Hőtan-folytköz tételek

Írták: A szerzők

2021 tavasz

Előszó

Hasznos linkek

Termodinamika előadás videók:
https://www.youtube.com/watch?v=Qr3KbWFSUpklist=PLVHr$_3$VT0061C72eia$_8$GI8$_S$vhf9sTSO
2015-ös folytköz kidolgozás:
http://fizweb.elte.hu/download/Fizika-BSc/Folytonos-kozegek-mechanikaja/Jegyzet/folytkoz-emelt-tetelkidolgozas-2015.pdf
2017-es hőtan kidolgozás:
http://fizweb.elte.hu/download/Fizika-BSc/Termodinamika/Jegyzet/Termo-tetel$_k$idolgozas − 2017.*pdf*

Megjegyzések és saját felelősségi nyilatkozat

Ezt a tételkidolgozást a 2020 BSc hallgatói készítették közösen, mivel a tárgyátalakítások után nem volt más rendes tételkidolgozás ehhez a tárgyhoz. Ez azt is jelenti, hogy bár számtalanszor átnéztük, és időnként egymást is ellenőriztük, előfordulhatnak a kidolgozásokban hibák illetve pontatlanságok. Éppen ezért ez a kidolgozás nem pótolja a saját jegyzetet és az előadásokat, illetve mindenki saját felelősséggre használja az irományt. Ettől függetlenül ebből a kidolgozásból tanulva jó jegyek is fordultak elő a vizsgákon.
A legtöbb tétel végénél fel van tűntetve, hogy ki követte el, így ha valaki komoly hibát vél felfedezni, tudja, ki érte a felelős. :D
A 24. tétel minden bizonnyal hiányos, az alacsony hőmérsékletek fizikája nincs benne kidolgozva. Erről az utolsó termodinamikás előadás videókban van szó.

Sikeres vizsgát!

A szerzők

1. EGYSZERŰ DEFORMÁCIÓK

1.1. Ami kell

Deformáció fenomenológiája: feszültség, deformáció, folyásfeszültség, alakítási keményedés; Rugalmas nyújtás; Young-modulusz; Harántösszehúzódás; Térfogati összenyomás; Nyírás

1.2. Kidolgozás

Szilárd anyagok deformációjánál három meglehetősen különböző viselkedési formát figyelhetünk meg. Vegyünk egy acélrudat, erre F erővel hatva a drót megnyúlik, a terhelés változtatásával látjuk, hogy ez a megnyúlás arányos a nyújtó erővel. A húzóerő megszüntetésével a drót visszanyeri eredeti alakját, azt mondhatjuk tehát, hogy a folyamat reverzibilis. Különböző műanyagokat, például damilt nyújtva azt vehetjük észre, hogy a megnyúlás és az erő kapcsolata nem lineáris, azonban a folyamat még mindig reverzibilis. Irreverzibilis jelenséget mutat például a rézdrót. Ezt megnyújtva az erő-megnyúlás grafikon képe nem lineáris, sőt a terhelés levételével nem áll vissza az eredeti hossz, marad egy maradandó alakváltozás. Egy másik érdekes jelenség az alakítási keményedés. Egyes anyagok deformációval keményebbé tehetők. Ezeknek nyilvánvalóan nem lineáris az $F - \Delta l$ grafikonjuk. Ilyen anyag például az előbb említett réz is, ami azonban melegítéssel ismét puhává tehető.

Egyszerű deformációk vizsgálatával azt kapjuk, hogy a F nyújtó erő arányos a test keresztmetszetével, és a Δl megnyúlása arányos a nyugalmi hosszal. Vezessünk be két új mértékegységet ezek felhasználásával.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{és} \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

Az ε-t deformációnak, a σ-t feszültségnek nevezzük. Az előbbinek láthatóan nincs mértékegysége, míg az utóbbinak van: $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$. Látható, hogy az $F - \Delta l$ grafikon alakja megegyezik a $\sigma - \varepsilon$ grafikon alakjával.

Egyszerű deformációknál láttuk, hogy a feszültség, és a deformáció egyenesen arányos egymással. Az arányossági tényezőt E-vel jelöljük, ez a Young-modulus. $\sigma = E\varepsilon$. Mértékegysége érthetően Pascal, értéke anyagfüggő, de nagyságrendileg a 100 GPa-os tartományba esik. Az a feszültségérték, ameddig reverzibilisen elmehetünk, 100 MPa körül van. Ebből az előbbi képlet szerint kifejezhető a deformáció. Azt kapjuk, hogy az ε értéke aránylag kicsi, 10^{-3}. Ez persze nem igaz minden anyagra, guminál például ez az érték 1 is lehet.

