Jelfeldolgozás

- itt.7.elte.hu
- Bagoly Zsolt
- szóbeli vizsga lesz: lesznek alapfogalmak, amiket kötelező tudni az elégségeshez
  jó jegyet nehéz lesz szerezni!
- jegyzetek:
  - jelek feldolgozása (Bagoly Zs., Csákány A.)
  - DSP (angol nyelvű jegyzet)

} itt.7-en fent vannak

1. óra

Digital Signal Processing (DSP)

↓ zajt ki kell szűrni

1) Miért digitális?

(lehetne analóg is → 50-es évek)

de ez jobb, mert:

→ analóg szűrő → RLC kör kell → L: drága, érzékeny, C: drága, ...

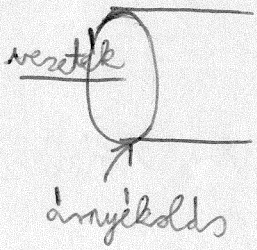
→ digitális jel: számítógéppel lehet szűrni a jeleket!!!

↳ szoftvert elég megváltoztatni, nem kell új berendezést építeni

(pl. marsjáró)

transzatlanti vezeték: 20 perces időállandó, beázott
↑
nagy R, C

koaxiális kábel:



UTP kábel (számítógép)



⇓
2 vezeték megcsavarása
⇓
az indukált fesz. kioltja egymást

⇓
zavarvédett, de drága



⇓
sokáig ezt használták
pl. WIFI antenna

10 MHz → kábel frekvenciatűrése

3500 Hz → beszéd

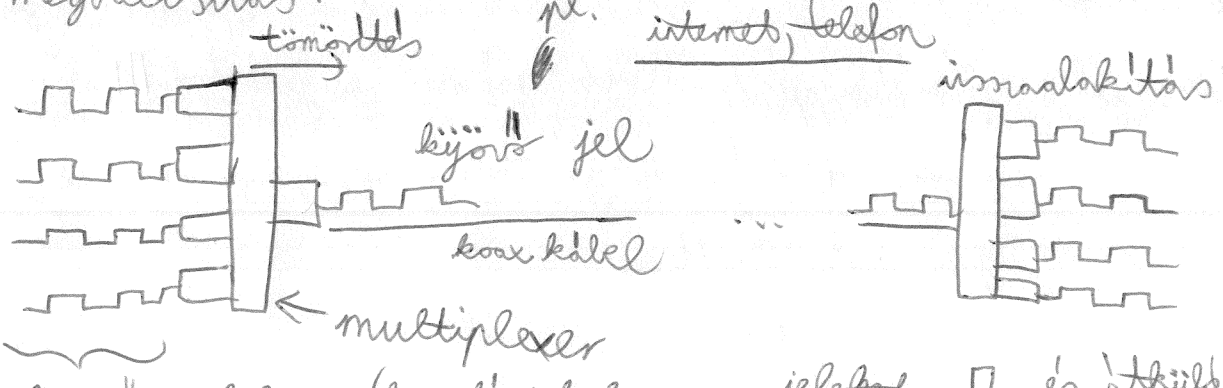
⇓

$\frac{10\ MHz}{3500\ Hz} \approx 3000$ jelet tudok átvinni „1 beszédjelből"

↓ alatt

3000 telefonbeszélgetés 1 időben

megvalósítás:



(egyenként kiolvassa a jeleket ⊓⊔ és átküldi őket)
↳ időcsomagok → internetes protokoll

(telefon: zajt tesznek bele, hogy ha a másik nem beszél, akkor is halljuk, hogy van vonalban)

visszhang: 10 ms-os késleltetés

↓

Skype-nál ilyen nincs

- csökkentett sávszélesség áll rendelkezésre a telekomm.-ra:

↑ keveset tudnak beszélni, ha nincs tömörítés

GSM technológia

beszéd → digitális tömörítés, zajszűrés

↓ rádióhullámos sugárzás

pseudovéletlenszerűen váltogatja a frekvenciát

+ rövid csomag

= szűkös adatforgalom

↓

tömegkomm.

+ kis készülékek (CPU fejlődés miatt)

tömörített csomag → kisebb fogyasztás

↓

ha több csatorna van → nagyobb sávszélesség

↓

szűkebb körben lehet kommunikálni

4G → 10 Mbit/sec → valóságban ennél kevesebb, mert ha sokan használnak egy adótornyot, akkor az 1 főre jutó sávszél. is csökken

Dolby rendszer:

- MP3 tömörítés: hang → harmonikus (sin, cos) komponensekre bontja fel, megállapítja a Fourier-együtthatókat

↓

amit az emberi fül nem hall, azt kiszedi

amikor összerakja, ← amikor összerakja újra ez nem zavaró (nem lesz olyan finom, de érthető)

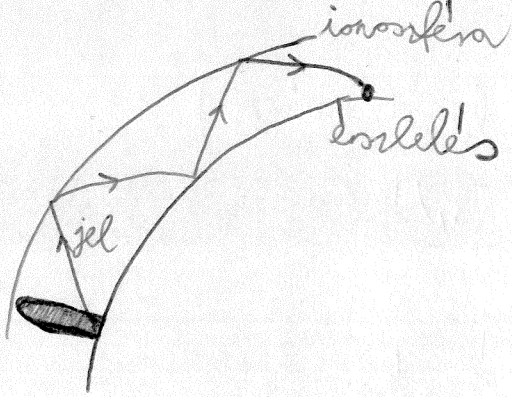
⇓

- hangfeldolgozás:
  - zene, „nyúlás és „rétegítés"
  - Dolby X, Y surround rendszerek
  - beszédszintézis
  - beszédfelismerés

- visszhang:
  - radar, chirp jelek

↓

pl. rakétaindítás



pl. radarcsillagászat

→ elektronikus eszközök élettartama:

Tungsram izzó → a szórást csökkenteni kell, de kell egy elavulási idő (10 000 óra), egyébként ~~csökken~~ rontsolja a piacot

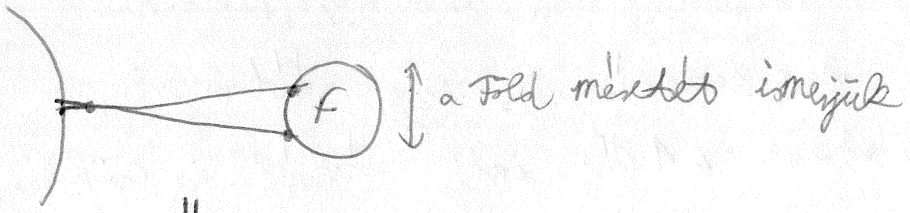
akkumulátorokban diffundálnak (!) az ionok → idő után tönkremegy

→ szoftvert csak egy ideig lehet fejleszteni, egy idő után elavul (Symbian-ról kellett dobni)

Linux-a kernel több részből áll

↓

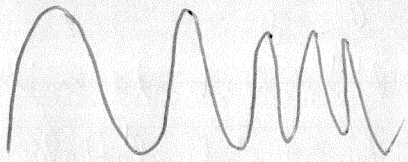
elég egy kis részt kidobni



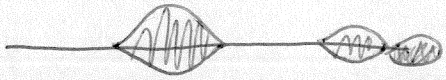
⇓

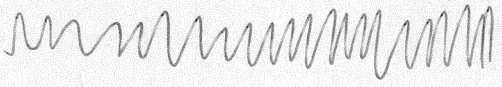
meg lehet mondani a Vénusz távolságát

változó frekvenciájú jelet kell érzékelni

pl.  → változik a

jó jelalak, mert jól megkülönböztethető a ~~(jellel)~~ zajtól

 jel

 érzelés

↳  dekódolás → nagyon pontosan meg tudjuk mondani a jelünk kezdetét

pl. grav. hullám érzékelése

↳ jó elmélet: a kettős neutroncsillag keringését jól leírja

↓

közeledik a kék csillag, ~~nem csak~~ mérhető lesz, mégpedig olyan mértékben, ahogy az elmélet leírja

↓

összeolvadás ← az inp. momentum csökken, mert grav. hullámokat bocsátanak ki

↓

nagy grav. hullám

baj: igazából itt is zajt keresünk

(analógia: Π bitjeiben) bekódolva ~~a~~ vízszintes vonalak sorozata, de az 1-el eltérő hossz ⌈—5—⌋ sorozat is → nem tudom, mikor találtam meg

emberi agy + szem: lát ~~elakat~~, ~~struktúrákat~~

általában (még ott is, ahol nincs)

↓

EEG tanulmányozás

↓

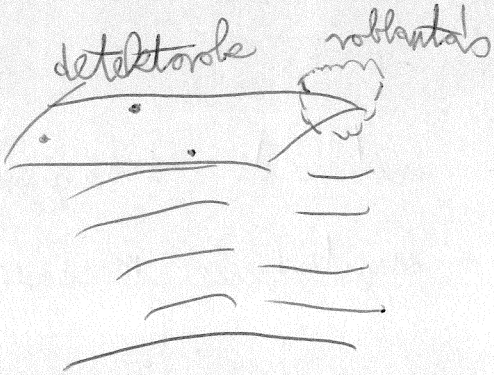
kísérlet: tiszta zajban struktúrát láttak

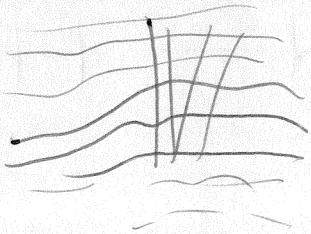
- szonár:

hasonló probléma

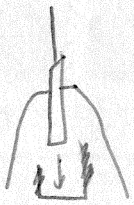
pl. tengeralattjáró, orvosi vizsgálat (Ultrahang)

vagy dajnezők keresése





tenger alatti kutatás



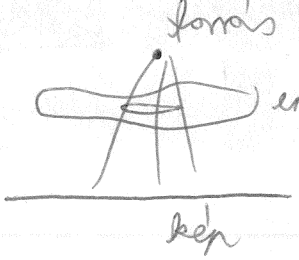
„kopogtatás"

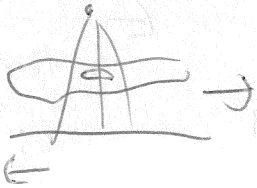
a robbantáshoz hasonló, de kisebb ampl., vissza tovább lehet csinálni

orvosi:

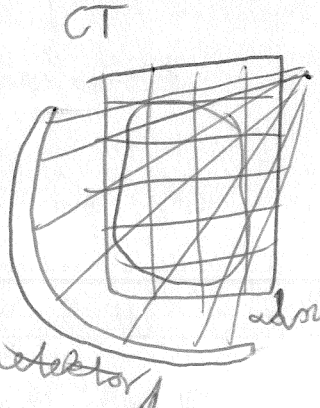
CT, MMR / MRI

(RTG:





de más részek is belekerülhetnek)



abszorpció (sűrűség től függ)

ha még forog is a forrás ⇒ térbeli modellek

- ürkutatás
- élességállítás, fotózásnál rezgéskiemelés

↓

□ mágnes
←→ rezgés → indukált áram

↓

ezzel lehet kikompenzálni a remegést

pl. arcfelismerés:
- szürkeli egyezés
- élek struktúrája, fókusz

fókuszálás → finom részletek → magas frekvenciás jel → ezeket kell kiszűrni

2. óra

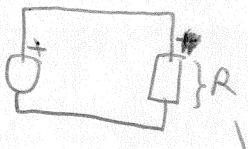
Rendszerek

1) Osztályozás:

• koncentrált és elosztott paraméterű

↓ valóság

pl.

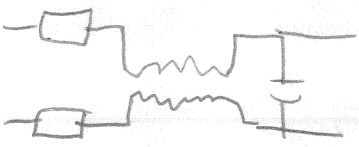


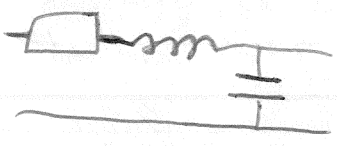
→ koncentráltnak tekintjük, mert pl. a vezeték ellenállását nem tekintjük

↓

R-et ebbe "sűrítjük"

vagy





aluláteresztő áramkör
(nagy L → vége szakad)

• sztochasztikus, determinisztikus

↓ pl. zajerősítő

nem tudjuk pontosan megmondani, hogyan fut le, milyen állapotba áll be

↓ adott folyamat szerint fut le

↓ állapotban a zaj fontos szerepet játszik

nagy kaotikus áramkör (nemlineáris): 2-5 fix állapot, a kezdőfeltételektől érzékenyen függ a beállás

nyomás/érzékelés:

↑ indukcióval érzékeljük a benyomódást

nagy A → konst. jel

kis A → ingadozás

• folytonos, bináris és kvantált

↓

↳ ált. kor minden kvantált (pl. tőke, ... fotonok)

↳ fényképezés:

kis felület → kis kapacitás

↓ kifolyik

↑ nagy fényérzékenység

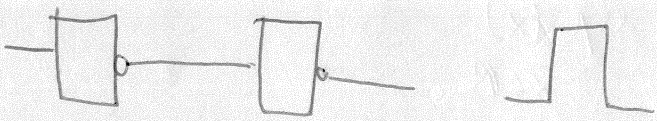
a könyvet elmosódik

esetek mi kat. meg.

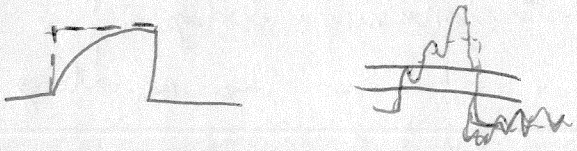
↳ bináris: azért jó, mert a zaj kis szerepet játszik → nagyobb pontosság

(lehetne „trigitális" áramkört építeni → 3 állapot)

↳ miért van mégis digitális?



↓ RC ↘ RLC



↙

van tiltott sáv a bemenetnél

3 szintnél bonyolultabb megépíteni → 2 tiltott sáv

→ nehezebb a szinteket beállítani

analóg helyett digitális

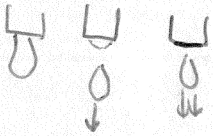
↑

univerzálisabb

- lineáris és nemlineáris

↓

pl. diódák, ...

csap  → ha gyorsan csepeg 

↓

tud áthagyni egy kis vizet

↓

„memória" a ← a következő csepp lecsepegése ettől is függ

rendszerben

↓

kaotikusság

2) Jelek:

- determinisztikus
  - periodikus pl. sin
  - nem periodikus pl. $\exp(x)$ $x \in \mathbb{R}$
- sztochasztikus
  - stacioner: izotóp bomlása → kis időig mérve az átlag állandó
  - nem-stacionárius: izotóp -"- → hosszú időig mérve változik az átlag bomlás

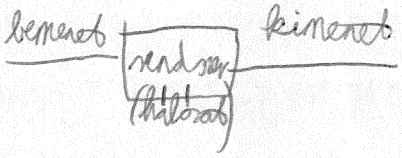
Feltesszük: jel, véges energia, L^2 integrálhatóság

$$\int |h(t)|^2 dt < \infty$$

vagy $\int |h^2(t)| < \infty$

3) Lineáris rendszerek:

- jellemzően lineáris diff.-egyenletekhez kapcsolódnak



lineáris
H: rendszeroperátor

$x(x)$ bemeneti jel $\quad y(x) = H \cdot x(x)$

$y(x)$ kimeneti jel

DE lehet keveredés is, nem csak a 2 jelet adja össze

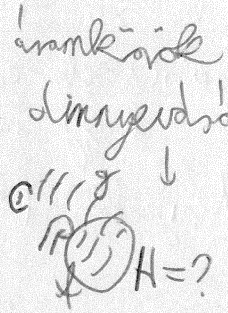
$(Hx_1 + Hx_2 = H(x_1 + x_2))$

Lineáris rendszerek vizsgálata

$Hf = g$

1) Tipikus esetek:

- be- és kimenet ismert, H=? (pl. dimenzióinak)
- H, g ismert, f=? (mérés véges felbontóképességű érzékelőkkel, → jobb felbontóképes. jobb mérés)
- f, H ismert, g=?



↓

modellezés, vezérlés, előrejelzés (pl. tőzsde, reaktor, időjárás)

↓

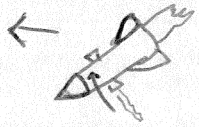
nemlineáris jelek, inputjaival

rossz definíciójú

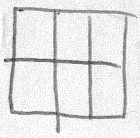
↓

irányított leállás

amerikai példa



szuperpixel-rekonstrukció



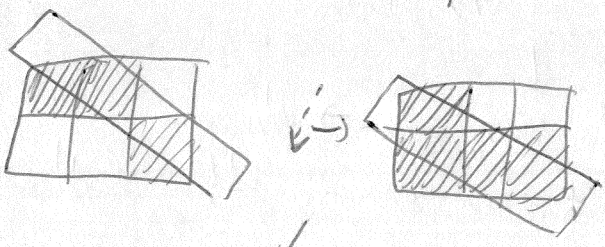
← pixelek

↓

véges felbontóképes.

↓

DE ha ugyanazt képpontokra lebontjuk, akkor kicsit a kapott kép



↓

meg lehet határozni az eredeti képet a pontos geom. pozíciók

2) Lineáris, időinvariáns rendszer:

↓

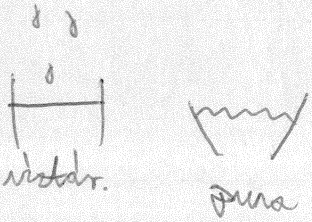
- additivitás + homogenitás

$$H(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \underbrace{Hf_1}_{g_1} + \alpha_2 \underbrace{Hf_2}_{g_2}$$

- időbeli állandóság nem kell, de egyszerűség kedvéért feltesszük

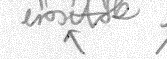
– memória nem lehet

pl. Duna vízállása



↓

ha sok eső → vízdr. a lefolyási sebesség-e függ attól, hogy mennyi víz van benne



pl. hullámterjedés (hang, EM), RLC áramkörök, visszhangok (ultrahangos vizsgálat) ~~stb~~, rezonancia jelenségek, elmosódott képek

↓

NMR (nuclear magnetic rs.)

