Kalkulus gyakorlat (emelt szint)
Fizika BSc I/1, 1. ZH

Minden lapon legyen rajta a **szerző** neve! Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz puszta közléséért nem jár pont. Indoklásként csak az ebből a tárgyból előadáson, illetve gyakorlaton elhangzottakra lehet hivatkozni; a differenciálszámítás és alkalmazásai vagy a L'Hospital-szabály nem ilyen! (Ezek majd a következő ZH-ban lesznek). A ZH-n csak (lehetőleg fehér) papír és nem piros toll használható. Bármi egyéb eszköz használta elégtelen gyakorlati jegyet jelent!

---

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén: $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{4}{\sqrt[4]{n^3}}$. (6 pont)

2. Igaz-e az alábbi állítás? Fogalmazzuk meg a tagadást tagadószó használata nélkül!

   „Minden $q \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > q$ esetén minden $s \in (q, r)$ esetén létezik $p \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, amire: $\sin(px) = s$." (4 pont)

3. Legyen $B \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmaz. Legyen $-B := \{-b : b \in B\}$ az ellentett halmaz. Igazoljuk, hogy $\inf(-B) = -\sup B$! (6 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán! (8 pont)

$$z^4 = \left(2\left(i\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)\right)^{17}$$

5. Számítsuk ki az alábbi határértékeket! (6+6 pont)

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{4n-1} - 4^{3n+2} + \sqrt[n]{n}}{5^{2n-1} - 9^{2n+1} + n^{81}} = ?$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4} - n - 2\right) = ?$

6. Számítsuk ki az alábbi határértékeket ($n, m \in \mathbb{N}^+$)! (7+7 pont)

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{16-2x} - \sqrt{16+3x})\mathrm{ctg}3x = ?$ (b) $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^n - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} = ?$

7*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán! (4 pont)

$$z^2 + i\bar{z} = 0$$