Haránt-összehúzódásnak nevezzük azt a jelenséget, amikor egy testet megnyújtva hosszában, a keresztmetszete megváltozik. Érthetően ha a hossz megnő, akkor a keresztmetszet lecsökken.

$$-\nu\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta d}{d}$$

ν arányossági tényezőt Poisson-számnak nevezik, értéke $\nu \approx 0,3$. Vizsgáljunk egy négyzet alapú hasábot, aminek hossza l, fedőlapjainak oldalai d hosszúak. Számoljuk ki a térfogatváltozást Δl hosszváltozás esetén.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(l + \Delta l)(d + \Delta d)^2 - ld^2}{ld^2}$$

A négyzetes tagot kifejtve, és a $(\Delta d)^2$ tagot elhanyagolva (hiszen ez 3 nagyságrenddel kisebb, mint a többi tag), egyszerű egyenlethez jutunk.

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}$$

Felhasználva az eddig összefüggéseinket σ és ε között, az egyenletet átalakíthatjuk a végső formájába.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma$$

A testet három irányból összenyomva ezt a következő alakba lehet átírni:

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{1-2\nu}{E}p$$

Láthatjuk, hogy ez egy összefüggést határoz meg a nyomás és a relatív térfogatváltozás között. A $3\frac{1-2\nu}{E}$ együtthatót kompresszibilitásnak nevezzük (reciproka a kompresszió modulus). Ez szintén anyagi állandó, hiszen mind ν, mind E állandó. Egy anyagot egyensúlyinak nevezünk, ha a kompresszibilitása pozitív érték, azaz ha összenyomjuk, akkor a térfogata lecsökken. $\left(\text{Termodinamika: } \kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\right)$

Egy testre az egyik felület normálisára merőleges erővel hatunk. Ekkor nyírásól beszélünk. Tiszta nyírás estén a térfogat nem változik. A folyamatot lehet jellemezni a nyírási szöggel γ, és az előbbiekhez hasonlóan bevezethetünk egy nyomás dimenziójú mennyiséget, hiszen $F \sim A$.

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu\gamma$$

Ahol μ a nyírási modulus, τ pedig a nyíró feszültség. Mindkettő Pa dimenziójú.

1.3. Megjegyzések

Az első bekezdésben szó esik a réz sajátos tulajdonságáról, miszerint egy bizonyos feszültségérték fölött „megváltozik" a Young-modulusa. Ezt az értéket folyási feszültségnek hívjuk.