↓

nem ionizáló sug., csak EM

izotópok rezgetése a mágneses térnél

↓

másik gép → elnyelést méri

↓

ez a szövetre ← hol van sok H?

(hidrogén)

egy vizsgálata:

vérerek hol tágulnak ki

↓

a különböző agyi területek vizsgálata

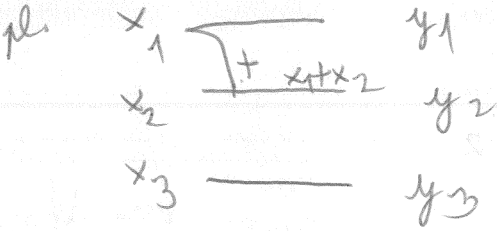
↓

pl. látás vizsgálata → képeket le tudnak olvasni látás alapján (idegek)

3) Kommutativitás:

(alt. ban teljesül) $A \cdot B = B \cdot A$

a rendszeren belül össze lehet adni a jeleket, ez nem befolyásolja:



$\rightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$

4) sinusos jelek lineáris rendszereken

~~A~~) ha lin., akkor

- $a \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow a' \sin(\omega t + \varphi')$ $\quad \omega = !all!!$
  sin be → sin ki

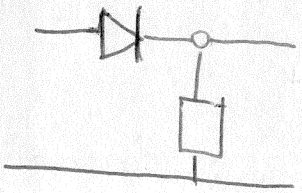
↓

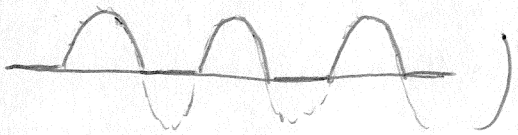
ez ~~azért~~ azért jó, mert a sin sajátfv. lesz

↳ sin-okra fel lehet bontani a fv-eket (Fourier-sor)

hasonlóan hullámegyenletnek is sfv.-e

(nemlineáris



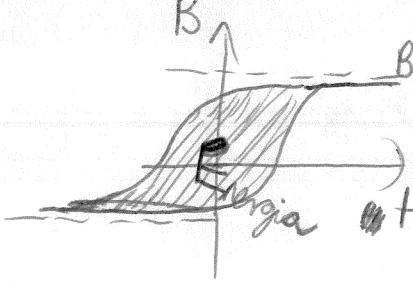


)

- Bode-diagramm:
  - frekvencia, amplitúdó, hullámszám egyértelműen leírja a rendszert
- fordítva nem igaz! (PLL)
  sin ki ⊄ sin be

5) Nemlinearitások

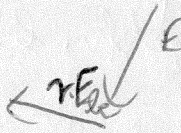
pl. teljesítménnyel arányos mennyiség, abszorpció, hiszterézis, saturáció, komparátor, memóriával bíró rendszerek



6) linearizálás:

- kicsi nemlinearitás (pl. erősítők)
- kicsi jelek (Taylor-sor!)
  ↳ elsőrendű tagig
- linearizáló transzformáció (homomorf trafó)

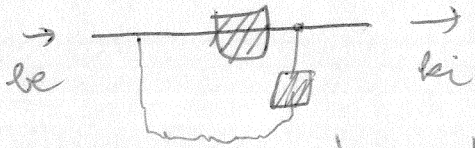
pl. fényképezés



ez nem lineáris, DE a log-a igen
↳ szétszedhetem ~~faktorokra~~ hullámhosszkomponensekre

7) Kérdések:

- linearitásnak és időinvarianciának tekinthető-e egy olyan rendszer, amely műveletet tartalmaz?

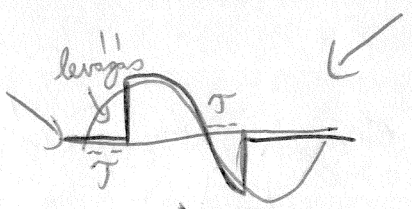


késleltetve még lineáris!

(LHC → γ érzékelés → nem volt jó lekötve az optikai kábel → késleltetés)

- izzólámpa fényerejének szabályozása tirisztorral

szabályozás





→ bizonyos áramerősség alatt levág

(amplitúdómódosítás)
(nehéz) ~~nem jó~~ ~~tud~~

nemlineáris (teljesítményszab.)

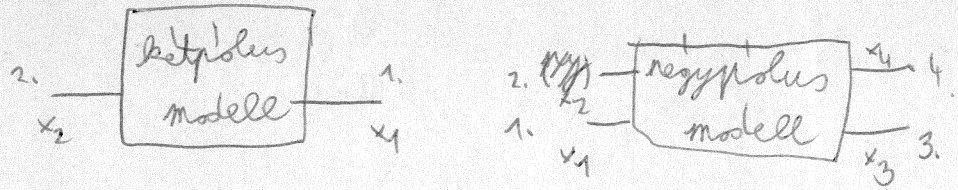
- szorzóáramkör → nemlineáris

3. óra

A kör. óra később kezdődik (15-30 perccel)!
kezdés ≈ 11^{45}, vége ≈ 13^{00}

Koncentrált paraméterű rendszerek

1) Idealizált modell:
- kétpólus (pl. RLC) (2 vége van)
- négypólus (pl. transzformátor, erősítő) (4 „vége" van)



aktív és passzív elemek
↓
energiát szolgáltatnak, pl. generátor

2) változók típusai:
- átmenő változó (áram, fluxus): a kétpólus két végződésén akkora
- kapocs (keresztváltozók) (pl. fesz. nyomás): a kétpólus — " — különbség

⇑
(Kirchhoff-egyenletek)

(pneumatika: előállításra jobb → csak egy cső kell, ami hajlékony
hidraulika is lehet
később, egyszerűbb gyártani
hidraulikus pneumatikus) áramkört is lehet építeni)

3) Példák:

- kondenzátor (C)

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

- indukciós tekercs (L)

$$U = L \frac{dI}{dt}$$

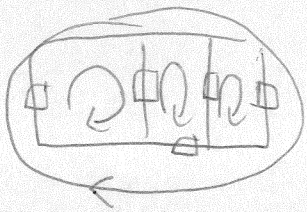
- ellenállás (R)

$$U = R I$$

4) Rendszeregyenletek

- diffegy. rendszer helyett → hálózati mo.
  - csomóponti tv. $\sum I = 0$
  - hurokegyenlet $\sum U = 0$

↳ lineáris egyenletrendszer

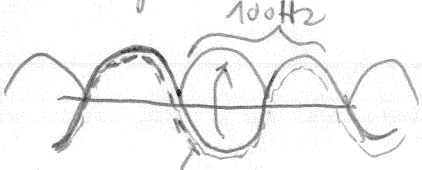


Thevenin: tetszőlegesen + sok kötött R } ezekkel helyettesíthető
Norton: áramgen. + ||-ar — ||— } ∀ lin. áramkör

5) átviteli fv.

- $f(t) = e^{i 2\pi f_0 t}$
- lin. rendszerben $f(t)$ amplitúdója és fázisa változik, de frekvenciája nem!

(dióda !... → frekvenciasokszorozók, pl. Grätz kapcs.



nemtelítésig ← L, C határa a vezérlés → ha magasabb frekvenciájú → ennyivel → 50 Hz (amerikai 60 Hz-es

átvinni nagy mintha alulátereszt. jel lenne forog a gen.

$\pi\omega^2$ → nagyobb erő ⇐

(több frekvenciaösszetevő → magasabb frekvenciák → orci)

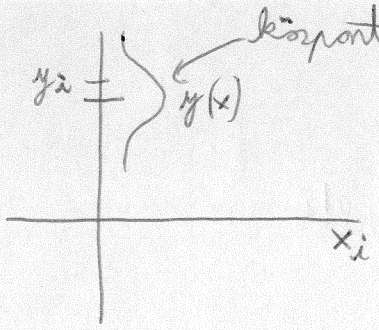
H(f): amplitúdó és fázistolással

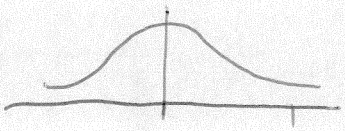
$$g(t) = H(f)\, k(t)$$

Vektorok hasonlósága

~~(paraméter szerinti)~~

központi határeloszlás tétel:
∞-sok eloszlásfv.-t "összeadva" Gauss-görbét (normális eloszlást kapunk)





$y(x_i)$ fv. értéke — y_i mérés

vagy fordítva



$p = e^{-\frac{(y_i - y(x_i))^2}{2\sigma_i^2}}$, hogy a mért pont minden egyes pontra ← az $y(x_i)$ közelébe esik

legyen ez a val. maximális
(minél nagyobb, annál közelebb van)

↓

több pontra: $p = \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{(y_i - y(x_i))^2}{2\sigma_i^2}}$

↙

ez maximális, ha $\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - y(x_i))^2}{\sigma_i^2}$ minimális

majdnem ez pont a kitevők összege, ami p-ből jön

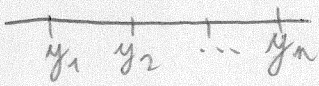
pl. egyenesillesztés

$$y(x_i) = a x_i + b$$

mérés:



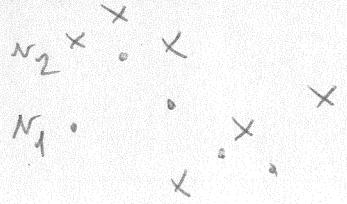
→ n dim. vektorba rakjuk → $\underline{y}(\underline{x})$



→ —11— „egyenes pontjai"

a két vektor mennyire esik közel

vagy 2 mérés



N_1, N_2 mennyire hasonlít

$$\left[N_1 - c_{12} N_2\right]^2$$

c_{12} faktor, hogy a 2 vektor mennyire has.: +1 → azonos irányba áll
−1 → ellentétes —11—

$$\frac{\partial}{\partial c_{12}} \left(N_1 - c_{12} N_2\right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_{12}} \left(N_{1k} - c_{12} N_{2k}\right)^2 = \sum_k N_k^2 - 2 \sum_k N_{1k} N_{2k} c_{12} + c_{12}^2 \sum N_{2k}^2 \quad / \frac{\partial}{\partial c_{12}}$$

$$c_{12} = \frac{\sum_k N_{1k} N_{2k}}{\sum_k N_{1k}^2}$$

$$c_{21} = \frac{\sum_k N_{1k} N_{2k}}{\sum_k N_{2k}^2}$$

skalárszorzat: a területet veszi

(egységvektor: egységnyi energiájú jel)

Fourier - sorok

1) Fourier: hőtani vizsgálatok

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

- Elektrodinamika: $\Delta \phi = 0$

(~~Green~~ diff. egy. rendszer bázisai (sajátvektorok) → ha ezek szerint fejtem sorba a megoldást, gyorsabban konvergál a sor !)

↓

2) változók szétválasztásának módszere:

→ fv-ek linearkombinációja a megoldás kezdőfeltételek, peremfeltételek

↳ Bode-diagramm

pl.: • bekapcsolási jelenségek

• periodikus gerjesztés nem szinuszos jelekkel



Mo.: felbontjuk a bázisokra → 1 bázisra megnézzük a mo.-t

↓

összeadjuk a megoldásokat

⇓

a lényeg a felbontás (ez a nehéz):

3) pl. per. jel Fourier felbontása:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \quad , \text{ahol } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

↑ a jel periódusa

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 k t}$$

alapjel → ω_0

(felharmonikusok összege)

ez jegyzetben volt

↓

↳ ebből: $a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cdot \cos(k\omega_0 t)\, dt$ ← a sin és cos teljes ortogonális fv-rsz. sorát alkotnak.

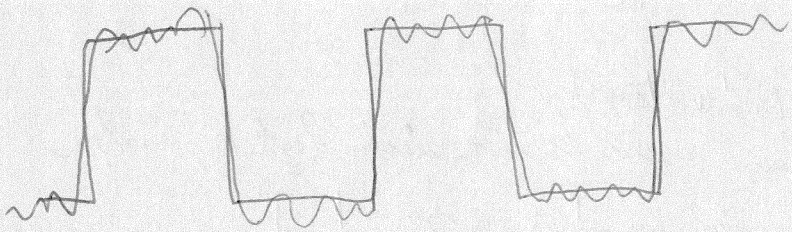
$b_k = \dots$

pl. szimm. négyszögjel

$a_{2k+1} = (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1}$ → páros/ág miatt

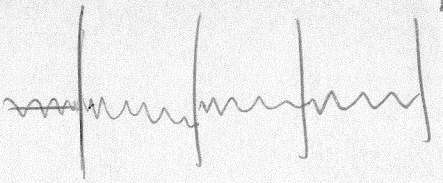
$a_{2k} = 0$

$b_k = 0$



↓

különbség



↙ sokáig nem akarták elfogadni a ~~kon~~nvergenciát, mert konstans magasságú csúcsok voltak

↙ fizikai megfontolás: energia szempontjából a konstans, ∞ lekay imp. nem szánató

pl. Δ-jel:

~~Itt~~ → a négyszögjel a Δ jel deriváltja-e!

↳ hasonló lesz a felbontás, csak cos helyett sin lesz

Gyakorlófeladatok:

↗ fázistoltással lesz felharmonikusok

1) $3\sin(t+\pi/8)$ → addíciós tétellel

$3\sin t \cdot \cos\frac{\pi}{8} + 3\cos t \cdot \sin\frac{\pi}{8}$

$e^{i\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\alpha}$

↳ $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ = ?

2) $f(t) = e^{-t}$, ha $t > 0$

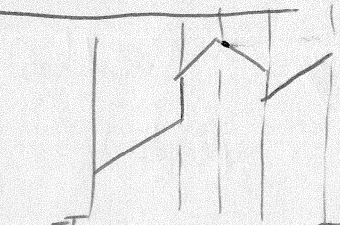
$f(t) = 0$, ha $t < 0$

} → Fourier

4. óra

Fourier-analízis (folyt.)

1) Periodikus fv-ek



darabonként kell összerakni

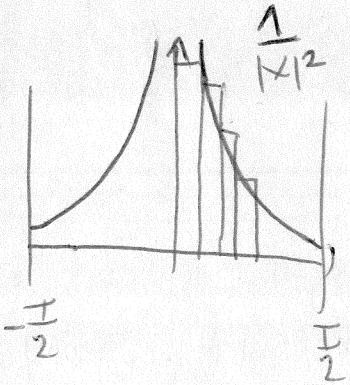
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

$$c_k = (a_k - ib_k)/2$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (kx+b)\cos(k\omega_0 x)\,dx = \int_{-T/2}^{T_1} ax\cdot\cos(cx)\,dx + b\int_{-T/2}^{T_1}\cos(cx)\,dx \quad \xrightarrow{\text{parc.int}} \ \ldots$$

$c = k\omega_0$



→ páros lesz csak

$$\int_0^{T/2} \frac{1}{x^2}\cos(cx)\,dx$$

↓

HF kiszámolni az együtthatókat

2) Nem per. fv-ek:

a) 

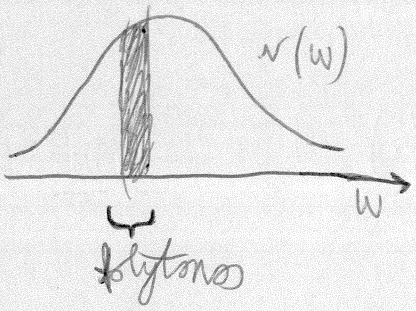
→ periodikusnak képzeljük el, és $T \to \infty$

⇓

$\omega_0 \to 0$, $k\omega_0$ pontok sűrűsödnek

↙

folytonos együtthatók a_k, b_k-k helyett (sűrűn vesszük mindet)



spektrum → szűrővel szét lehet bontani, hogy intenzitást (ehhez) mérjünk, de ennek van szélessége

↑ jósági tényező miatt $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$

ez függ a mérési időtől is

ezek felelnek meg az előzőnek

$\Rightarrow$ $\nu(\omega)$-nak önmagának nincs értelme, csak $\boxed{\nu(\omega)\cdot d\omega}$-nak

ezt tudjuk mérni (bejövő energia)

(pl. pulzárok EM hullámainak mérése

↓

körbeforognak egymás körül

↓

grav. hullámokat bocsátanak ki)

↓

problémák: időmérés bárisz → milyen órák legyenek? (kvarc, atom)

→ sok csúszás lehet (1 nap alatt több ezer mérési idő)

hogyan keringenek

$$V(\omega) = F\{\nu(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} N(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

sajátfv (bárisz-nek választjuk)

$\omega \to \infty$ dim. $\to$

ezek szerint bontjuk fel

$$x(t) = F^{-1}\{V(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(w)\, e^{iwt}\, dw$$ Fourier-eloállítás

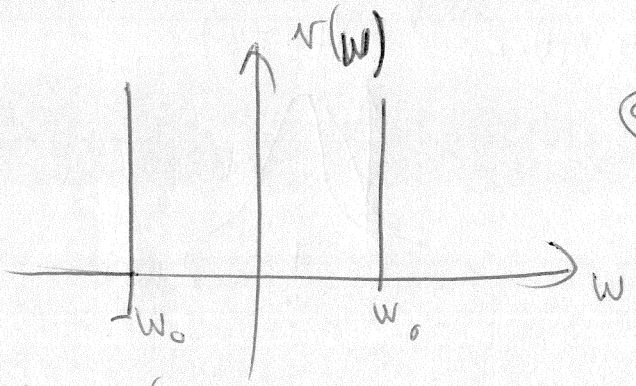
vektorhossz miatt kell ($\sqrt{2\pi}$ hosszúak)

pl.

