

## Kalkulus I. Próba zárthelyi

1. Tekintsük a következő állítást:

Minden  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ -hoz léteznek  $n, m \in \mathbb{N}$ , hogy  $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \epsilon$ .

Igaz-e az állítás? Írjuk fel az állítás tagadását!

2. Legyen  $H := \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{n}} : 2 \leq n \in \mathbb{N} \right\}$ . Határozzuk meg  $\inf H$ -t és  $\sup H$ -t!

3.  $(\sqrt{6} + 6i)^6 = ?$

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{\sqrt[3]{3 + n^2}}$$

5. Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n} + 1}$  sor?

6. Számoljuk ki az alábbi határértékeket!

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

7. Számítsuk ki az alábbi hozzárendelésekkel adott  $f$  és  $g$  deriváltját!

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}}, \quad \text{b) } g(x) = \text{tg} \left( 1 + \ln \frac{x}{2} \right)$$

8. Legyen  $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2}$ . Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

9. Írjuk fel az  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  függvény másodfokú Taylor-polinomját a 0 körül! Ez a polinom mekkora hibával közelíti az  $f$  függvényt a  $[0, 1/2]$  intervallumban?

10. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\text{a) } \int \frac{3}{1 + 2x + 4x^2} dx \quad \text{b) } \int \text{arc tg}(1 - x) dx = ?$$