

90 perc áll rendelkezésre, semmilyen segédeszköz nem használható, minden választ indokolni kell; minden feladat 1 pontot ér.

1. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto (x-1)^2 e^{-x}$. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot f esetén!

2. Számoljuk ki az alábbi két határértéket!

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pi \frac{e^{x^3} \sin x}{x^3 \cos(x)} + \operatorname{arctg} 2 \right)$;

(b) $\lim_{0+0} (\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^{17} (\ln \circ \operatorname{id}_{\mathbb{R}}^3))$.

3. Számoljuk ki az alábbi két határértéket!

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} + \ln(n+28) \right)$;

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(-3)^n + 17^n}$.

4. Legyenek minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén x_n, y_n, z_n olyan nemnegatív számok, hogy $x_n \leq y_n \leq z_n$. Tegyük fel, hogy a $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Igaz-e, hogy az

$$\mathbb{N}^+ \ni n \mapsto \sqrt[n]{x_n^n + y_n^n + z_n^n} \in \mathbb{R}$$

sorozat konvergens? Igaz-e, hogy van határértéke?

5. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) := \prod_{j=0}^{17} (x-j) + 2^{17}(e^x - x)$ differenciálható függvény. Mivel egyenlő az $f'(1)$ szám?

6. Mivel egyenlő az alábbi határérték?

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^{17} \ln(x^3)).$$

7. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $\operatorname{ran} f \subseteq [0, 1]$. Lássuk be, hogy van olyan $t \in [0, 1]$, hogy $f(t) = t$!