$f(t) = \cos(w_0 t)$ (tiszta cos)

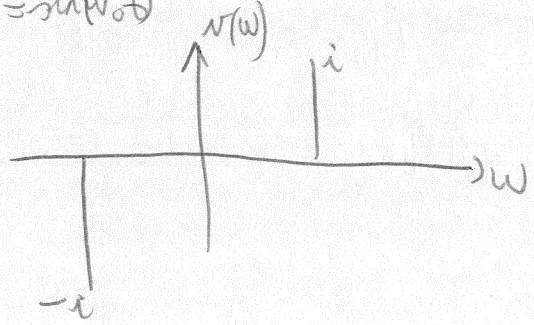
$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(w_0 t)\, e^{-iwt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0 t)\cos(-wt) + i \cdot \sin(wt)\, dt =$$

$$= \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0 t)\, e^{i(wt)}\, dt = \frac{1}{2}\delta(w - w_0) + 1/2\, \delta(w + w_0)$$



(cos)

pl. $f(t) = \sin(w_0 t)$



(sin)

$|V(w)|$ lesz a teljesítmény → ugyanakkora lesz sin és cos-nál

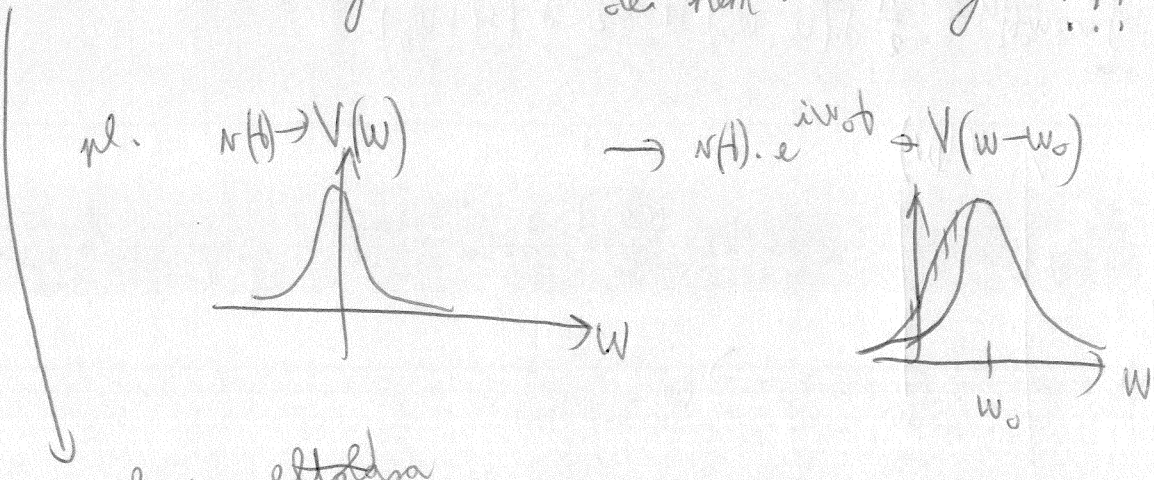
b) tul.-ok

- lineáris ← $\int$-ás $\quad v(t/a) \to aV(aw)$
- időskála változtatása: időtartomány-ban összenyomjuk → w tartományban kitágulnak
- eltolás: $v(t) \to v(t-t_0)$

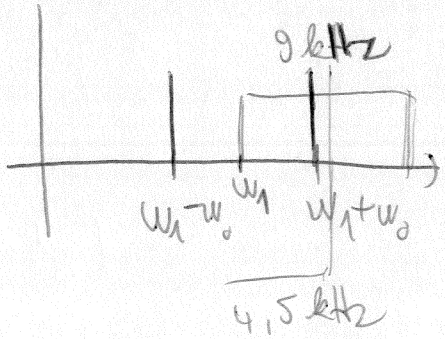
↳ $V(w) \cdot \underbrace{e^{-iwt_0}}_{|\,|=1}$ → fáziseltolás, de || nagyra

- sin-os mod. jel (amplitúdómoduláció):

" $v(t)\, e^{iw_0 t} \to V(w-w_0)$ eltolja a spektrumot, de nem ütött meg !!!
változóhely.



pl. cos eltolása



- differenciálás, integrálás:

$\frac{d^n}{dt^n} v(t) \quad (iw)^n V(w) \to$ 2 HF Biz. (pl. sin-on)

↓
• deriválással lehet „durvítani a fv-t" (→ zajt kihozza)
• integrálás simítja a jelet

$v(t) \neq \int v'(t)$ ⇒ $\frac{i\omega V(\omega)}{i\omega} \stackrel{?}{=} V(\omega)$

$v(t) - \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt$

$V(\omega=0)$ → az átlagértéket ez mondja meg

~~• való — $V(\omega)$~~

• ha $v(t)$ |
- való → $V(-\omega) = V(\omega)^*$
- képzetes → $V(-\omega) = -V(\omega)^*$
- páros → $V(-\omega) = V(\omega)$ → Fourier-tr. is páros → l. cos
- páratlan → $V(\omega) = -V(-\omega)$ → Fourier-tr. is páratlan → l. sin

páros és való → páros és való
páros és képzetes → páros + képzetes
pto. + való → páratlan + képzetes
pto + képzetes → páratlan + való

frekvenciaspektrum: komp. abszolútértéke $|V(\omega)|$

energia / telj. spektrum: komponensek négyzete $|V(\omega)|^2$

↑
← mert a kitérés négyzetével arányos az energia (pl. EM, rugalmas)

DE léteznek más esetek, pl. rad. bomlás, grav. hullám nemlin. parc. de: → nem négyzetes →

← a darabszám adja meg a telj.-t

Jel állunk:

~~bme~~ A jelet sínt tudunk venni sin-ok és cos-ok -ra

↳ a lineáris rendszer viselkedését kell ismerni 1 w-ra

(↳ a lin. rendszer csak az ampl.-t és a fázist változtatja meg, a frekvenciát nem!

parc. d.e. rendszer

bemenő jel → komponensek (w) → kimenő komp.-ek → kimenő jel

5. óra

Fourier transz. (folyt.)

1.) Fourier-traf:

komplex is lehet a bemenet!

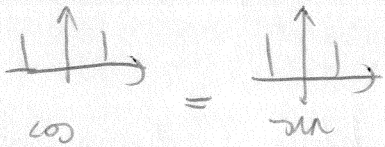
a Fourier-transzformált értéke is mindig komplex

↳ hogy ábr. ezt? → komponensek abszolút értéke!

nagy energia / teljesítmény spektrum → $|V(w)|^2$ → $|V(w)|$

pl. sin-be $i\delta(w-w_0)$ $i\delta(w+w_0)$





cos = sin (a telj.-e max)

2) Eljárás:

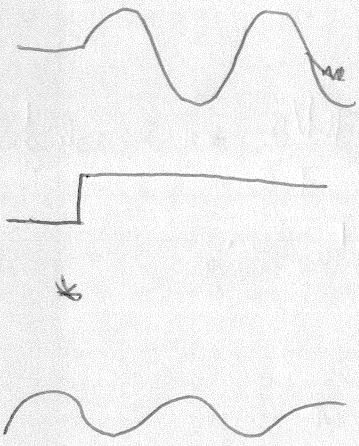
Felbontás bázisfv-ekre (cos, sin)

↳ w nem változik, csak az ampl. és a fázis

↳ 1 komponensre vett hatást kiszámoljuk

↳ felösszegezzük a transzformált komponenseket

HF

1)  bekapcsolási jelenség

2)  1 db T ~~ideig~~ periódusig tartó sin hullám transzformáltja

3) bemenő $A(t)$ → kijövő $\hat{A}(w)$

a (konst.) → $a \cdot \delta(w)$

$\delta(t)$ → 1

$\delta(t \bmod k)$ → $\delta(w \bmod 1/k)$



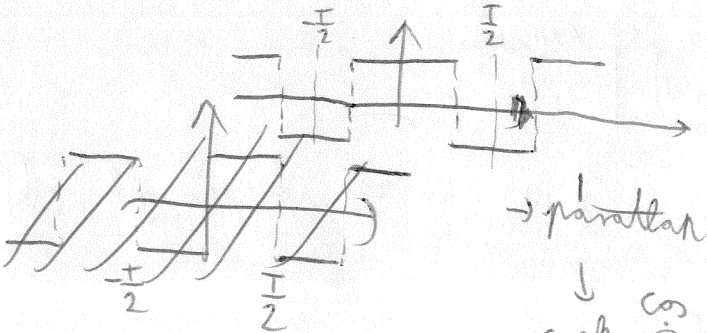
k_s ~ bejövő jelet összenyomom

a kimenő jel szétnegy

~ elhajlási kép



4) példa: négyszögjel



→ páratlan

↓

csak cos lesz

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \cos(k \cdot \tfrac{2\pi}{T} t) \cdot x(t) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} A \cdot \cos$$

$$a_k = 2A \cdot \frac{T \sin(k\pi\tau/T)}{T \cdot k\pi\tau/T}$$

$\sin x / x \to 1$ ha $x \to 0$

· amplitúdó kb. $1/k$ szerint esik

· ha $\tau/T = 1/10$, akkor $\frac{\sin x}{x}$ első 0H-ig $\frac{\pi N \tau}{T} = \pi$ összefüggésből

$N = 10 \rightarrow 10^{\text{spektrum}}$ vonal lesz az első zérushelyig

↓

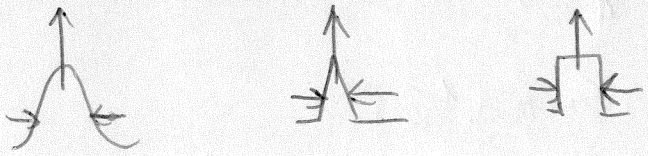
HA T=áll., τ ↑ → kiszélesedik a spektrum

τ=áll T ↑ → keskenyednek a spektrumvonalak

⇓

δ -nak ∞ vékony spektruma lesz

5) δ:



előállítás

terület 1 marad

$\Delta A = 1$

$A^2 \cdot A = A \cdot 1$ → ∞ nagy energiája lesz a δ-nak

$\approx \frac{(13) \cdot 10^{18}\ \text{J}}{10^{-9}\ \text{J}} = 10^{27}$

6)



$\tilde{f}(\omega)$ $\tilde{g}(\omega)$ ⇒ kimenő jel $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$

$\tilde{g}(\omega) = H(\omega)\,\tilde{f}(\omega)$

$V_{ki}(\omega) = H(\omega)\, V_{be}(\omega)$ → ha a bemenő jel δ → $V_{be}(\omega) = 1$

$V_{ki}(\omega) = H(\omega)$ ↓

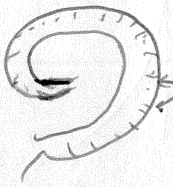
↓

közvetlenül ki is mérhetőek $H(\omega)$-t

DE δ-t nem lehet a valóságban a rendszerre adni, mert nemlinearitások lesznek

fül működése:

csiga (rezonátor)



idegsejtek ("szőrök") → teljesítményt mér!

folyadék → beszorítás

↓

fázist nem tud mérni

(hang hullámhossza $\approx \frac{340\ m/s}{330\ Hz} \sim 1m$ körüli helymeghatározás)

↑ fázis is ilyen nagyságrendben van

↑ delfinek pl. tudnak mérni fázist (Ultrahang → nagyobb frek. → pontosabb helymeghat. lehet)

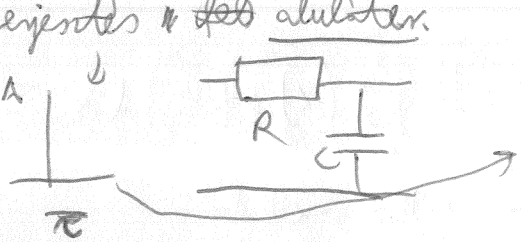
7) Rendszer súlyfv-e ($h(t)$)

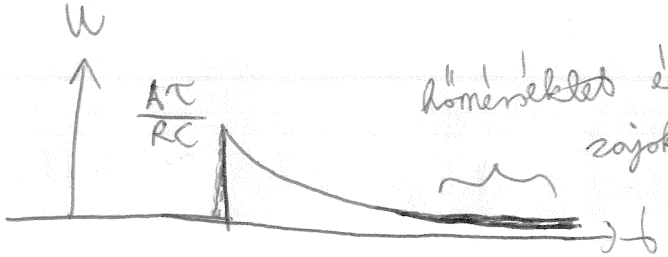
rendszer válasza a $\delta(t)$ bemenő jelre

$h(t) = F^{-1}(H(\omega))$ (pl. hang → kalapács ~ δ gerjesztés)

a) RC tagok súlyfv-e:

- gerjesztés a ~~föld~~ alulról:

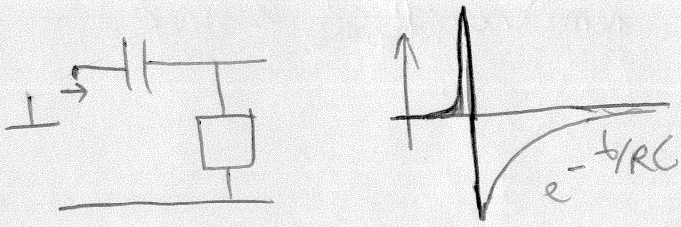




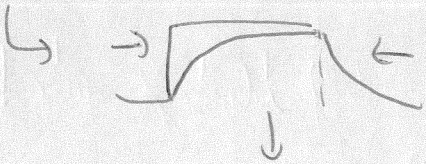
hőmérséklet és egyéb zajokba beleolvad

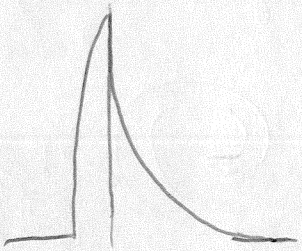
~~RC tagok súlyfüggvénye~~

- felüláteresztő:

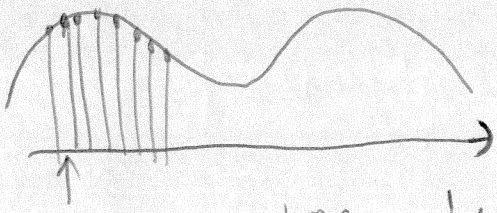


$\delta \sim$ kis  pl. aluláteresztő:





8) Súlyfv. és konvolúció:



δ-kra szedjük szét (kül. magasságú δ-k)

↳ súlyfv.-t elvégezzük rá (válasz a δ-ra)

$F^{-1}(H(\omega))$ ↓ összegezzük az egészet

$f(\alpha)$ → ez a magasságot hat. meg → ez csak konstans szorzó



Vagyis:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\delta(x-\alpha)\,d\alpha \quad \rightarrow H(f(x)) = H\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\delta(x-\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,H(\delta(x-\alpha))\,d\alpha$$

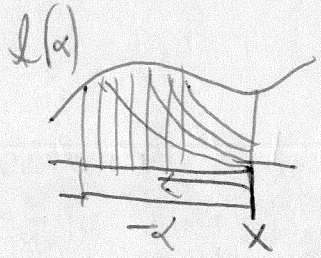
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, h(x,\alpha)\, d\alpha$$

ha $H[\delta(x-\alpha)] = h(x-\alpha)$

$$\boxed{H(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, h(x-\alpha)\, d\alpha}$$

konvolúció (Green-módszer)

az előző jelek mind adnak még járulékot adott időpontbeli mérésben



9) Konvolúció a Fourier-térben

a konvolúció szorzásra egyszerűsödik le (ez eggyel a Fourier-térben van lgy)

$g(x) = f(x) * h(x)$ konv.

$$F(g(x)) = F[f(x) * h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, h(x-\alpha)\, d\alpha\right] e^{-2\pi i w x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha)\, e^{-2\pi i w x}\, dx\right] d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, F[h(x-\alpha)]\, d\alpha =$$

↑ felcseréljük a két ∫-t (végs ∫-nál ezt problémamentesen megtehetem)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) H(w)\, \underbrace{e^{-2\pi i w \alpha}}_{\text{a konvolúció}}\, d\alpha$$

$H(w)$-hoz csak egy a fáziseltolást ad!

kép zajszűrése

(GIMP → generic → konvolúciós szűrő)

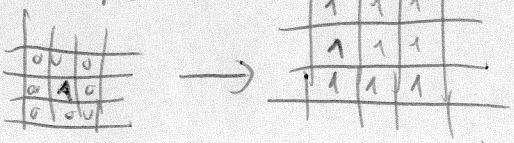
↑

képpontok vannak

↳ ∀ színek van ~~0-nagy~~ erős intenzitása

színenként lehet szűrni

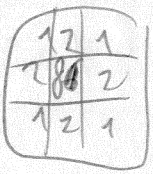
12.

