

Kalkulus I. Vizsga 2009. december 15.

1. Mely függvényeknek van inverze? Igaz-e, hogy bármely két függvényre, amelynek van inverze $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$? Legyen $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \sin^2 x$. Határozza meg az $f \circ g$ függvényt!
2. Definiálja egy valós számokból álló halmaz supremumát és infimumát. Keresse meg a $z^4 = 1$ egyenlet komplex megoldásait.

3. Fogalmazza meg a hányados kritériumot.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = ?$$

4. Definiálja a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határérték fogalmát, amennyiben ez véges. Adja meg az arctg függvény definícióját, és ábrázolja a függvényt. Van-e olyan x szám, melyre $\arctg x = -\pi/4$?
5. Bizonyítsa be a definíció segítségével, hogy az $f(x) = |x|$ függvény a 0 pontban nem deriválható. Vezesse le az x^2 függvény deriváltjának képletét. Számítsa ki az $f(x) = \ln(x^4 + \arctg(2x+1))$ függvény deriváltját.
6. Definiálja a lokális maximum fogalmát. A függvény deriváltjainak segítségével hogyan kereshető meg a lokális maximum? Keresse meg az $f(x) = \exp(-x^2)$ függvény inflexiós pontjait.
7. Írja fel a Taylor formulát Lagrange maradéktaggal. Számítsa ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 x}$$

határértéket.

8. Fogalmazza meg a helyettesítéses integrálás szabályát.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^x}} dx = ?$$

9. Vezesse le a Newton-Leibniz formulát. $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx = ?$

Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz pusztán közléséért nem jár pont. A vizsgán egysoros kijelzőjű számológép használható.