphi)$$

$$\int F(\varphi(x)) dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

Pl:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$\varphi(x) = e^x + 1 \quad f(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow F(y) = \ln y$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{e^x + 1}}_{F'(\varphi(x))} \cdot \underbrace{e^x}_{\varphi'(x)} = \underbrace{\ln(e^x + 1)}_{F(\varphi(x))} + c$$

$$\text{Ilyen az } \int \operatorname{tg} x = \int \frac{\sin x}{\cos x}$$

Mert a szinusz a koszinusz deriváltja.

$$\text{Általánosítva: } \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \ln(\varphi(x))$$

$$\text{Úgyszint hasznos: } f(y) = y^\alpha = \int (\varphi(x))^\alpha \cdot \varphi'(x) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\text{pl: } \int 2x \sqrt{x^2 + 1} =$$

$$\varphi(x) = x^2 + 1; \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\int 2x \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

Recept:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$\text{Behelyettesítés: } e^x = u \Rightarrow x = \ln u$$

Deriváljuk mindkét oldalt u szerint!

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{u} \times du$$

$$dx = \frac{1}{u} \cdot du$$

Tehát:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{u}{u+1} \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{u+1} du = \ln u + 1$$

Visszahelyettesítve:

$$\ln u + 1 = \ln e^x + 1$$

Nehéz példa: $\int \sqrt{1-x^2} dx = a$ függvény $[-1, 1]$ intervallumban van értelmezve!

$$x = \sin u \quad u = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u$$

$$dx = du \cos u$$

$$\int \sqrt{\cos^2 u} \cos u \cdot du$$

$$\int |\cos u| \cos u \cdot du \text{ Az intervallum miatt: } |\cos u| = \cos u$$

$$\int \cos^2 u \cdot du$$

Kis elmélkedés:

$$\cos^2 u - \sin^2 u = \cos 2u$$

$$2 \cos^2 u - 1 = \cos 2u$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u$$

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u \right) du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u + c$$

$$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{\cos^2 u} + c$$

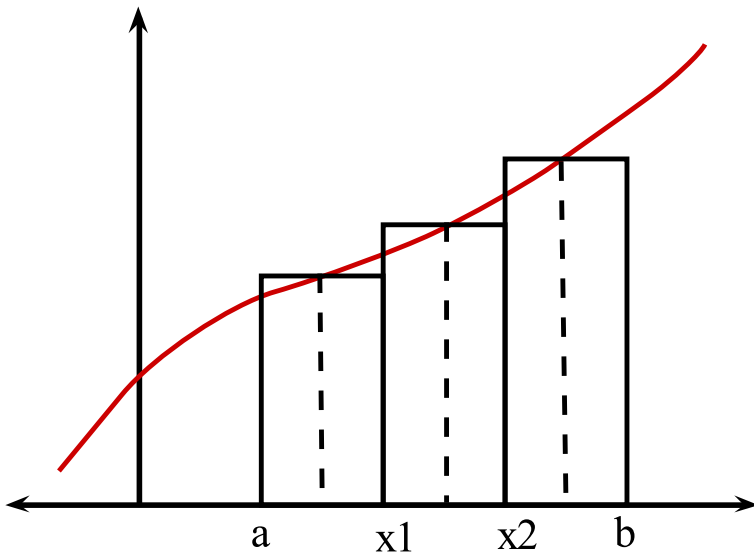
$$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + c$$

Kalkulus

Balog Dániel

2009.12.01

1. Határozott integrál



Legyen $a, b \in \mathbb{R}; a < b$

Legyen $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos

Cél: Terület definiálása. Megadunk egy felosztást $[a, b]$ -ban

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Lényeg: A függvénygörbét téglalappal közelíteni. De hol legyen a teteje?

Riemann: mindegy hol van

legyen $\xi \in [x_{i-1}, x_i]; x \in \mathbb{N} \leq n$

A téglalap teteje: $f(\xi)$ -nál van.

A terület Riemann féle közelítő összege:

$$\sigma = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

A téglalapok területeinek összege

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Sűrítjük az $x_1 \dots x_n$ felosztást, és nézzük meg mit csinál σ .

Def:

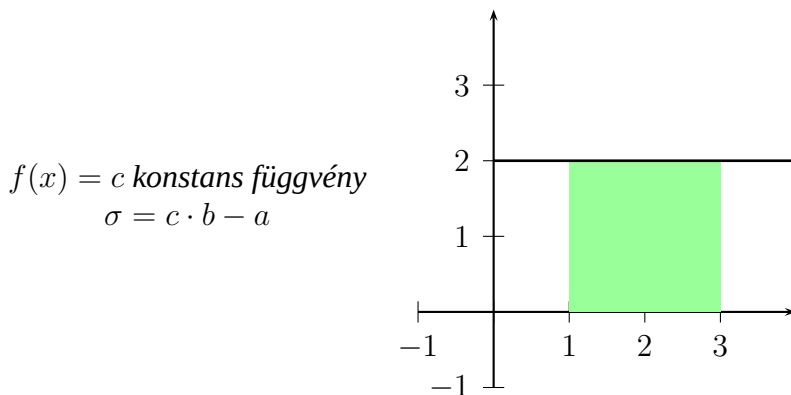
Az f függvényt az $[a, b]$ intervallumon Riemann integrálhatónak nevezzük, ha a felosztás sűrítésével a σ valamihez közelít, amihez közelít, azt $\int_a^b f$ -nek nevezzük.

Pontosabban:

Az f függvényt az $[a, b]$ intervallumon Riemann integrálható, ha $\exists I \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, ha $\underbrace{x_i - x_{i-1} < \delta}_{\text{elég sűrű felosztás}} \forall i$ -re, akkor $\forall \xi_i$ választásával $|\sigma - I| < \varepsilon$

Sajnos a kiszámítás ezzel a definícióval nagyon hosszadalmas.