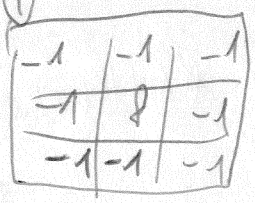


→ elmosódottabb lesz a kép

ilyen súlyokkal

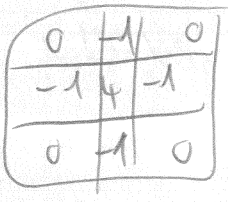
a környező pixeleket is ~~beleveszi~~ összeadja, és egy átlagolt értéket ad mindegyik pixelhez a végén

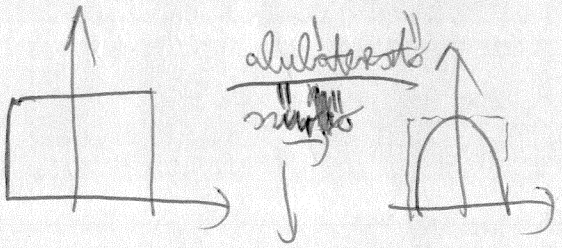




→ a változásokat kiemeli → élesebb kép

(a környező pixelek az eredeti képben ~~változást kiemeli~~ a középső pixelhez is adtak járulékot → ezt ~~kell~~ vesztük ki





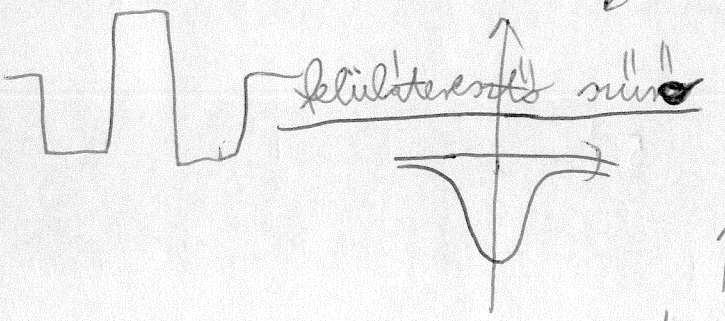
integrálás

a magas frekis komponenseket kiszedi

← az alacsonyabbak pl. átlagos vesznek

(ezek adják az élet)

ennek a kiegészítője

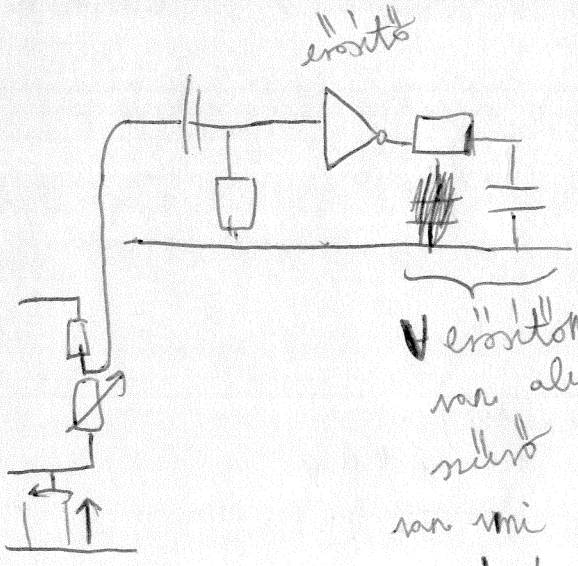


→ a magas komp.-eket emeli ki

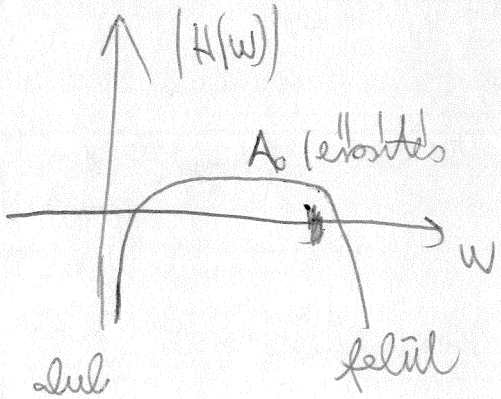
deriválás : w -val szorozza

→ meg a tagokat

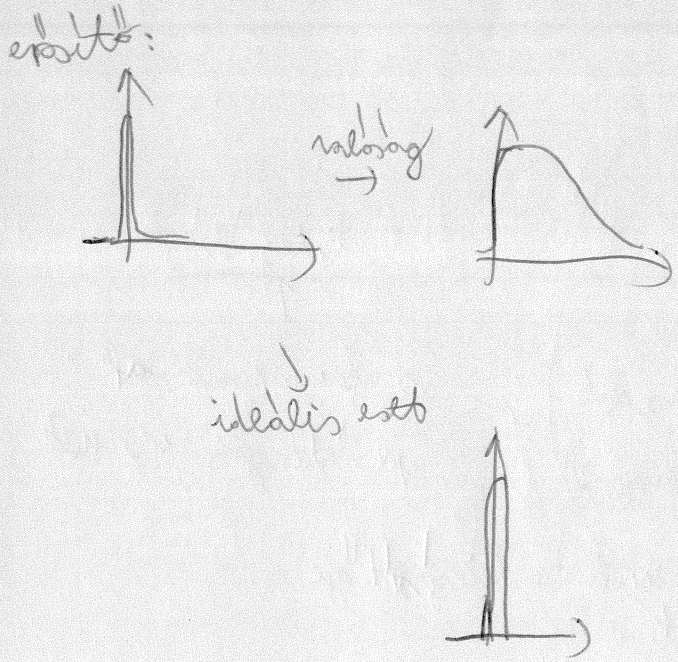
nagyobb súlyt kap a nagyobb w !



erősítőnél van aluláte. szűrő (mert van mi kapacitív ellenállása is)



ezt kell vissza Fourier transzformálni



5. óra

Máj. 11-én elmarad az óra.

Fourier-traf 20-ban

$$\left(F(\vec{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x})\, e^{i \vec{w} \vec{x}}\, d\vec{x} \right)$$

1) $$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i (ux+vy)}\, dx\, dy$$

(u, v freki

$$\text{Inverze } f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\, e^{2\pi i (ux+vy)}\, du\, dv$$

2) Konvolúció:

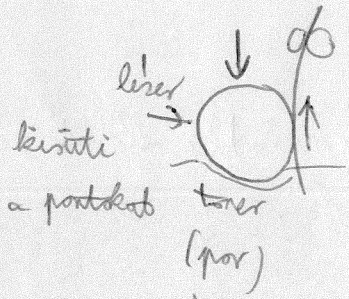
$$G(u,v) = K(u,v)\, H(u,v)$$

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha_x, \alpha_y)\, H(x-\alpha_x, y-\alpha_y)\, d\alpha_x\, d\alpha_y$$

Képek megjelenítése

(színes → több színű)

1) kép: intenzitáseloszlás ~~minden pixelre egy bájt~~



↓
lelvagad oda, ami nem sült ki

a lézer és a tintás ~~eredetileg kézírásos~~ / mátrixba nyomtató /
de pl. a pötty (pixel) méretét, elhely.-t tudja változtatni

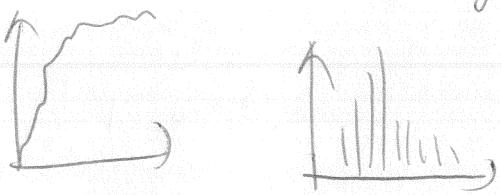
2) lebegőpontos megjelenítés ~~(nagy pl. 400)~~ 1

- RGB 3B-s színes kép 0-255 intenzitás, minden színnél
figyelni kell a számolásra ← túlcsordulás

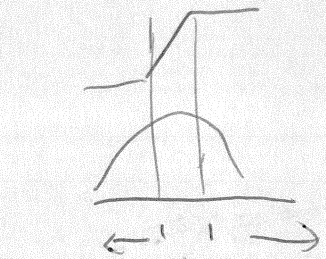
255+2 → 1

○ → ●

- <u>színkészletek</u> kumulatív és normál eloszlása
↑
hisztogram



- sűrűségértékeket kontrasztosíthatjuk módosítjuk a LUT-t (look up table)

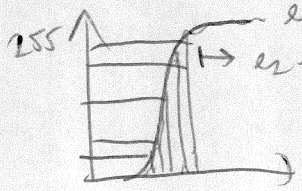


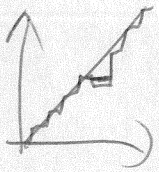
ennél sötétebb lekete lesz

ennél világosabb fehér lesz

- hisztogr. kiegyenl. ~~és egyenletes eloszl. lesz~~

kumulatív eloszlás





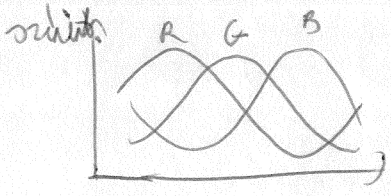
~ egyenletes eloszlás lesz

- logaritmikus sűrűségértékek módos.



- hamis színezés ← jobban látjuk a színeket

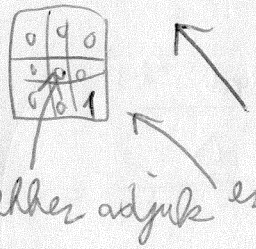
sűrűségértékek különb. színekkel jelölt. meg

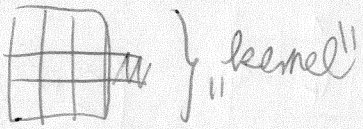


3) Konvolúció képeken  ← a környező pixeleket nekkora súllyal adjuk a középsőhöz

- lineáris és periodikus konvolúció
  ↓
  „mozaikszerű"

- eltolás





- átlagolás / simítás

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

→ a környezőket is

- élkeresés, deriválás:

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

$x_i = x_{i+1} - x_i - 1$ → ha a két szomszéd ≈ azonos → 0

ha különböző → nagy szám

↓
függőleges élek

1 | 0
0 | −1

irányfüggő deriválás

. élesítés

eredeti + Δ·eredeti

= többféleképpen ilyen operátor van

pl.

	−1	
−1	4	−1
	−1	

$$\frac{\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta}\right)_{dy/\Delta} - \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta}\right)_{dy/\Delta}}{\Delta} = \frac{d^2y}{\Delta^2}$$

$$\frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta}$$

Laplace-operátor $\approx \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

irányfüggetlen élkeresés

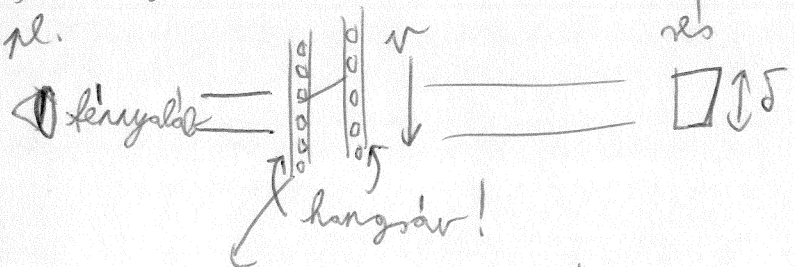
Dekonvolúció

(visszatorzítás)

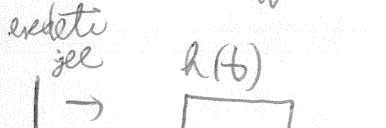
1)

a) integráló jellegű lin. rendszer

pl.

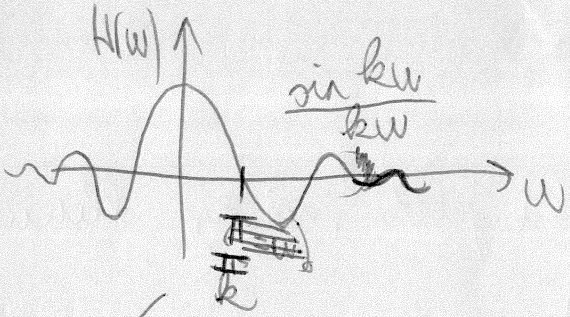


négyzetes lyuk → ⊥ δ



amíg végighalad a δ, addig detektálunk

négyszögjel Fourier-transzformáltja: $\frac{\sin x}{x}$!!



$\sin k w_0 = 0$

$k w_0 = \pi$

$w_0 = \frac{\pi}{k}$

ebből a fekv. jelből nem megy át semmi

↕

ha olyan jelet küldünk be, aminek a szélessége δ, de periodikusan jön → mindig lesz bent 1 négyszögjel → ennek felel meg a zérushely

$\frac{\delta}{w_k} \cdot w_0 = \pi$

← ehhez megfelelő szélességgel (kör. frekivel) kell jönniük

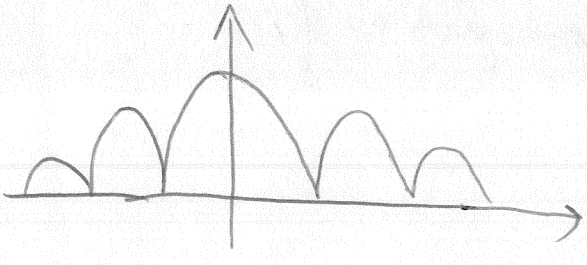
2. zérushely: ⊓⊓⊓

3. —11— : ⊓⊓⊓⊓

} felharmonikusok

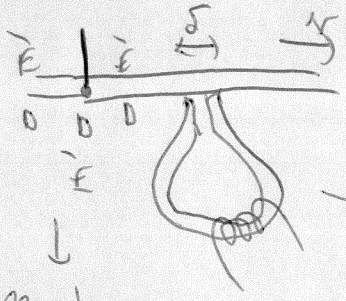
⇒ ezek 0 átviteli jelet produkálnak

$|H(w)|$



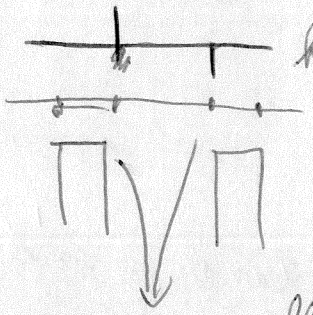
- aluláteresztő szűrő

b) mágneses szalag:



→ akkor ad jelet, amikor fluxusváltás van

ellentétes mágnesezettségű pont



itt van fluxusváltás.

winchesteren is hasonló technológia

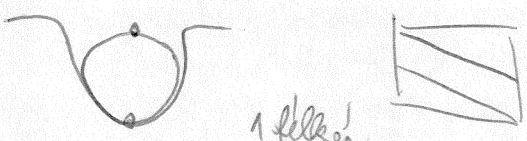


→ H(w) = sin



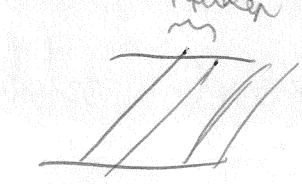
felületeresztő sűrűség

pontosan 1 imp. van mindig a résben (hasonlóan működik)



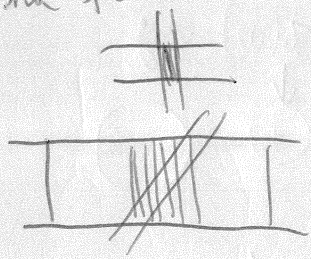
1 félkör

⇒ gyorsabban mozoghat a fej



tekercs írta rá a fej a szalagra

ha fedi a rés, de a sávok nem:



a sima váltakozást kiátlagolja, a lassú váltakozást nem (nagyfrekit)

↕

alulátereszt sűrű

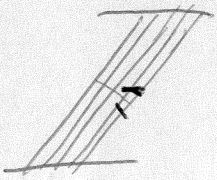
lehet sűrűbben

↑

más leolvasás

↑

(O) a fejek dőlésszöge kicsit eltér



van egy kis átfedés a fejek között (kis biztonsági sáv)

- sokszoros másolás → analóg jel torzul (magasfrekvenciás komponensek) → illódzás

- JPEG tömörítés: az éleket nem tömöríti be, de az ~~azonos~~ azonos színű ~~komponenseket~~ területeket igen (szemnek ez kellemes)

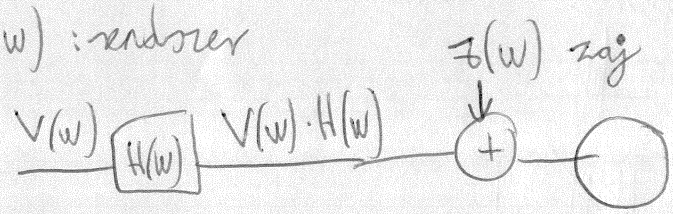
↓

a magas frekvenciás változásokat lassabban számolja ki (a magas és alacsony frekvenciát szinkronizálni kell →

→ lelassulás (pixelesedés filmeken))

2) Visszatorzítás

$H(w)$: rendszer



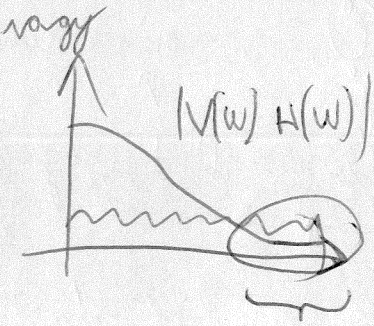
$H(w)\,K(w) = 1$

$K(w) = \frac{1}{H(w)}$ → ez a rendszer visszaadja a jelet

$K(w)$: visszator.

Baj: $H(w) = 0$ vagy ≈ 0,

vagy



ezen a tartományon a zaj erősebb, mint a jel

↓

Wiener-szűrés:

~~ezen a tartományon~~

$$W(w) = \frac{|F(w)|^2}{|F(w)|^2 + |Z(w)|^2}$$

ahol $F \gg Z$ $\quad W \approx 1$

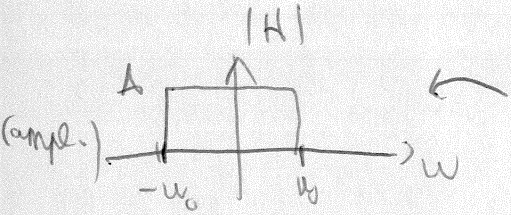
$F \ll Z$ $\quad \frac{F}{Z} \approx 0$

~~tés kör alakú~~

HF kvázi integrál / kvázi diff. rendszerek milyen lekonv. tartoznak

6. óra

Torzítások nem csak a fázisnál!



← ideális aluláteresztő amplitúdótorzítása

fázis:

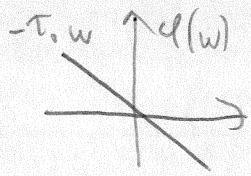
$\tau(\omega) \rightarrow \omega$ függő késleltetés

ha $\tau(\omega) = \tau_0$ (konst.) akkor a bemenő és kimenő jel fázisviszonya megegyezik!