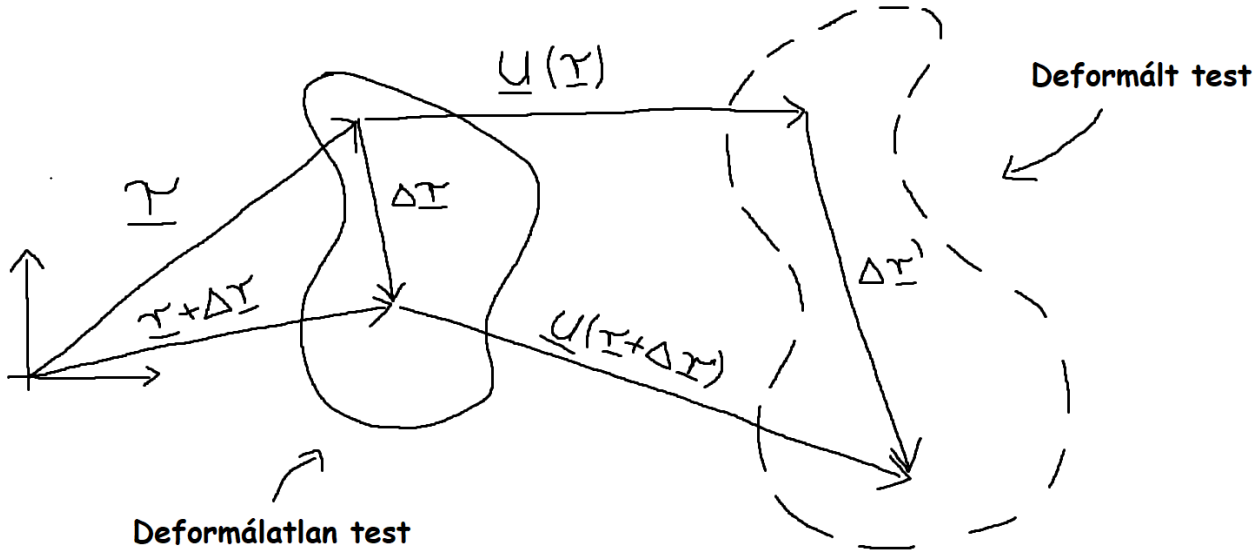
2. DEFORMÁLHATÓ TESTEK KINEMATIKÁJA

2.1. Ami kell

Deformációs állapot általános jellemzése; Elmozdulástér; Disztorzió szimmetrikus és antiszimmetrikus részének jelentése; Relatív megnyúlás; Deformációs tenzor bevezetése és tulajdonságai

2.2. Kidolgozás

Vizsgáljuk a következő általános deformációt:



Itt $\underline{u}(\underline{r})$ az úgynevezett elmozdulástér. Az ábra alapján megadható egy pont helye (helyvektora) a deformáció után:

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{u}(\underline{r})$$

A test két pontját összekötő ($\Delta\underline{r}$) vektor a deformáció után (az origót eltoltuk $\underline{r}$ vektorral):

$$\Delta\underline{r}' = \Delta\underline{r} + \underline{u}(\underline{r} + \Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r})$$

Ebből az $\underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r})-\underline{u}(\underline{r})$ egy háromdimenziós vektormező, mely komponensei skalármezők. Ebben az alakban észrevehetjük a skalármező gradiensét ($\Phi(\underline{r} + \Delta\underline{r}) - \Phi(\underline{r}) = \partial_i\Phi\Delta r_i$). Ez alapján az elmozdulástér $i.$ komponensére:

$$u_i(\underline{r} + \Delta\underline{r}) - u_i(\underline{r}) = \partial_j u_i \Delta r_j = \left(\hat{\beta}\Delta\underline{r}\right)_i$$

Az így bevezetett $\hat{\beta}$ tenzor a disztorzió tenzor. Ez dimenziótlan.

$$\beta_{ij} = \partial_j u_i$$

Így a következőképpen írhatjuk föl a $\Delta\underline{r}'$ vektort:

$$\Delta\underline{r}' = \Delta\underline{r} + \hat{\beta} \cdot \Delta\underline{r}$$

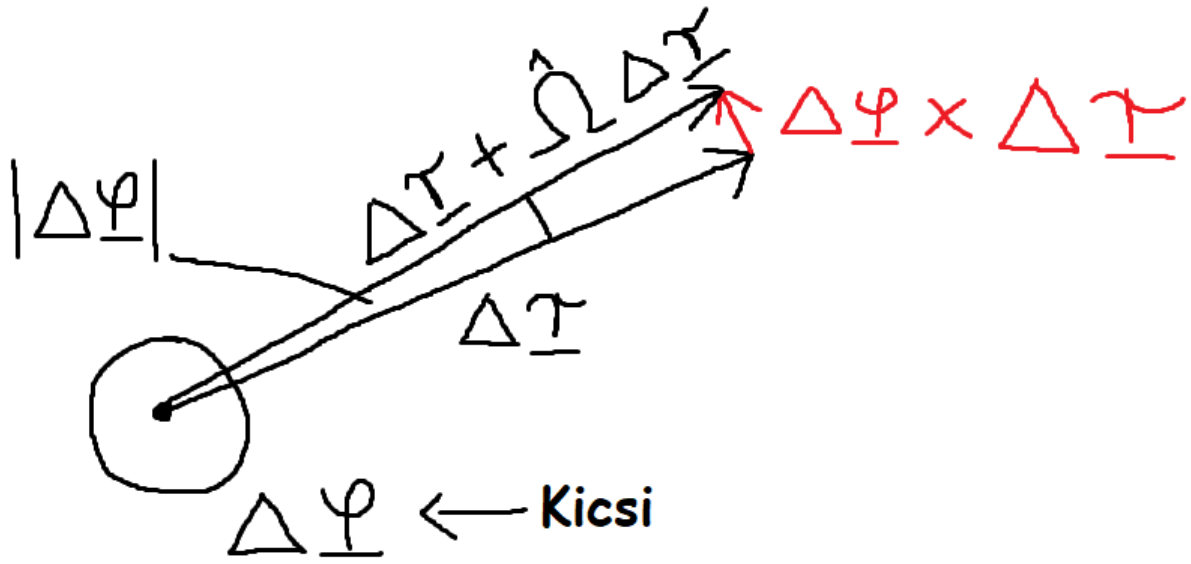
Néhány deformáció disztorziója:

