

Kalkulus gyakorlat (emelt szint)
Fizika BSc I/1, 1. ZH 2013. október 25.

Minden lapon legyen rajta a **szerző** neve **neptun kódja** és a **gyakorlat vezető neve**! Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz pusztán közléséért nem jár pont. Indoklásként csak az ebből a tárgyból előadáson, illetve gyakorlaton elhangzottakra lehet hivatkozni; a differenciálszámítás és alkalmazásai vagy a L'Hospital-szabály nem része az első zh anyagának! A ZH-n csak (lehetőleg fehér) papír, egysoros kijelzőjű számológép és nem piros toll használható. Bármilyen egyéb eszköz használata elégtelen gyakorlati jegyet jelent. Jó munkát!

1. Igaz-e a következő állítás? Fogalmazzuk meg a tagadását tagadószó használata nélkül (és a kötőszavak értelmes használatával)! (8 pont)
„Minden $q \in \mathbb{Q}$ esetén létezik $r > q$, ($r \in \mathbb{R}$) szám úgy, hogy minden $s \in (q, r)$ esetén $s^2 - s + q^2 > 0$.”
2. Legyen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. Injektív-e, illetve szürjektív-e f ? Mi f értékkészlete? (8 pont)
3. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2(x)$. Határozzuk meg a $f^{-1} \left(\left(\frac{1}{2}, 1 \right] \right)$ halmazt! (5 pont)
4. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \geq -1/2$, akkor $(1 - a)^5(1 + a)(1 + 2a)^2 \leq 1$! (5 pont)
5. Adjuk meg a $z^3 = i$ egyenlet gyökeit trigonometrikus alakban! Határozzuk meg a gyökök tizenkettedik hatványainak összegét és szorzatát! (6 pont)
6. Határozzuk meg a következő függvényhatárértéket! (6+6 pont)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^n - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$$

- 7*. Értelmezzük az (a_n) sorozatot a következő rekurzióval: $a_1 = \sqrt{2}$ és $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét! (6 pont)