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\omega\tau_0)$$

$$\tau(\omega) = \varphi(\omega) \cdot \frac{T}{2\pi} = \varphi(\omega)/\omega$$

↳ ha $\varphi(\omega) = -\tau_0 \omega \rightarrow \tau(\omega) = -\tau_0$



→ nincs diszperzió!

↑

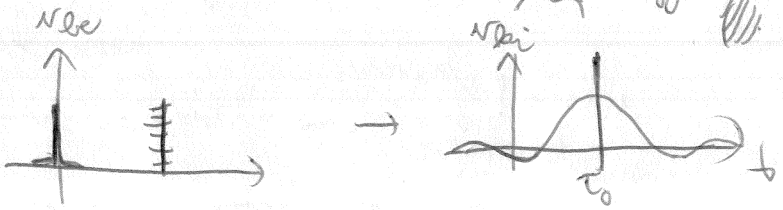
ideális aluláteresztő fázistorzítása

$$\left(\frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega} = \nu_{csop}\right)$$

$$\nu_{ki} = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} \underbrace{A e^{-i\omega\tau_0}}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

fáziseltolás

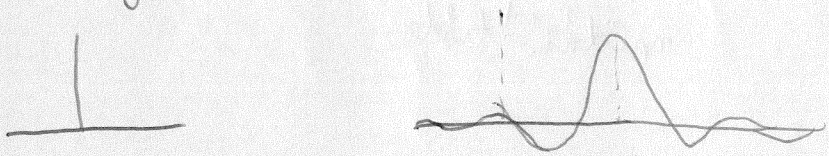
torzítás miatt lesz egy ~~fáziskésés~~ (időeltolás)



Skype: torzította a hangot → de kell kell tisztelni a puffert
↳ késleltetés

⇒ ~~általában~~ ~~ideális~~ van késleltetés ~~is~~ ben az átvivő rendszernél

Érdekesség:



e^- az e^- előbb ér ide, mint megérkezne? (Jackson)

olyan pici az eltérés, hogy valójában ez már kvantumos effektus

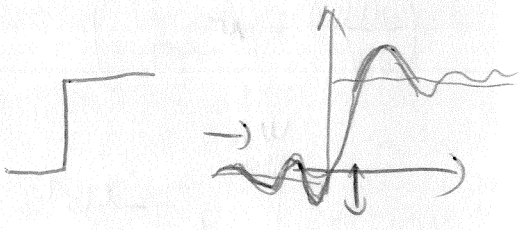
- $t=0$ előtt is van kimenőjel ⇒ sérül az okság elv
- kimenő jel ~~talpszélessége~~ legyen $\omega_g T = \pi$ alapján

$2T = 1/f_1$

~~az alsó~~ a felső frekvenciahatár szabja meg a legrövidebb impulzust

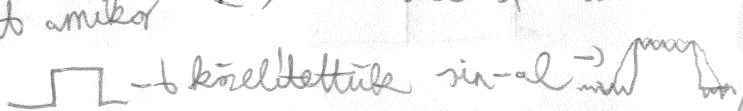
- lépcsőjel átvitele:

$$U_k(\omega) = H(\omega)\, U_b(\omega)$$
$$i\omega U_k(\omega) = H(\omega)\, i\omega U_b(\omega)$$
$$\hookrightarrow \int u_k(t) = H \int u_b(t)$$



csak a szélesség → a kitérés amplitúdója nem függ az

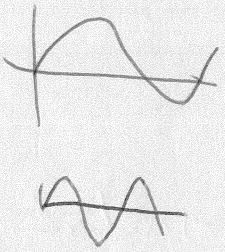
van a probléma, mint amikor ↔ átviteli fv-től

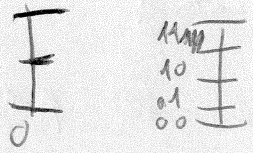


↳ körüldöntük sin-al

• **Nyquist tétel**

f_0 sávszélességű (mintavevő) rendszeren 2 f_0 jel vihető át maximum





1 jelben ennyi info

$\log_2\left(\frac{S}{N}+1\right)$ bit

$\frac{S}{N}$ = jel/zaj viszony

Mennyi info vihető át a rendszeren?

$C = 2 f_0 \log_2(S/N+1)$

ennyi jel vih. át — ennyi info/jel

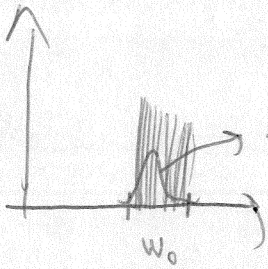
⇓ (pl. 1 bit/jel)

• Ha kis információtartalommal is megelégszünk → kevésbé hasonlító a zajra a jel

• Maximális —"— → a zajra nagyon fog hasonlítani a jel



amplitúdómod.



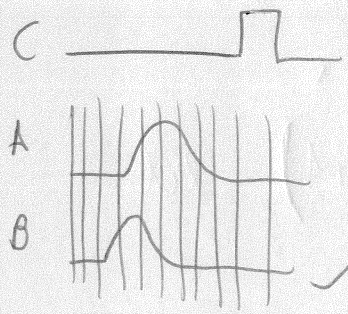
egy ilyen zaj kevésbé zavarja itt

frekvenciamoduláció

Korrelációs fv-ek

Két jel mennyire hasonlít egymásra?

pl.



→ skaláris szorzat!

→ felosztjuk véges sok pontra → vektorok

$\sum \sum A_i B_{i+\Delta}$ eltolás: th. tudjuk, hogy van maximum ~~eltolás~~ eltolás

$$R_{12}(\Delta) = \int dt\, v_1(t)\, v_2(t-\Delta)$$

→ ha hasonlóak, ez nagy lesz,
→ ha nem, akkor kicsi

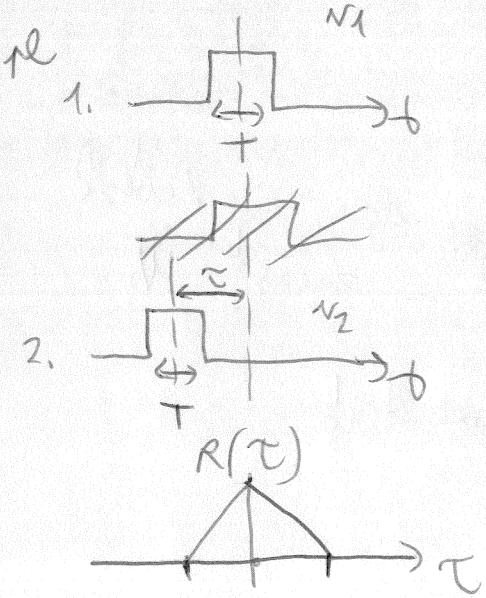
keresztkorrelációs fv.

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, v_1(t)\, v_2(t-\tau)$$

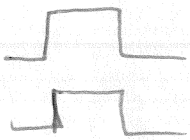
↑ τ eltolásnál → ~~ha az egyik jel~~ τ-val ~~eltoljuk~~ el van tolva

~~összehasonlításhoz~~ (pl. ütközésnél)

pl



ha nincs τ késleltetés



autokorrelációs fv.

↳ önmagára mennyire hasonlító a fv?

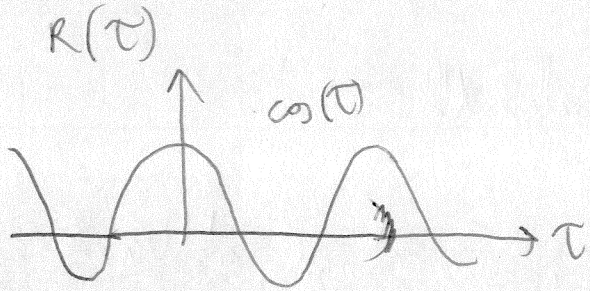
↓

értelmes kérdés, mert τ-tól is függ! (l. négyszögjel)

pl. cos

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t \cos(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t (\cos t \cos\tau - \sin t \sin\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 t \cos\tau - \underbrace{\int \cos t \sin t \sin\tau}_{0 \text{ az } \int} \approx \cos\tau, \ldots$$



⇓

autokorr. fv.-tól. -ai:

- szimm. τ-ban $R(\tau) = R(-\tau)$
- $R(0) \simeq \int v^2(t)\,dt$ "energia"
- $R(0) > R(\tau)$, $\tau > 0$
- ~~R=~~ 2 fv. autokorr. fv-ének összege ≠ 2 fv. összegének autokorr. fv-e
- nem lehet belőle az eredeti fv-t visszakapni!
  (pl. sin, cos R-je van → itt információvesztés van)
- a zajban elrejtett jeleket is lehet észlelni (pl. pulzárok, MMR)

-45-

pl. pulzár → csillagközi anyag → ionizált gáz

↓

kényszerezés ← e^- - ok

rádiókibocsátásra

(szóródás, diszperzió → fényseb. megváltozik)

neutroncsillag:

grav. → összehúzza 1 nagy atommaggá a csillagot

↓

nagy mágneses tér!

+ forgás

↓

impulzusszerű jelek

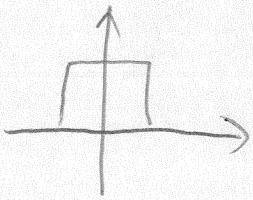
↓

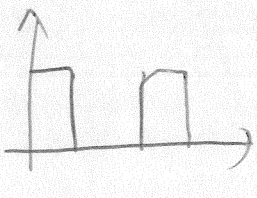
korrelációs eljárással kiszűrhető

MMR: gerjesztés: külső tér → rezonanciával rájárnak a test atomjaira

↙

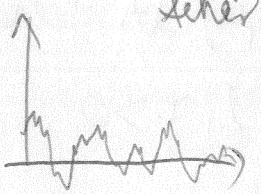
korrelációs ← kijövő sugárzás



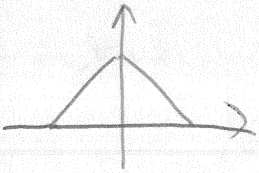


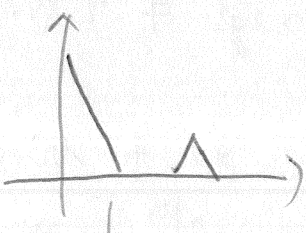
fehér zaj → véletlenszerű

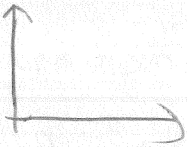
pl. radioaktív (Poisson)

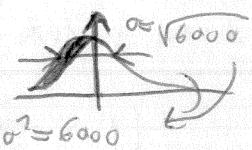












↓

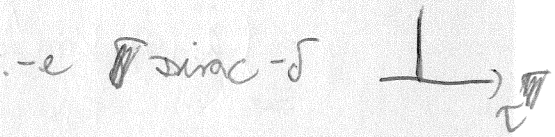
3 db impulzus

fehér zaj még:

pl. áramtrajz $I \sim N$ ← áramfluktuáció

$\sigma \sim \sqrt{N}$

zaj: $\frac{1}{\sqrt{N}}$

fehér zaj definíciója: autokorrelációs fv.-e Dirac-δ 

magára nem hasonító eltolva

↓

bárzmely más fv-el vett korrelációja 0 a teljes τ-n

pl.



 ← ugyanannyi van felette, mint alatta

Az súlyfv. és a korrel. fv. kapcsolata

Lineáris rendszer → $H(t)$ súlyfv. egyértelműen leírja

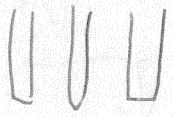
↓

$\tilde{H}(\omega)$ → megmondja az amplitúdó és fázistolás adott ω-jú jelre

pl. atomreaktornál → teljesítményt, a rendszer állapotát

↙ leírja

szabályozórudak kihúzásnál



néhány sec idő

↓

kell a n° fluxus változás duplázódásához

ezt kell kalibrálni → kis idő nem jó, nagy idő szaglani

$x_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x_1(t+\tau-\theta)\, d\theta$ — lin. rendszernél (eltolás ↑, id.-i változó ↑)

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x_1(t+\tau-\theta)\, d\theta\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)\, x_1(t+\tau-\theta)\, dt\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, R_1(t-\theta)\, d\theta$$

ha zajszerűen változtatom a mintákat $R_1(t-\theta) = \delta(t-\theta)$ lesz!

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, \delta(t-\theta)\, d\theta = h(t)$$

megkapjuk a súlyfv.-t!

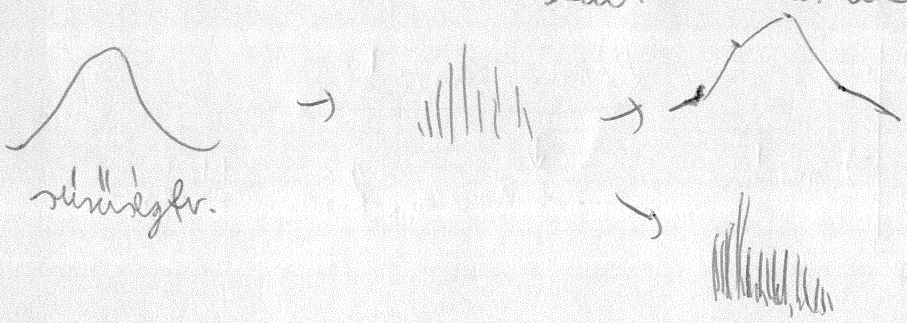
Kérdés:

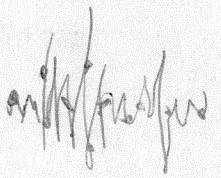
- autok sin-ra =?
- látszólag két eltérő fv., aminek az autokorrelációja ugyanaz:

δ, zaj

⊥

$$\sigma^2 = \underbrace{\frac{1}{N-1}\sum (x-\mu)^2}_{\text{jobb így számolni}} = \underbrace{\frac{1}{N-1}\cdot\left(\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)}_{\text{a számítógépnek ez könnyebben megy}}$$





hisztogramok → állítsuk elő az eloszlásfv.-t

mintavételezés → jól van lehet mintavételezéskor választani

8. óra

Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei

1) pl. PET-es mérés

$e^+ + e^- \to 2\gamma$ → korrelációt kellett mérni

pl. α, β bomlásnál kisugárzás után a megmaradt részecske vesszen

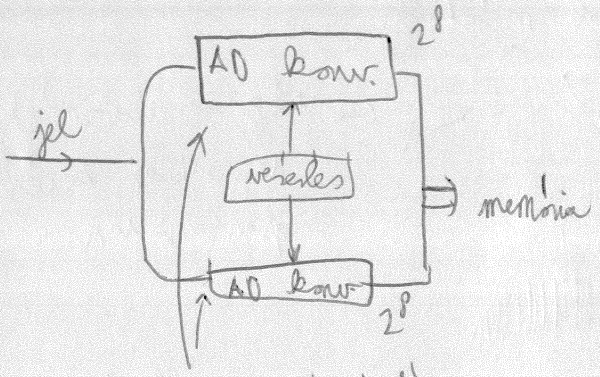
fog → sugárzás

2). stacioner és ergodikus: időbeli átlag és a sokaság átlag megegyezik

pl. 1 részecske sokáig ↑ sok részecske 1 ↑ ideig → ugyanazt kapom

• véletlenszerű eloszlás

$p(x, y, \tau)\, dx\, dy$



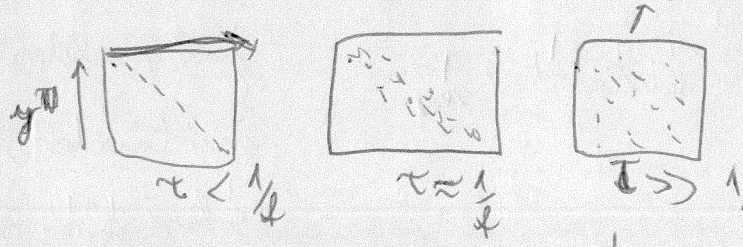
mintavevő-tartó áramkörök → gyorsak

Mátrix analizátor

↓

erős hasonl. kapcs. mérésére

(kapcsolt mintáig ~~és~~ a előző ~~kapcsolt~~ jel)



↓

ha kis frekis a jel, és gyorsan vesszük mintát, az jó

↓

ha nagy frekis a jel, és lassan vesszük mintát, az rossz

- $\tau << 1/f$: van $x \cdot y$ kapcs., a zaj min.
- $\tau \approx 1/f$ — " — , de a zaj jelentős
- $\tau >> 1/f$ nincs — " — , csak zaj

Együttes sűrűségfv.-ből $R(\tau)$ megkapható:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \, y \, p(x, y, \tau) \, dx \, dy$$

pl. pénzfeldobás:



~négyszögjel → $R(\tau)$

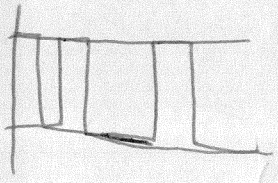
ha pl. 10 s-enként

↓ dobom fel

↓

10 s-ig "emlékszik" az előző állapotra

pl. véletlen távirójel:



Poisson-eloszlás → pl. bomlás
↓
időegység alatti telefonhívások

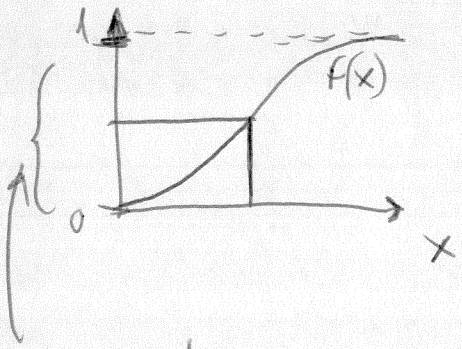
τ idő alatt k esemény:

$$P(k,\tau) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^k \cdot e^{-\tau/t_0}$$

↓

$$R(\tau) = e^{-\frac{2\tau}{t_0}}$$ autokorr. fv.