- Eltolás: $\begin{cases} u_x = u_0 \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Nyújtás: $\begin{cases} u_x = \varepsilon_0 x \\ u_y = -\nu\varepsilon_0 y \\ u_z = -\nu\varepsilon_0 z \end{cases} \Longrightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon \end{pmatrix}$
- Nyírás: $\begin{cases} u_x = \gamma y \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A tenzor fölbontható egy szimmetrikus ($\hat{\varepsilon}$) és egy antiszimmterikus ($\hat{\Omega}$) részre. A szimmetrikus részt hívjuk deformációs tenzornak.

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\beta} + \widetilde{\hat{\beta}}}{2} \quad \textbf{és} \quad \hat{\Omega} = \frac{\hat{\beta} - \widetilde{\hat{\beta}}}{2}$$

Egy vektornak egy 3×3-as antiszimmetrikus mátrixszal való szorzása leírható egy vektoriális szorzással. Mivel tanulmányaink során csak kicsiny deformációkkal foglalkozunk, így $\hat{\Omega}$ elemei is kicsik, tehát az álltala leírt vektoriális szorzás is csak egy kicsi vektorral történik. Ez alapján a $\Delta\underline{r}' = \Delta\underline{r} + \hat{\Omega}\Delta\underline{r}$ csak egy kicsiny forgatást jelent. Ezt láthatjuk a következő ábrán is:



Vizsgáljuk meg újra a nyírás disztorzióját két esetben, melyek csak el vannak forgatva egymáshoz képest:

- $\begin{cases} u_x = \gamma y \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_x = \dfrac{\gamma}{2} y \\ u_y = \dfrac{\gamma}{2} x \\ u_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Láthatjuk, hogy a disztorzió mindkét esetben ugyanolyan szimmetrikus résszel rendelkezik, de az első esetben van $\hat{\Omega} \neq \hat{0}$ antiszimmterikus is, tehát az el van forgatva.
Az eddigi példákból azt a következtetést is levonhatjuk, hogy $\hat{\varepsilon}$ főátlóbeli elemei a megnyúlást, azon kívüli elemei pedig a nyírást jellemzik.

Így a $\Delta\underline{r}'$ fölírható a következő alakba:

$$\Delta\underline{r}' = \Delta\underline{r} + \hat{\beta}\Delta\underline{r} = \left(\hat{I} + \hat{\varepsilon} + \hat{\Omega}\right)\Delta\underline{r}$$

Ennek abszolútértéke:

$$|\Delta\underline{r}'| = \sqrt{\Delta\underline{r}'\Delta\underline{r}'} = \sqrt{\left(\hat{I} + \hat{\varepsilon} + \hat{\Omega}\right)\Delta\underline{r}\left(\hat{I} + \hat{\varepsilon} + \hat{\Omega}\right)\Delta\underline{r}} \approx \sqrt{\Delta\underline{r}\Delta\underline{r} + 2\Delta\underline{r}\hat{\varepsilon}\Delta\underline{r} + 2\Delta\underline{r}\hat{\Omega}\Delta\underline{r}} =$$
$$= \sqrt{\Delta\underline{r}\Delta\underline{r} + 2\Delta\underline{r}\hat{\varepsilon}\Delta\underline{r}} = |\Delta\underline{r}|\sqrt{\underline{n}\ \underline{n} + 2\underline{n}\hat{\varepsilon}\underline{n}} = |\Delta\underline{r}|\sqrt{1 + 2\underline{n}\hat{\varepsilon}\underline{n}} \approx |\Delta\underline{r}|\left(1 + \underline{n}\hat{\varepsilon}\underline{n}\right)$$

