

Kalkulus I. Próbavizsga (2006/2007 I. félév)

Valamennyi feladatnál *indoklás szükséges*, az eredmény vagy a válasz pusztán közléséért nem jár pont.

1. Definiálja a kompozíció fogalmát. Igaz-e, hogy bármely két függvényre $f \circ g = g \circ f$?
2. Fogalmazza meg a felsőhatár axiómát. Van-e olyan H halmaz, amelyre $\sup H = 1$, de $1 \notin H$?
3. Hogyan lehet két trigonometrikus alakban megadott komplex szám hányadosát meghatározni? Keresse meg a $z^3 = -1$ egyenlet megoldásait.
4. Van-e olyan sorozat, amelynek nincs határértéke? Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak van határértéke, akkor korlátos? $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{(2n)^n} = ?$
5. Igaz-e, hogy egy konvergens sor tagjait csökkentve konvergens sort kapunk? Fogalmazza meg a gyökkritériumot. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{(n^2-2n+5) \cdot 11^n}$ sor?
6. Definiálja a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határérték fogalmát, amennyiben ez véges. Igaz-e, hogy ha egy f függvény folytonos egy a pontban, akkor a szorzatuk sem folytonos? Meg lehet-e adni úgy a c szám értékét, hogy a következő függvény folytonos legyen 1-ben? $f(x) = cx + 1$, ha $x \leq 1$, illetve $f(x) = x^2 + x - c$, ha $x > 1$.
7. Adja meg az arcsin függvény definícióját. Mutassa meg, hogy $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
8. Írja fel a szorzat és a hányados deriválási szabályát. Számítsa ki az $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ függvény deriváltját.
9. Igaz-e, hogy ha $f''(x) = 0$, akkor az f függvénynek az x pontban inflexióspontja van? Igaz-e az állítás megfordítása? Keresse meg az $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ függvény szélsőértékeit.
10. Fogalmazza meg a L'Hospital szabályt. Írja fel az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor polinomját.
11. Vezesse le a parciális integrálás szabályát. $\int \frac{3}{\sin^2(2x+3)} dx = ?$ $\int \arccos x dx = ?$
12. Fogalmazza meg a Riemann integrálhatóság definícióját. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} dx = ?$ $\int_0^1 x e^x dx = ?$