↓
exponenciális lecsengő jelnél is ugyanezt kaptuk → az autokorr. fv.-ből nem lehet az eredeti megkapni



ezt generálom le → visszaszámolom f-ből x-et (F^{-1}-el) →
→ így lehet ilyen x-et generálni véletlenszerűen.

Wiener-Hincsin tétel

Az autokorrelációs fv. és az eredeti fv. kapcsolata ugyanaz, mint a Fourier-tr. és az

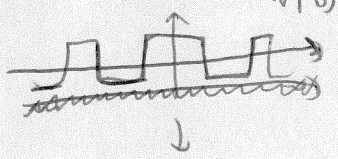
kor. fv. $\rightleftarrows$ teljesítmény fv.

$$|V(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

(TDNR esetén bmilyen bázison kifejthetem a fv-t)

(korreláció fv. → időbeli eltolás
↓
Fourier-térben fáziseltolás)

$v(t) \rightarrow v(w)$ $\frac{\sin x}{x}$ alakú





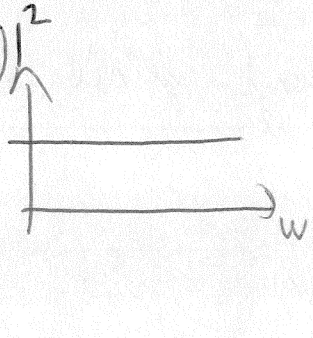
$R(\tau)$

$R(\tau) \rightarrow F^{-1}\left(\underbrace{v(w)\, V^*(w)}_{|V(w)|^2}\right) = R(\tau)$

- fehér zaj: $R(\tau) = \delta(0)$



$|V(w)|^2 = F(R(\tau)) = 1 = \tilde{\delta}$

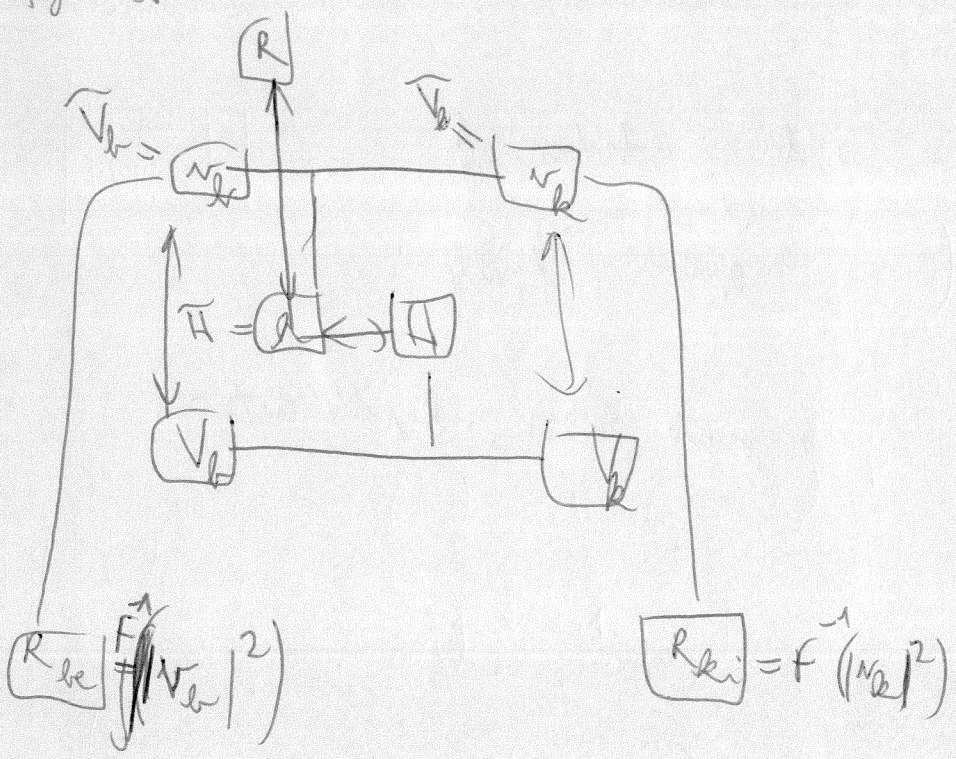


- δ-szerű imp.: $R(\tau) = \delta(\tau)$

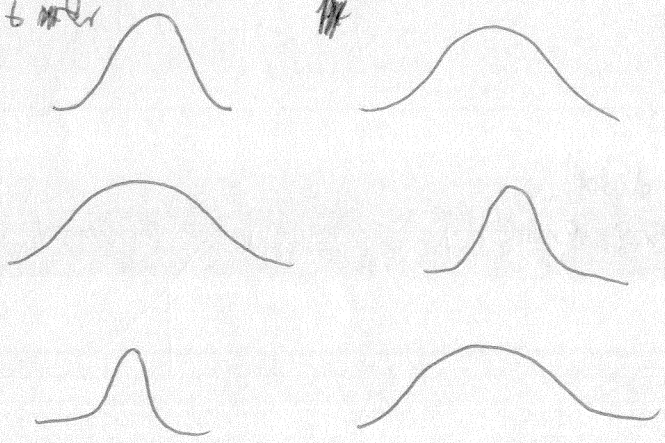
Melyik a jobb?

- $\delta \rightarrow$ bonyolultabb a mérés → rövid mérésre } jobb
- fehér zaj → várni kell a tranziensek miatt → hosszú -ra

Összefoglalás:



• Gauss-görbe:



• periodikus inp. sorozat a frekvenciatart. is periodikus inp. sorozat!

AD átalakítók:

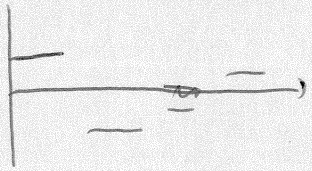
szukcesszív approx → keresi a ~~tartomány~~ tartományt

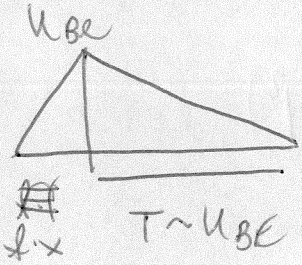
↙ nagyobb ↘ kisebb

↓

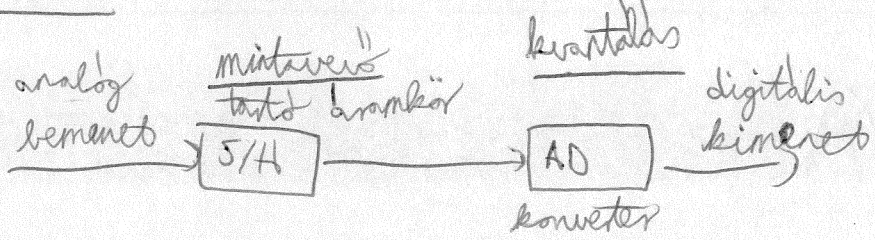
megint keresi a kapott tart.-t

⋮

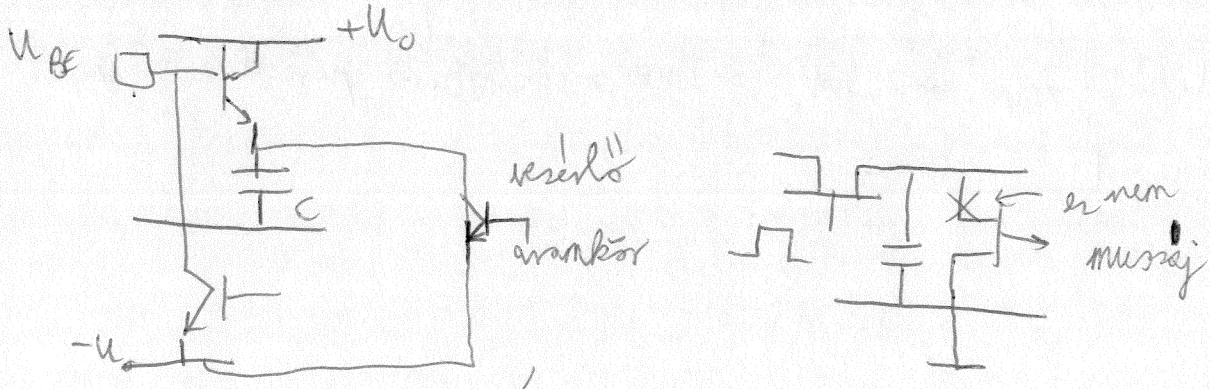




Mérés:



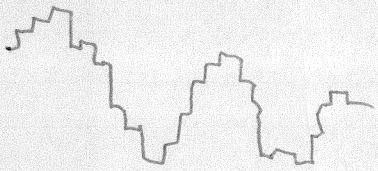
• mintav. ~~tartó~~



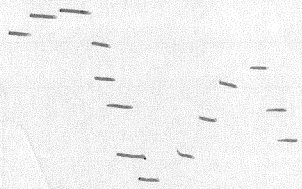
ha kiírjuk, feltöltődik a kond.

de amikor elzárja (U_{BE} állandó), nem vesznek el a töltés

Torzítások:



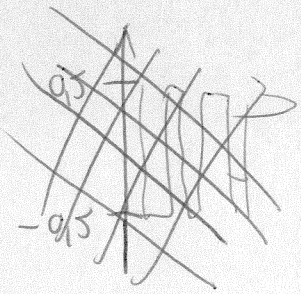
AD konv. →



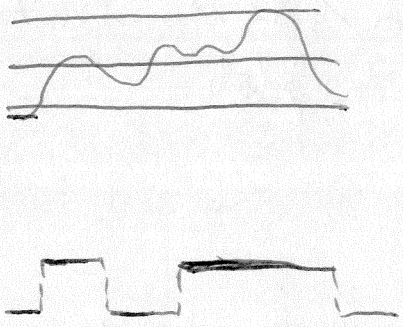
analóg jel, csak a mintavétel miatt vannak szakaszok

kerekítés (nagyobb bitszám nagyobb tartományon → kisebb ~~kerekítési~~ hiba)

(a bithiba mindig 0,5 bit)



lassan változó jel → a kvantálási lépcsőkön keléskor zaj adunk!



több információ kódol

~~nagy~~ nyomtatás:

2 bites kvantálás

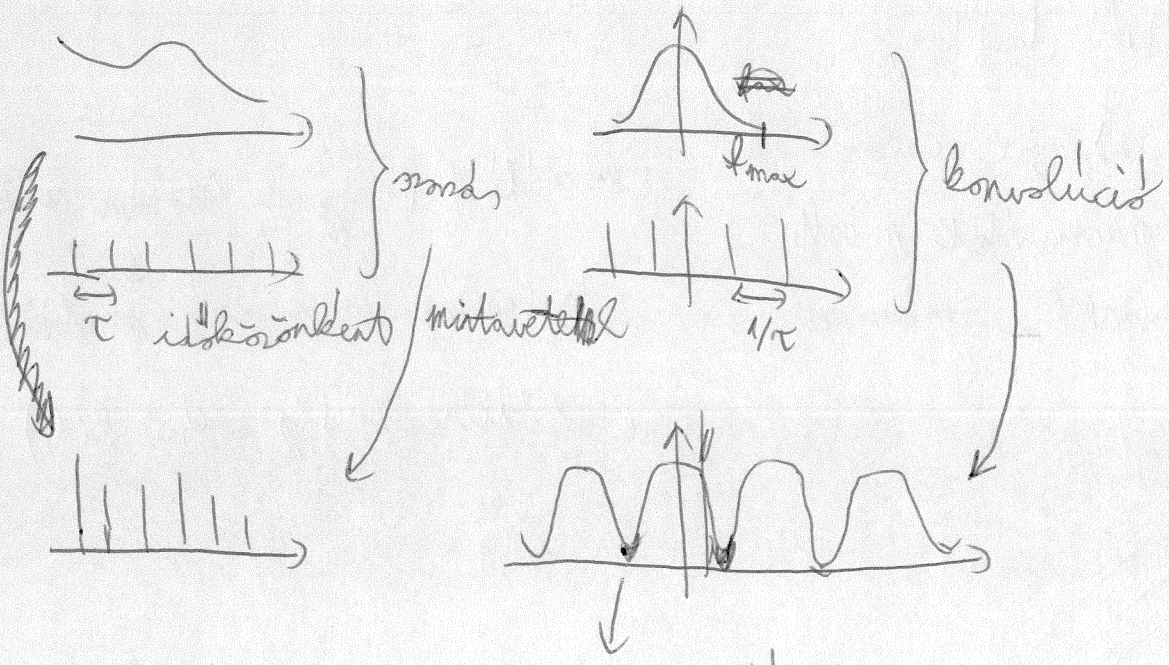
kocka kitöltés → diagonális

kerek kitöltés → —"—

véletlenszerűen választott pontok → —"—

Mintavételi törvény

mintavétel

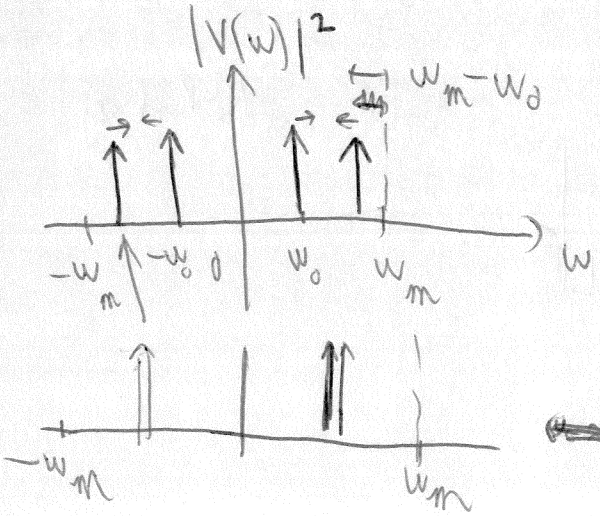


nem szabad összeönteni a mintavételnél!

↓

akkor nem lehet visszaállítani az eredeti jelet

$f_{mintav.} \geq 2 f_{max}$



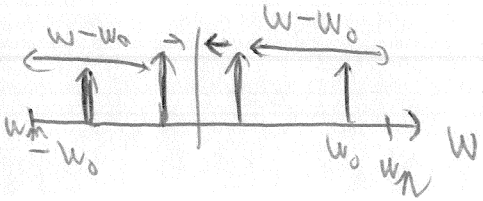
lebegés → $w_m - w_0$ -t látjuk csak

ha $w_m \leq 2 w_0$

↓

információvesztés

mintavételi törvény



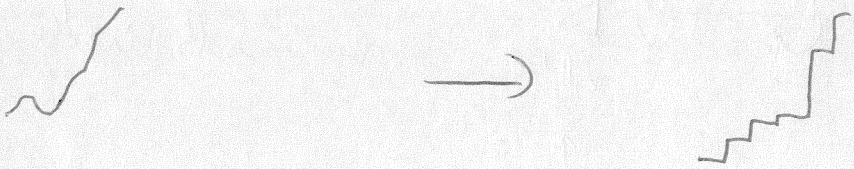
Megoldás:



kiszűri a nagy frekiket

↓

mintav. törvényt nem sértjük meg



tanítás a mintavétel és a bitbeli kerekítés miatt!