Az átalakítások során egyszerűsítéseket is végeztünk, mint például, hogy $\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon} \approx \hat{\Omega}\hat{\Omega} \approx \hat{\varepsilon}\hat{\Omega} \approx \hat{0}$ vagy, hogy kicsiny x-re $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$. Bevezettük még az új $\underline{n}$ vektort is, mely definíciója: $\underline{n} = \dfrac{\Delta\underline{r}}{|\Delta\underline{r}|}$.
Így a relatív megnyúlás:

$$\frac{|\Delta\underline{r}'|}{|\Delta\underline{r}|} = 1 + \underline{n}\hat{\varepsilon}\underline{n}$$
$$\frac{|\Delta\underline{r}'| - |\Delta\underline{r}|}{|\Delta\underline{r}|} = \underline{n}\hat{\varepsilon}\underline{n}$$

Tehát azt látjuk, hogy a szimmetrikus $\hat{\varepsilon}$ tenzor írja le az alakváltozást.

Vizsgáljuk meg egy téglatest térfogatváltozását. Ennek oldalait leíró vektorok:

$$\Delta\underline{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta\underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Ezek a deformáció után:

$$\Delta\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1+\beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{31} \end{pmatrix}\Delta x \quad \Delta\underline{y}' = \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ 1+\beta_{22} \\ \beta_{32} \end{pmatrix}\Delta y \quad \Delta\underline{z}' = \begin{pmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ 1+\beta_{33} \end{pmatrix}\Delta z$$

Az így kialakult test térfogatát az ezen vektorok alkotta mátrix determinánsaként kaphatjuk:

$$\Delta V' = \begin{vmatrix} \Delta x'_1 & \Delta x'_2 & \Delta x'_3 \\ \Delta y'_1 & \Delta y'_2 & \Delta y'_3 \\ \Delta z'_1 & \Delta z'_2 & \Delta z'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & 1+\beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & 1+\beta_{33} \end{vmatrix} \Delta x \Delta y \Delta z \approx (1+\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33})\Delta V$$

Itt az utolsó lépésben elhanyagoltuk a legalább másodrendűen kicsiny tagokat.
Az egyenletet átalakítva kapjuk, hogy a relatív térfogatváltozás:

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = (\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33}) = \mathrm{Sp}(\hat{\beta}) = \mathrm{Sp}(\hat{\varepsilon})$$

Mendei Barna

2.3. Megjegyzések

Mivel $\hat{\varepsilon}$ írja le az alakváltozást, így érthető a damil érdekes megnyúlása, melyről az előző tételben volt szó, hiszen ennek $\hat{\varepsilon}$-ja nem csak hely, hanem az idő függő is. $\hat{\varepsilon}_{damil}(\underline{r}, t)$

3. DEFORMÁLHATÓ TESTEK DINAMIKÁJA

3.1. Ami kell

Feszültség tenzor értelmezése; Kontinuum mozgásegyenletének levezetése; Általánosított Hooke-törvény; Energiasűrűség; Izotrop anyagok esete; Lamé-állandók; Összefüggések a rugalmas állandókközött

3.2. Kidolgozás

Vizsgáljuk egy V térfogatú test V' térfogatú részét. Erre két féle erő hat: a térfogati (pl.: gravitációs)-, és a felületi erők, melyek a felszíni pontokra hatnak.
A térfogati erők eredőjét könnyedén meghatározhatjuk annak térfogati sűrűségével ($\underline{f}$):

$$\underline{F}^{(t)} = \int_{V'} \underline{f} \mathrm{d}V$$

A térfogatdarabraható felületi erők rövidhatótávolságúaknak feltételezhetők, mivel ezek az atomok/részecskék közti kölcsönhatásokból származnak. Ezek az erők egyenesen arányosak a vizsgált felületdarab méretével, valamint függnek annak normálisától is, így egy kicsiny felületdarabra ható feületi erő:

$$\mathrm{d}\underline{F} = \hat{\sigma} \mathrm{d}\underline{A}$$

A két vektort összekapcsoló tenzor a feszültségtenzor. Ezt fölhasználva a térfogatdarabra ható felületi erő:

$$\underline{F}^{(f)} = \oint_{\partial V'} \hat{\sigma} \mathrm{d}\underline{A}$$

Newton II. törvénye alapján a testre ható erők eredője megegyezik a lendületének elsőrendű deriváltjával. Az elmozdulástérben lévő test lendülete a következőképpen néz ki:

$$\underline{I} = \int_{V'} \rho(\underline{r}') \underline{v}(\underline{r}', t) \mathrm{d}V = \int_{V'} \rho(\underline{r}') \underline{\dot{u}}(\underline{r}', t) \mathrm{d}V$$

Ennek deriváltja:

$$\underline{\dot{I}} = \int_{V'} \rho(\underline{r}') \underline{\ddot{u}}(\underline{r}', t) \mathrm{d}V$$

Hozzá kell tenni, hogy ez csak egy közelítés, mivel a sűrűség is változhat az időben, de ez kis deformációk esetében nem fordul elő.

