

Kalkulus gyakorlat (emelt szint)
Fizika BSc I/1, 2. ZH 2013. december 13.

Minden lapon legyen rajta a **szerző neve**, **neptun kódja** és a **gyakorlat vezető neve**! Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz pusztja közléséért nem jár pont. Indoklásként csak az ebből a tárgyból előadáson, illetve gyakorlaton elhangzottakra lehet hivatkozni. A ZH-n egysoros kijelzőjű (grafikus megjelenítésre nem alkalmas) számológép használható. Bármilyen egyéb eszköz használata elégtelen gyakorlati jegyet jelent. Jó munkát!

* **Beugró:** 4 hibátlan részfeladat szükséges!

- Deriváljuk a következő függvényeket!

$$-\operatorname{sh} x + \frac{10 + x^2}{\sqrt{x}}, \quad \ln(-5 \operatorname{tg} x), \quad \frac{e^x}{x^5 + 2 \sin x + 5}$$

- Végezzük el az integrálásokat!

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx, \quad \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

1. Írjuk fel az $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$, $(x > -1)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ intervallumon maximum mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt! (5+5 pont)

2. Végezzük el az

$$f(x) = \frac{25x^4}{(x+2)^4}$$

függvény teljes vizsgálatát!

(10 pont)

3. Igazoljuk, hogy az $f(x) = x + \ln x$, $(0 < x)$ függvény invertálható, majd számítsuk ki $(f^{-1})'(1+e)$ -t! (7 pont)

4. Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = ?$$

(7 pont)

5. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! A másodikat alkalmas helyettesítéssel!

$$(a) \int (18x^2 - 3) \ln \frac{2x}{3} dx, \quad (b) \int 2x^2 \sqrt[5]{x^3 - 2} dx.$$

(8+8 pont)

6. * Szorgalmi: Hol a hiba az állításban? Van-e egyáltalán hiba?

Állítás: Minden pozitív szám egyenlő önmaga kétszeresével.

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy minden x pozitív számra $x = 2x$. A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt nyilván elég igazolnunk, hogy $\ln x = \ln 2x$, minden $x > 0$ esetén. Ez utóbbi viszont következik az alábbi egyszerű átalakításból:

$$\ln x = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{2}{2x} dx = \ln 2x.$$

Ezzel a bizonyítás kész.

(5 pont)