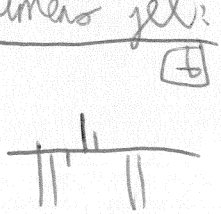
DSP:



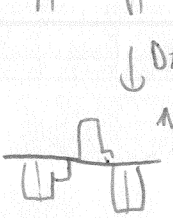
↓

a többi szűrőt a szám. segítségével valósítjuk meg

Számító jel:

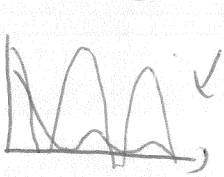


↓DAC

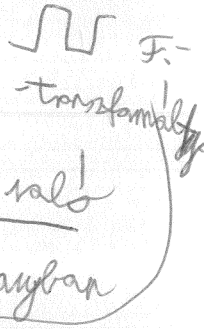


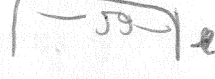


eredeti jel Fourier-transz.-ja



a mintavétel egy négyszögjellel való konvolúciós jelent → w tartományban



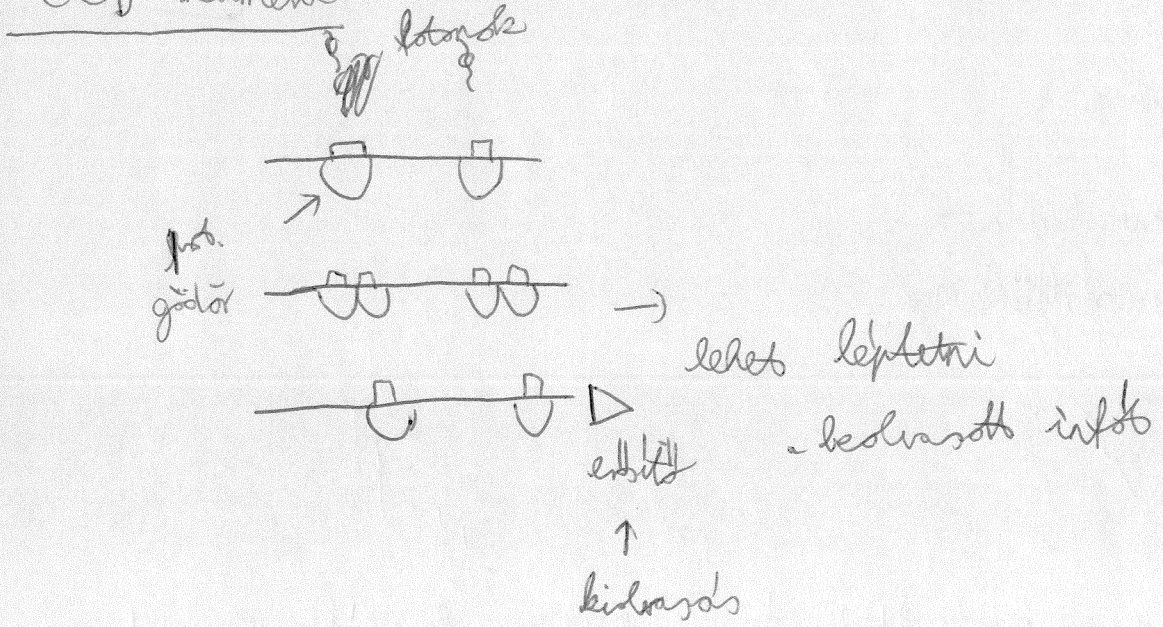


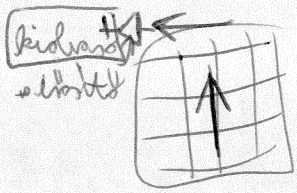
-el való szorzás

↓

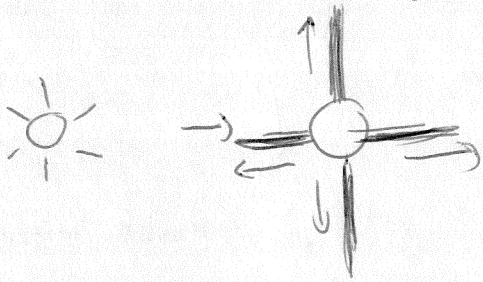
- DA konvertálás előtt $\frac{x}{\sin x}$-el kell megszorozni fekete tartalom

CCD kamera





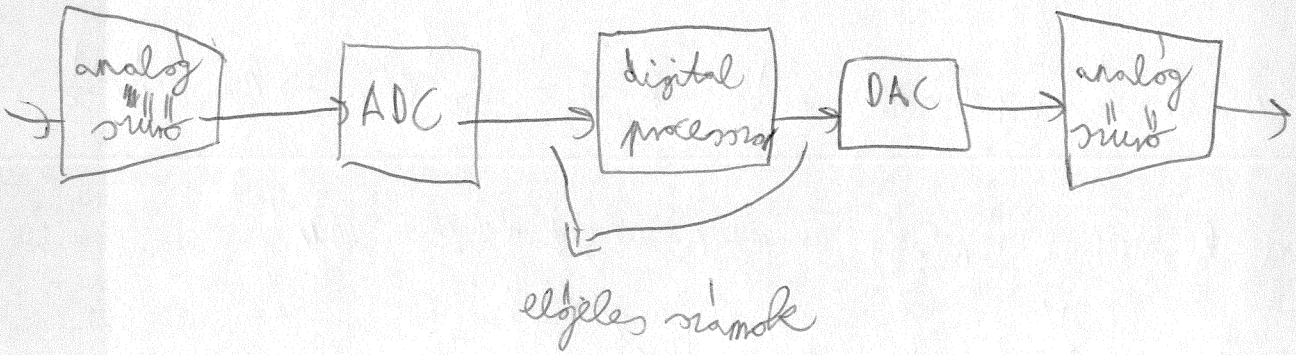
ha túl nagy a fényérzékeny → a töltés a szélekről átcsordul

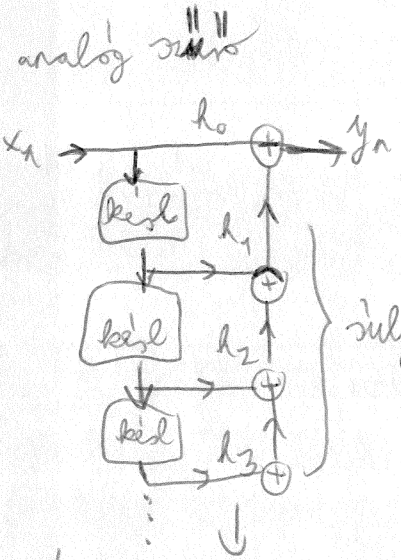


9. óra

Digitális szűrők

1) kicsik, ugalmasabbak
↳ szoftver kiszántotta a hardvert





súlyozva összeadja a jeleket, majd eltolja 1-essel → 5 szerint

eltolás bármilyen hosszú lehet

pl. 0100...→ beadva erre → meghat. hatása

h a súlyfv.! → ezzel lehet a szűrőt egyértelműen megadni

határa:
pl 44200 Hz
~~→~~ 22100

1 0,5 sec-ig akarunk súlyozni a szerencsére ilyen késleltetők kell

$$y(n) = \sum_{i=n}^{N} h_i \cdot x(n-i)$$

2) FIR (véges impulzusválaszú szűrő) → ha beadok egy impulzust,

→ [illegible] mindig véges hosszúságú kimenet ~~lesz~~ lesz

(ahány késleltető van + 1 időegység után 0 lesz a jel)

h helyett a $-$kat használnak jelölésként

széles impulzusválasz is lehet

polinomszorzás: polinom elemei h-k és x_n-ek → konvolúció

- ha τ késleltető van egy elemben ↙ j komplex egység

$$y(t_i) = \sum_{i=-M}^{N} h_i \, x(t_i - \tau i) \cdot (e^{j\omega/\tau})^i =$$

$$= \sum_{i=-M}^{N} x(t_i - \tau i) \cdot \underbrace{h_i (e^{j\omega/\tau})^i}_{z^{-i}}$$

$z = h_i e^{i\omega/\tau}$ és $j = \sqrt{-1}$

↓ z transzformáció

↓

~ Fourier-trafó

3) Rekurzív szűrők

az y-tól is függ a kimenet

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \ldots + \underbrace{b_0}_{b_0 \equiv 0} y(n) + b_1 y(n-1) + \ldots$$

(egyébként át tudjuk rendezni)

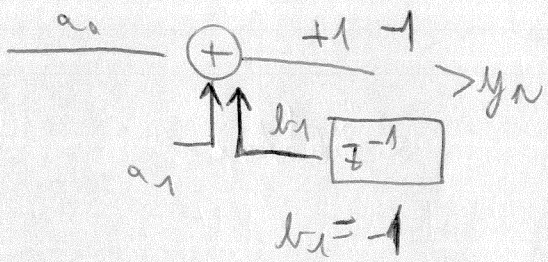
← a rekurziós formula miatt kevesebb elem kell!

↑

IIR (végtelen impulzusválaszú szűrő)

a) ha pl. $b_1 = -1$ (vagy 0) és δ jön be → előjelesen oszcillál

$a_1 = 1$



δ: 0 0 0 1 0 0 0 bejön → 0 0 0 1 0 0 0 kimenet

0 1 -1 0 0 0

0 0 1 -1 0 0 0

0 1 0 1 0 0 0

0 0 1 -1 0 0 0

ha $b_1 > 1$ → elszállhat

ha $b_1 < 1$ határolyk. nem csökkenés a kimeneten

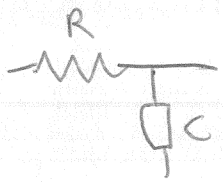
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} b^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

instabilitás, ha $b > 1$

↳ kvázi integrál áramkör ⟷ mar

digitális "nő"

analóg "nő"



eldöntésről





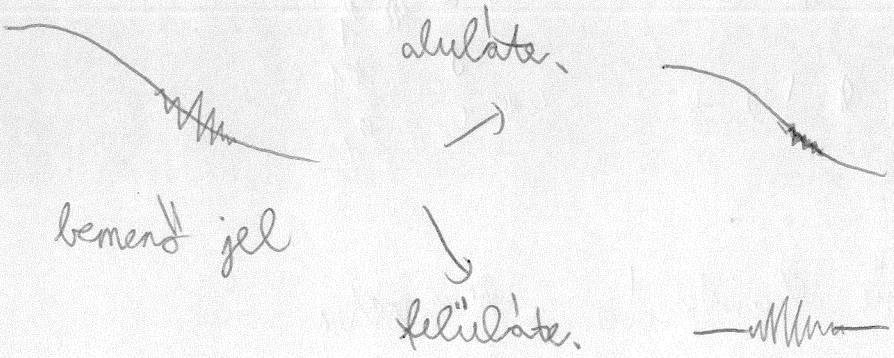
b) ↳ differenciáló áramkör

$$y_n = A_0 x_n + A_1 x_n z^{-1} - B y_n \cdot z^{-1}$$

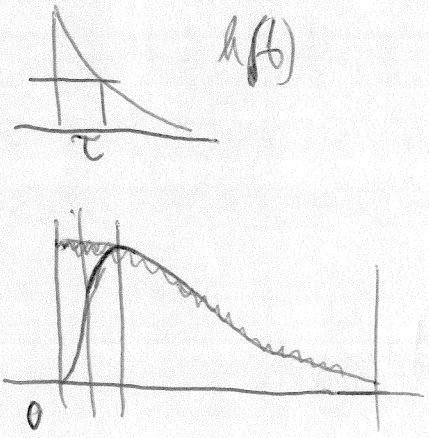
$$y_n = \frac{A_0 + A_1 \cdot z^{-1}}{1 - B z^{-1}} x^n$$

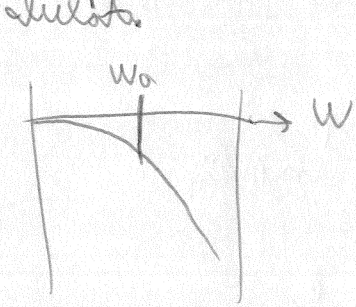
felületerősítő

0 a nevező, ha $B z^{-1} = 1$ → oszcillátor (elszáll)



pl.





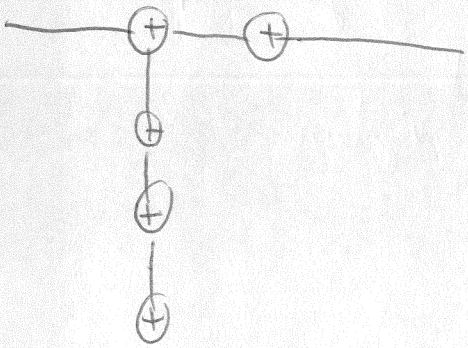
- felfutási jelenségek a áramkör nem tudja jól visszaadni (tüllövés)

simító szűrő : w_0 kicsi

↓

$\frac{1}{w_0}$ nagy → τ nagy → hosszú adatsor kell

c) Általános alak



→ Fáyamatalan kell! (jegyzet)

$$H(z) = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_k z^{-k}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots + B_m z^{-m}}$$

~~stabil~~

ha nevező 0 → instabil → előáll → ~~(el)~~ oszcillátor

(termikus zajtól is)

ha a késleltetés valódi → szűrőkből lehet használni

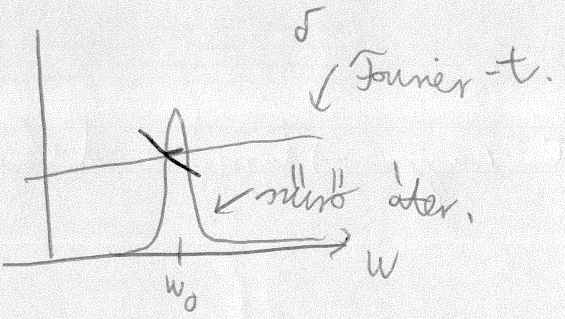
d) sáváteresztő szűrő

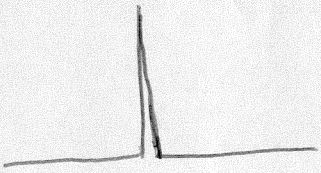


sávzáró szűrő



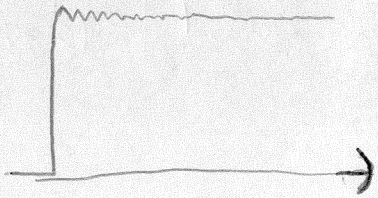
"nulla" → δ





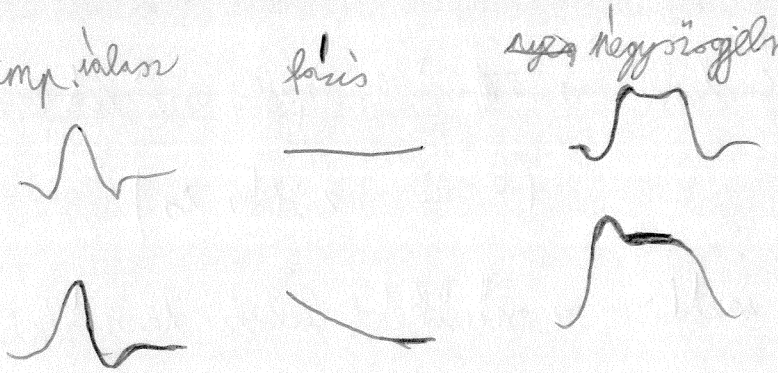
a zajt is meg tudja
szűrni egy jó szűrő
↓
erre vigyázni kell

ampl.



<u>fázisátmenetes</u> (azt mondtuk, hogy a lineáris a jó)

impulzus fázis négyszögjelre



Van-e időszimm?
(tőltés, paritás, időszimm → szimmetrikus,
de külön-külön zérusok)

IIR → kis tudás, kis adatigény, kevés alkatrész

FIR → sok alkatrész, ...

DSP előnyök

- híradástech. jelek (TV, rádió, ...)
- képfeldolg. (kamera)
- hangfrekvenciás technika (GSM, beszédfelismerés)
- mérésadat feldolgozás

célprocessorok (on-line)
szám. programok (off-line) } tudják a DSP-t szimulálni

↑

h(t)-t kell ismerni hozzá

miért jobbak az analógoknál?

- nagyobb pontosság
- akármilyen mérés megvalósítható
- olcsóbb
- :

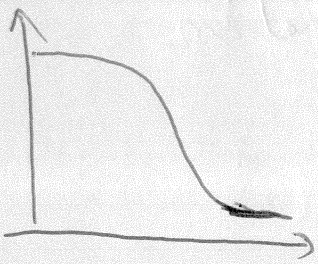
Szűrőtípusok

01) Aluláteresztő/felüláteresztő
sáváteresztő/tarsáv ↷ ezekből megvalósítható

felüláteresztő = 1 − aluláteresztő

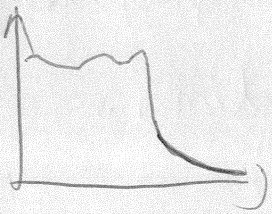
Aluláteresztő:

1) $H(w) = \frac{1}{1+F(w/w_0)}$

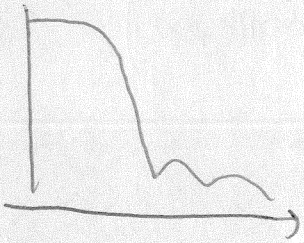


Butterworth

(sima, de lassú levágás)



Csebisev-1



Csebisev-2



elliptikus

gyors levágás, de ingadozás

2 B) Tervezési szempontok

- ingadozás az áteresztésen rossz
- — " — a vágási részben elfogadható
- vágás mértéke: dB/dekád
- vágási szint (pl. -40 dB)
- fázis linearitás csak az átviteli sávban fontos
- nemlin. a fázismenetben még elfogadható lefutás

⇓

komplex fv. miatt egyszerre kell a fázis és ampl. átvitelt megadni → nincs tökéletes megoldás, csak tolerancia lefutás (fázis vagy ampl.)

- Bessel → Bessel-fv-ek
  ↳ maximálisan sima fázismenet
- Butterw. → $(\omega/\omega_0)^{2n} = H(\omega)$ (csoportkés.)
  ↳ legsimább átvitel
- Csebisev → Csebisev-polinom
  ↳ jó lekrágás

→ gyorsan vág le → nagy túllövés → Csebisev
→ lassan — ||— → kis túllövés → Butterworth

~ határozási reláció → nem lehet vele mit csinálni

3) Feladata:

Képek nagyítása, interpoláció

nagyított kép → Fourier-transf. → Butterworth → visszatraf.
- szűrés
↓
simítás
(alacsony frekiket átengedi)

Vizsgaidőpontok
(kés.) ±1 nap
05.30
06.04 (UV)
06.13
06.27

10. óra

Diszkrét Fourier transzformáció (DFT)



N mintavétel, T: mintavételezési idő

$$V(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{v(nT)}_{\text{időfüggő}} e^{-i n k \Omega T} \quad (+)$$

valóságban → Fourier-sor

itt $\Omega = \frac{2\pi}{NT}$ ← mintavételi tétel miatt

legfeljebb 1 hullámot vehetünk egy mintavételi periódusba

Mennyi információ? N szám → N komplex szám ← honnan jött be extra info?