Az eddigieket fölhasználva a kontinuum mozgásegyenlete:

$$\underline{F}^{(k)} = \underline{F}^{(t)} + \underline{F}^{(f)}$$

$$\int_{V'} \rho \underline{\ddot{u}} \mathrm{d}V = \int_{V'} \underline{f} \mathrm{d}V + \oint_{\partial V'} \hat{\sigma} \mathrm{d}\underline{A}$$

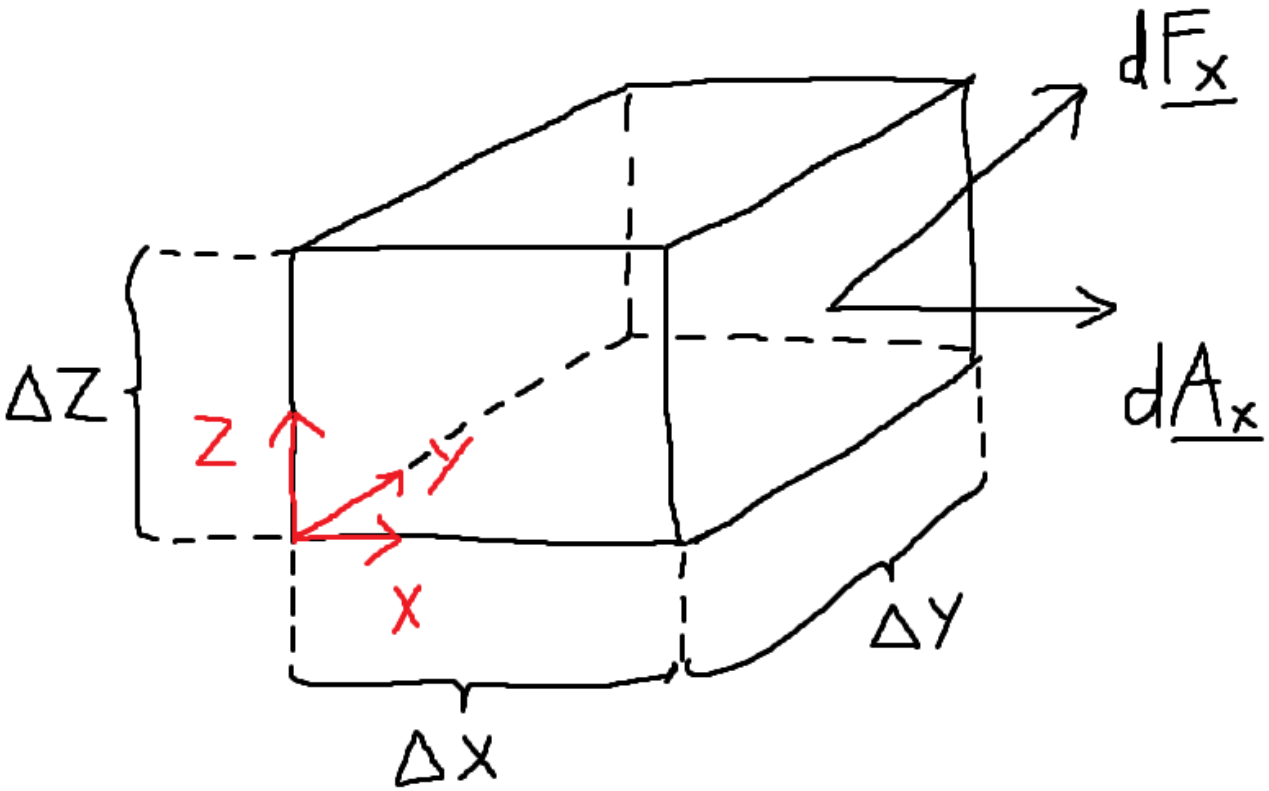
A Gauss-tételt fölhasználva:

$$\int_{V'} \rho \underline{\ddot{u}} \mathrm{d}V = \int_{V'} \underline{f} \mathrm{d}V + \int_{V'} \mathrm{Div}\ \hat{\sigma} \mathrm{d}V$$

$$\rho \underline{\ddot{u}} = \underline{f} + \mathrm{Div}\ \hat{\sigma}$$

Itt Div $\hat{\sigma}$ a tenzor sorainak divergenciájából álló vektor.