Egy könnyű példa:



Szimbolika:

σ helyett: $\sum f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

I helyett: $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$
 Másfajta limesz!

Szabályok, amiket be lehet bizonyítani:

Állítás: legyen $f, g[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrálható.

$$1. \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

$$2. \int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$3. \text{ Ha } f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Kérdés: Hogyan dönthető el egy függvényről, hogy Riemann-integrálható-e?

$$\text{pl.: } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha, } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha, } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ez nem Riemann integrálható:

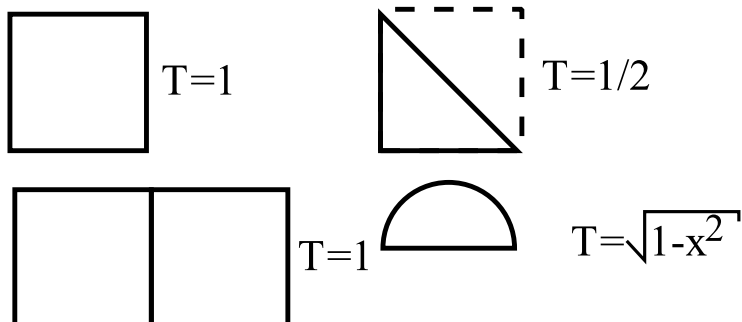
- Ugrál a σ a ξ -től függően
- Nem lesz I amihez közelít

Tétel: Ha f folytonos, akkor Riemann-integrálható!

Def: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy x_0 pontban folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Mese a területről:

Szép halmaz területe egyértelmű

$\forall$ sokszögnek van területe *kiszámítható*, hiszen háromszögekre bonthatjuk.



Van olyan halmaz, aminek nincs területe: mértékelmélet

1.1. Integrál kiszámítása Newton-Leibniz formulával

A határozott és a határozatlan integrál kapcsolata

Van egyszer $\int_a^b f(x)$ és az $\int f(x)$

$$T(x) = \int_a^x f$$

Állítás: $T' = f$, ha f folyamatos függvény.

Biz:

$$\text{Kell: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = f(x)$$

$$\frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) =$$

$$\frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f \right) = {}^1h \cdot f(c_h)$$

Létezik olyan C_h ami $x < c_h < x + h$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x)$$

Ahogy összenyomom a téglalapot, $f(c_h) \rightarrow f(x)$ Ld. ábra

¹sumák...

1.1.1. Newton-Leibniz tétel:

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, legyen $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénye (azaz $f' = f$)

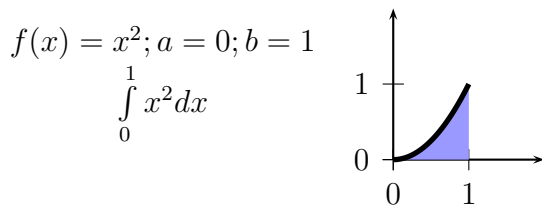
Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Biz: Tudjuk hogy $T' = f \Rightarrow \exists c$ szám $F = T + c$ (csak konstansban térnek el) $F(a) = \underbrace{T(a)}_0 + c$

$$\int_a^b f = T(b) = F(b) - c = F(b) - F(a)$$

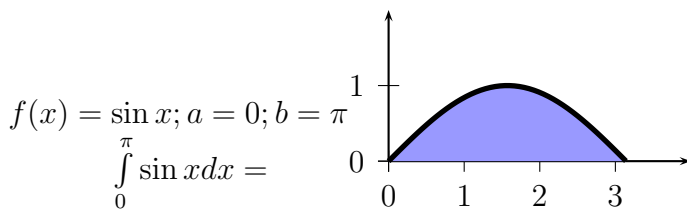
Mostantól recept (ész nélkül)



Mi a F ? Ez a kihívás!

Jelen esetben: $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ha van 1 plussz konstans, akkor az kiesik, szal minek kiírni?

Jelölés: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$



$$F(x) = -\cos x$$

$$[-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

1.2. Határozott Parciális integrál:

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

$$\int_a^b f' \cdot g = [fg]_a^b - \int_a^b f \cdot g'$$

pl:

$$\int_0^1 \underbrace{x}_g \cdot \underbrace{e^{-x}}_{f'} = [-e^{-x} \cdot x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot -e^{-x} dx = -e^{-1} \cdot 1 - 0 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} - e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{2e}$$

1.3. Határozott helyettesítéses integrál:

$$F(\varphi(x)) = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \text{ Ahol } F' = f$$

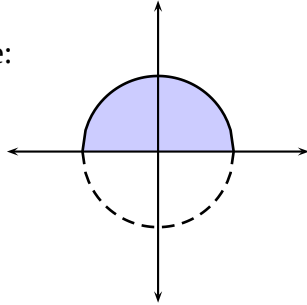
Ez határokkal:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

pl: a kör területe:

A színezett rész területe:

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$



$$T_o = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$x = r \cdot \sin u \quad \frac{dx}{du} = r \cdot \cos u$$

Most jön az újdonság: ha $x \in [-r, r]$, akkor $u \in ?$

$$u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$T_o = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u} \cdot r \cos u \cdot du = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \cdot du$$

$$\cos^2 u \text{ je: } \cos^2 = \frac{\cos 2u + 1}{2}$$

$$T_o = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u + 1}{2} du$$

$$r^2 \cdot \left[\frac{\sin 2u + 1}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left[\frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2} \right] = \underline{\underline{r^2 \pi}}$$