$k = rN + k_0$ és r egész

$$V(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} v(nT) e^{-i\Omega k_0 nT}$$

$$e^{-i\Omega TNr} \equiv 1$$

$$e^{-i 2\pi \cdot \underbrace{2r}_{\text{egész}}}$$

feltételezzük, hogy a minta NT periódussal ismétlődik

→ a spektrum N periódussal ismétlődik

⇓ tehát)

N (valós) adat → N/2 független komplex szám ✓

$w := e^{i2\pi/N}$

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \dots & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \dots & \\ \vdots & & & & \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & \dots & w^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}$$

↓ (bázisok) (elők)

a Fourier-transz egy másik lineáris térbe transzformál

ha csak 1 értéke $\neq 0$ → Dirac-δ_n

oda-vissza transz → $\frac{1}{N}$ faktor $\qquad w = e^{i2\pi/N}$

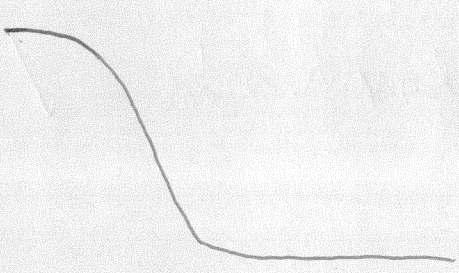
$$v_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{nk} V_k$$

$$V_k = \sum_{n=0}^{N-1} w^{-nk} \cdot v_n$$

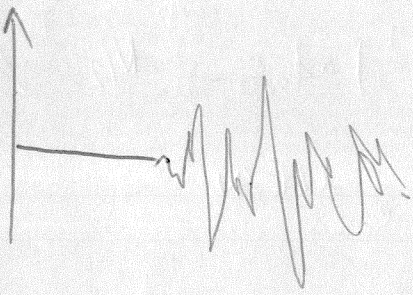
Probléma: számolás megoldható

kapott Fourier-transzformált

valós ← Milyen algoritmussal vissza kell számolni



magnitúdó



numerikus pontosság miatt milyen ~~kicsi~~ jelszint is kiad

ha 0 a vektor, akkor kmekkora lehet a fázisa

FFT - Fast Fourier transzformáció

Fourier-traf → N^2 szorzás → nagyon sok

1965 : Cooley Tukey → $N \cdot \log_2 N$ algoritmus

1978 : Winograd algoritmus

	szorzás/pont	összeadás/pont
DFT :	8000	8000
CT-FFT :	40	60
Winogr.	6	91

~~csak a páros értékeket "megnézi"~~, páros és páratlan értékeket különválasztom, -ll- ebből

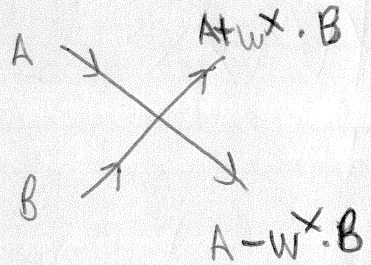
$W_N^2 = W_{N/2}$ kiemelem a szorzófaktort

↓

fele akkora adatsor

→ dia!

lépkeményítés



} pl. egy processzorba be van építve egy → 1 órajel alatt el tudja végezni a lépkeményítést

ehhez elősorolszik az adatokat → bit-reverzálás

minden lépésben N db művelet.

További sebességnövelés

- pl. csak valós adatok

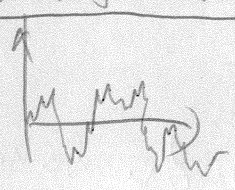
~~$V(k) = V_1$~~ $V = V_1 + i V_2$

- gyorsabb számítógép
- aritmetikai proc.
- look-up table
- csökkentett fix számábrázolás
- hatékony algoritmusok

- konvolúció - dekonvolúció miatt hasznos az FFT

(Fourier - térben szorzás)

Ciklusos konvolúció



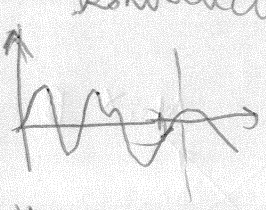
jel



impulzus-szerű jel

⇒

konvolúció valóságban



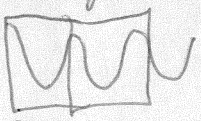
pl: simítás képeknél

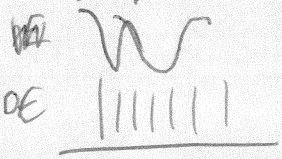


periodikus jel lesz!)

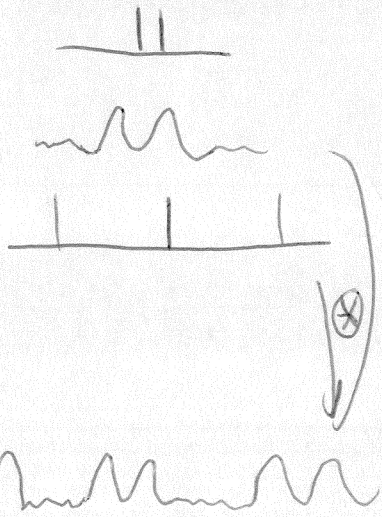
a konvolvált Fourier-tábla, pedig valójában nem az

folytonos jel

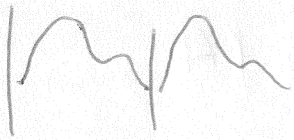




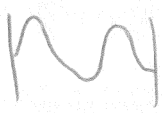
a mintavételezés periodikus

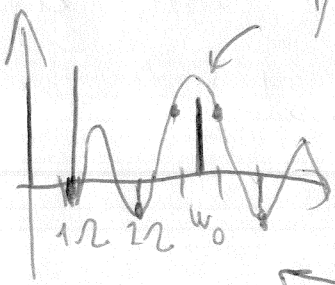


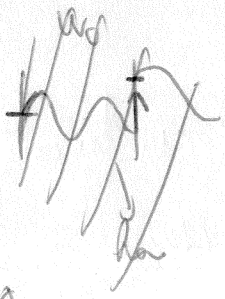
a mintavételezés miatt lesz periodikus a konvolvált jel

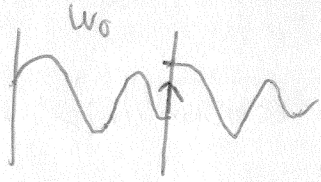












ez periodikusnak vesz, de van benne egy ugrás

nem pontos ω_0-on lesz egy Γ, hanem $\frac{\sin x}{x}$ alakú lesz

II

az ugrás miatt nem kapok ~~(végig)~~ 1db δ-t.

↳ frekvenciafüggő teljes. spektrum lesz

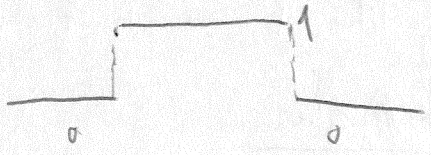
$(P \sim |V(\omega)|^2)$

ez változik a $\frac{\sin x}{x}$ nézésnél

~~(t~~ függően)

↓

ablakfv.

pl. 

(0-ról indul, 0-ra érkezik, de egy adott sorozaton nem 0)





pl. négyszög

háromszög (Bartlett)

Hamming $0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$

Hanning $0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$

Blackman $0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$

ezt csak teljesítményspektrumnál kell használni

maximum meghatározása és rossz spektrumkép

vagy jó spektrumkép, de széles maximum

(↓ ~ határsági reláció)

- Winograd-algoritmus: primszámok hatványai, nem csak 2 hatványok
- val, sal, cal } sin-cos eltolásai, de nem lehet velük egyszerűbben kavarodni (teljesítményspektrumra jók)

~~zaj~~

Zajok jellemzői

- zaj: nem lehet kiszűrni → autokorr.: δ
- zavar: elvileg kiszűrhető

pl. félvezető: hőmérséklet → lyuk-e⁻ pár

↓

keltségzaj

~~(teljesítmény)~~

zaj teljesítménye $\sim \sigma^2$

11. óra

tétellista: itt 7 → (kissítani fogják még)

Wiener-szűrés

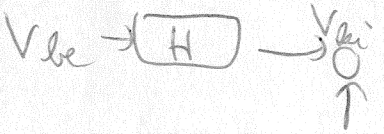
~~dekonvolúció~~

dekonvolúció:

- $H(w)$ → $K(w) = 1/H(w)$ korrekciós szűrő
- probléma: zaj, $H(w) = 0$ sokszor (pl. részl.)

szűrőkről 2db.
elv:
jel → Fourier-tr. →
→ szűrés → visszatrafó

$$V_{ki}(w) = V_{be}(w) \cdot H(w)$$



$Z(t)$: zaj

$V_z(t) = V_{ki} + Z(t)$ → ezt mérjük: zajos jel

optimális $K(w)$ szűrő:

→ legjobban visszaadja a bemenő jelet a zajos kimenőjelből!

$V(w) = V_z(w) \cdot K(w) / H(w)$ → $\int_{-\infty}^{\infty} |V(w) - V_{be}(w)|^2 dw$ minimális!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(V_{ki}(w) + Z(w)\right) \cdot K(w) / H(w) - V_{ki}(w) / H(w) \Big|^2 dw$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(w)|^{-2} \left(|V_{ki}(w)|^2 |1 - K(w)|^2 + |Z(w)|^2 |K(w)|^2 \right) dw$$

→ zaj és jel korrelálatlan, keresztszorzat eltűnik

($0 = \int \underbrace{A(w)}_{\text{jel}} \underbrace{Z(w)}_{\text{zaj}} dw$ → zaj nem korrelál semmivel)

Minimális, ha $K(w)$ $\forall w$-ra minimális

deriválva $K(w)$

$$K(w) = |V_{ki}(w)|^2 / \left\{ |V_{ki}(w)|^2 + |Z(w)|^2 \right\}$$

optim. Wiener-szűrő

→ mindig, milyen rendszeren küldünk át

→ kimenő jel és zaj teljesítményspektrumát kell csak tudni

ha $V_{ki}(w) \gg Z(w) \rightarrow K \approx 1$

→ ~~Z~~ teljesítményspektruma → ~~Fed~~ becslés, kiértékelés

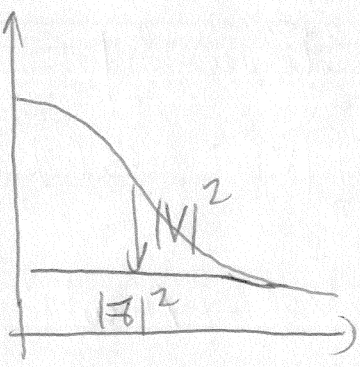
pl. $Z(w) =$ konstans → fehér zaj

$Z(w)$-t elég nagyjából megadni a másodrendű függés miatt

másképp nem lehet

ezt kihasználni, mindig valami kiértékelést tenni

$|V|^2 + |Z|^2 \approx |V+Z|^2$



$$\frac{|V|^2}{|V+Z|^2} \approx \frac{|V|^2}{|V|^2+|Z|^2} = K(w)$$

kép:

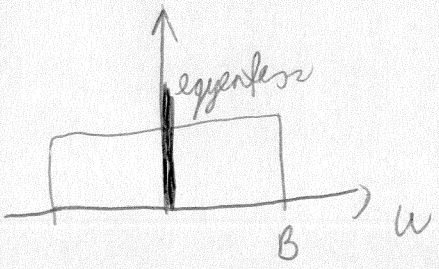
sirály ~~(Wiener-szűrő)~~ = kavicsok zajos sirály

Integrálás időben

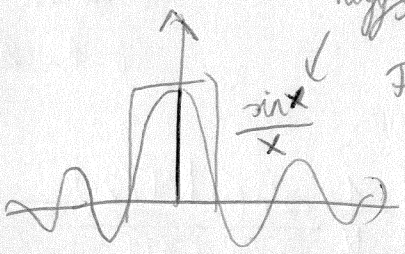
Ha sokáig mérünk: kiátlagoljuk a jelet → Milyen lesz ez a súlyfv.?



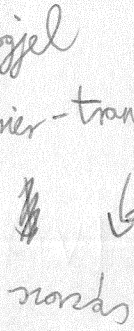
négyszögjellel ~~torzítjuk~~ konvolválunk



bemeneti zaj



szórás



zajjal

$$N^2(\text{zaj, noise}) \simeq \frac{1}{T}$$

ha 2-szer annyi ideig mérek, $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szeres lesz a zaj)

$\frac{1}{2}$ a zaj telj.-e.

Kvázi periodikus jelek detektálása a zaj jelenlétében

folyt.

indító jelek → periód. mérés → N mérési pontok

átlagolás a hasznos jel ampl.-t N-szeresére növeli,

$\sqrt{N}$-szeresére növekszik a zaj telj.-e

⇒ javulás mértéke $\sqrt{N}$-el arányos !

→ triggerelés

N db mérés → N db δ-t egymás után rakunk T időközzel

$$V(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\omega nT} = \frac{e^{-i\omega TN}-1}{N(e^{-i\omega T}-1)} = \dots$$

nT eltolás időben a 0-ha képest

$$|V(f)| = \frac{1}{N}\frac{\sin(\omega NT/2)}{\sin(\omega T/2)}$$

Mintaszámnak növelése → "éles" karakterisztika:

"éles szűrő"

pl. TV-ben

rossz jel → egymás utáni jeleket átlagol

↙ gyorsan változó képnél nem ~~látod a képet~~ látjuk a zajt → nem kell átlagolni

↘ lassan változó képnél átlagolni kell

minél nagyobb N ("több átlagolás", "élesebbek a fogak"), annál jobb lesz az $\frac{\text{jel}}{\text{zaj}}$ arány

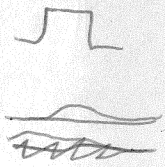
Illesztett szűrő problémája

Ha ismerem a jelalakot → ki tudom-e szedni pontosabban a jelet a zajból?

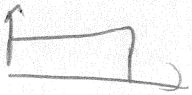
pl. négyszögjel + fehérzaj a jel

+ aluláteresztő szűrő

(kvázi integrálás)

ha kicsi a sávszélesség  → zaj 

egyiknél sem jön át rajta

DE nagyobb -ll-  → 

a zajból kevés jön át, de a négyszögjel egy idő után elég jó lesz (de közben az átjött zaj is nő)

⇒ átlagot nézünk:

h a szűrő, $x = s + n$ (s: szűrendő jel, n: zaj)

$SNR = \frac{|\bar{y}_s|^2}{E(|\bar{y}_n|^2)}$ → ide

$E(|h^* n|^2) = h^* h$ ← a * az előtte álló jel komplex konjugáltja, nem szorzás

-ft

$$\Rightarrow SN = \frac{|\overline{h} * \overline{s}|^2}{\overline{h} * h}$$

felső - limit:

(Cauchy-Schw.) $|\overline{a} * \overline{b}|^2 \leq (\overline{a} * a)(\overline{b} * b)$

hgy $SN = \frac{|\overline{h} * \overline{s}|^2}{\overline{h} * h} \leq \frac{(\overline{h} * h)(\overline{s} * s)}{h * \overline{s}} \leq \overline{s} * s$

$\Downarrow$

akkor lesz max., ha a <u>súlyfv. az eredeti jel időbeli tükrözöttje</u> !

(kompla. konj.)

- digitális megvalósítás

$\sin\underbrace{(\omega_0 + \alpha b)}_{w(b)} \cdot b + \varphi_0)$

illesztett szűrővel

↑ időben vált. freki → ezt jól lehet keresni a zajban, ha tudjuk, hogy ilyen az alak

↓

vissza ha nem tudjuk milyen az alak, nehezebb felismerni a jelet

→ pl. radiolokációban jó → radar

- az illeszt. szűrő maximalizálja a bit/hiba arányt is

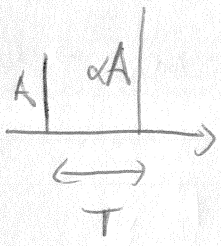
ez is egy ismert jelalak



→ lehet használ dig. ill. szűrőt csinálni

~~erősítő~~, α és β ~~erősítés~~

...



$$\frac{S}{N} = \frac{(A+A\alpha\beta)^2}{n_0^2(1+\beta)^2}$$ ← a zaj

pl. pontforrás keresése

- képfelismerés:

kép → Fourier-tr. → szűrés → visszatrafó

Wavelet-transzformáció

1) ~~szűrés~~ ~~amplitúdós~~ ⇄ frekvenciatér mindkét, melyikben jobban lehet

DE időbeli lokal. → frekv. térben ∞

frekvenciabeli -"- → időbeli -"- ∞

ha változás a frekvenciaspektrumon nem igazán látszik

↳ a változás a frekvenciaspektrumon nem igazán látszik

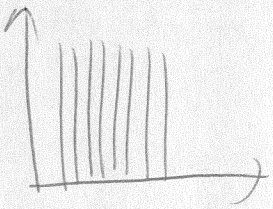
Válasszunk másik bázist!

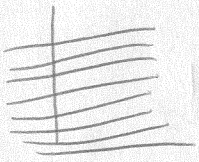
(ne sin, cos-okat és δ-kat)

általános bázisvektor-rendszer nem TÉR

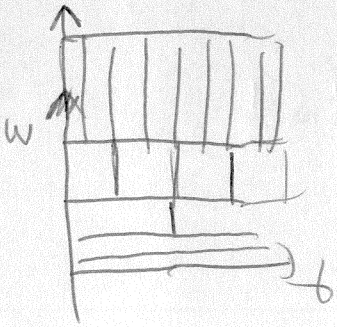
érdekesség: a konvolúciónál ~~helyett csak~~ másik térbeli szorzás van → ez csak a Fourier-térnél igaz!

rekurzív felbontás:





↓ csökk



Daubechies-wavelet:

DFT-nél volt mátrix ( )

$$D_4 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

→ integráló jellegű szűrő (páratlan sor)
→ deriváló —"— (páros sor)

→ wavelet kvadrok

↓

4 param.: c_0, c_1, c_2, c_3

legyen

$D_4^{-1} = \tilde{D}_4$, páros sorok kimenete konst. és lin. jelekre 0 legyen

pl. simított + kivont ütközés → kevesebb simított ütközés (pl. sorbarendezés után)

↓

ez lineáris transzf.

→ mátrixtranszf. szorzata

hasonlít az FFT-re

lépkedő művelet ↔ mátrixszorzás

sellarni: paraméterek megállapítása, tömörítés, ha bizonyos együtthatókat

érdekesség: tartok csak meg (sorbarend. után)

kontúrelemzés

↳ az eseményhez karakterisztikusak

↳ a kép mikrorészeit wavelettel felbontva,

↳ spektrumból meghatározható

Vizsgán tartozik:

- Fourier, Green-fv.
- konvolúció, korreláció
- Wiener-tétel
- mintavételi-tv.