Érdekes lehet még megvizsgálni a feszültségtenzort.
Vizsgáljuk a következő kicsiny téglatestet:



Itt $\mathrm{d}\underline{A_x} = \begin{pmatrix} \Delta y \cdot \Delta z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, így a feszültségtenzorra vonatkozó összefüggés:

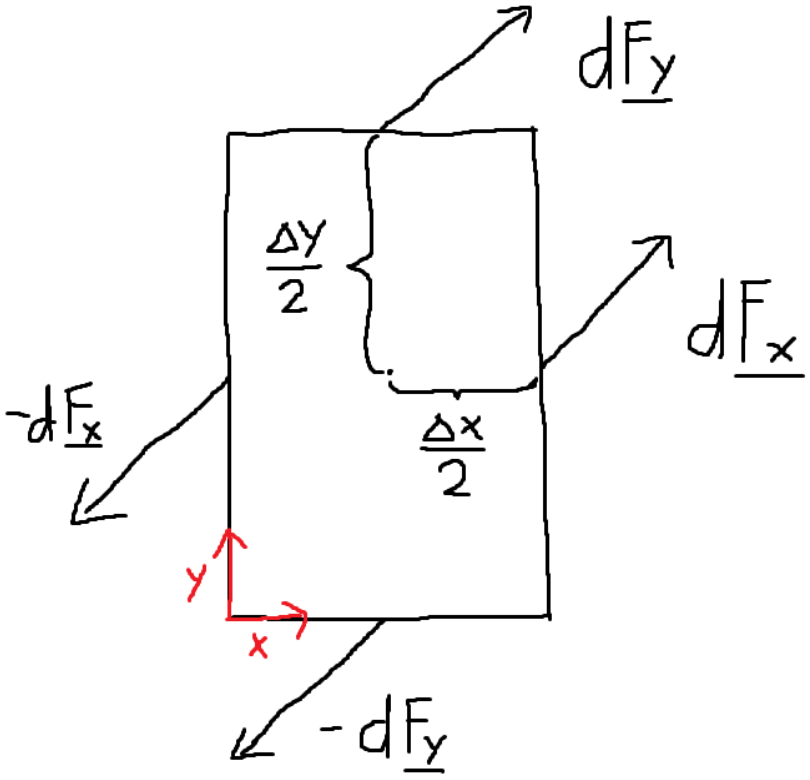
$$\mathrm{d}\underline{F_x} = \hat{\sigma}\mathrm{d}\underline{A_x} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \Delta y \cdot \Delta z$$

Ha ezt elvégezzük a többi lapra is, akkor észrevesszük, hogy a feszültségtenzor főátlóbeli elemei a nyújtásért, illetve, összenyomásért felelősek, az azon kívüliek pedig a nyírásért.

Sztatikus esetben a testre ható erők és forgatónyomatékok eredője 0. Ekkor az erők:

$$\underline{f} + \mathrm{Div}\hat{\sigma} = 0$$

A forgatónyomatékok vizsgálatához nézzük az előző ábra feülnézetét:



Ekkor a forgatónyomaték z irányú komponense:

$$M_z = 2\sigma_{21}\Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\Delta x}{2} - 2\sigma_{12}\Delta x \cdot \Delta z \cdot \frac{\Delta y}{2} = (\sigma_{21} - \sigma_{12})\Delta V$$

Ez csak akkor lesz minden komponensre 0, ha $\sigma_{12} = \sigma_{21}$; $\sigma_{13} = \sigma_{31}$; $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Tehát a sztatikus esetben $\hat{\sigma}$ szimmetrikus.

Adjuk meg az eddig használt $\hat{\sigma}$ feszültségtenzort! Az egyszerű deformációk esetében lineáris összefüggés volt a feszültség és a deformáció között. Föltételezhetjük, hogy hasonló áll fenn most is. Mivel már kétindexes tenzorokkal dolgozunk, ezért az arányossági tényezőnek egy négyindexesnek kell lennie. Ez a rugalmassági tenzor:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Az tenzoregyenletet általánosított Hooke-törvénynek hívjuk.

Tudjuk, hogy a deformációs tenzor, valamint statikus esetben a feszültségtenzor is szimmetrikus, így a rugalmassági tenzor szimmetrikus az $i - j$, valamint a $k - l$ indexekre. Ezen szimmetrikusság miatt a $\hat{\sigma}$ és $\hat{\varepsilon}$ tenzorok átírhatóak egy-egy hatelemű oszlopvektorrá. Egy kis segítség a megértéséhez:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \textbf{és} \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}$$

Ennek megfelelően $\hat{\hat{C}}$ is átírható egy 6×6-os mátrixszá, mely 36 független adattal jellemezhető.

Térjünk vissza egy kicsit az egyszerű deformációkhoz és vizsgáljuk meg az energiájukat. Vegyük egy huzal vagy egy rugó megnyúlását:

$$W = \frac{1}{2}D(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot Al = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \cdot V$$

Ebből az alakból könnyedén látszik, hogy a rugalmas energiasűrűség:

$$w = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

Indexesen írva:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$$

Fölhasználva az általánosított Hooke-törvényt és kicsit trükközve:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kl}C_{klij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{klij}\varepsilon_{kl}$$

Azt látjuk, hogy a rugalmassági tenzor szimmetrikus még az $i-j$, $k-l$ indexpárokra nézve is, tehát a korábban említett 6×6-os mátrix szimmetrikus, tehát $\hat{\hat{C}}$ csak 21 független adattal rendelkezik.

Érdemes megjegyezni, hogy az energiasűrűséghez használt képlet csak lineáris rugalmasság esetében használható, mivel a rugalmas energia magasabb hatványú tagokat is tartalmaz. Az általánosan alkalmazható összefüggés:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Vizsgáljuk meg az izotróp esetet! Ez annyit tesz, hogy az anyagban nincs kitüntetett irány. Ebben az esetben elvárjuk, hogy a rugalmas energiasűrűség invariáns legyen. Mivel $w(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, ezért az invarianciához szükséges, hogy w-t föl tudjuk írni $\hat{\varepsilon}$ invariáns mennyiségeinek valamilyen kvadratikus kombinációjaként.
$\hat{\varepsilon}$ invariáns mennyiségei:

- $\mathrm{Sp}\,(\hat{\varepsilon})$
- $\mathrm{Sp}\,(\hat{\varepsilon}^2)$
- $\det \hat{\varepsilon}$

Belátható, hogy a keresett alak a következő:

$$w = \frac{\lambda}{2} \cdot \mathrm{Sp}\,(\hat{\varepsilon})^2 + \mu \cdot \mathrm{Sp}\left(\hat{\varepsilon}^2\right) + \ldots \det \hat{\varepsilon}$$

Lineáris esetben a harmadrendűen kicsiny tagok miatt a determinánsos tagot elhanyagoljuk, így:

$$w = \frac{\lambda}{2} \cdot \mathrm{Sp}\,(\hat{\varepsilon})^2 + \mu \cdot \mathrm{Sp}\left(\hat{\varepsilon}^2\right)$$

ahol λ és μ az úgynevezett Pa dimenziójú Lamé-állandók. Közöttük μ a nyírási modulus.

Ez indexesen fölírva:

$$w(\varepsilon_{ij}) = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{ii})^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

Ebből a feszültségtenzor:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$\hat{\sigma} = \lambda \cdot \mathrm{Sp}\,\hat{\varepsilon}\ \hat{I} + 2\mu\hat{\varepsilon}$$

Ezen állandók bevezetésével láthatjuk, hogy az izotróp anyag esetében csak két független rugalmas állandó van.

Mendei Barna

3.3. Megjegyzések

Tudom, hosszú a tétel nagyon, de sokmindent kell hozzá tudni. Szerencsére nincsenek nagyon komoly matematikai bravúrok a levezetésekben. Ezt próbáltam érthetően leírni. Ha valami nem érthető, akkor érdemes meghallgatni, mit mondott Péter az adott részről.

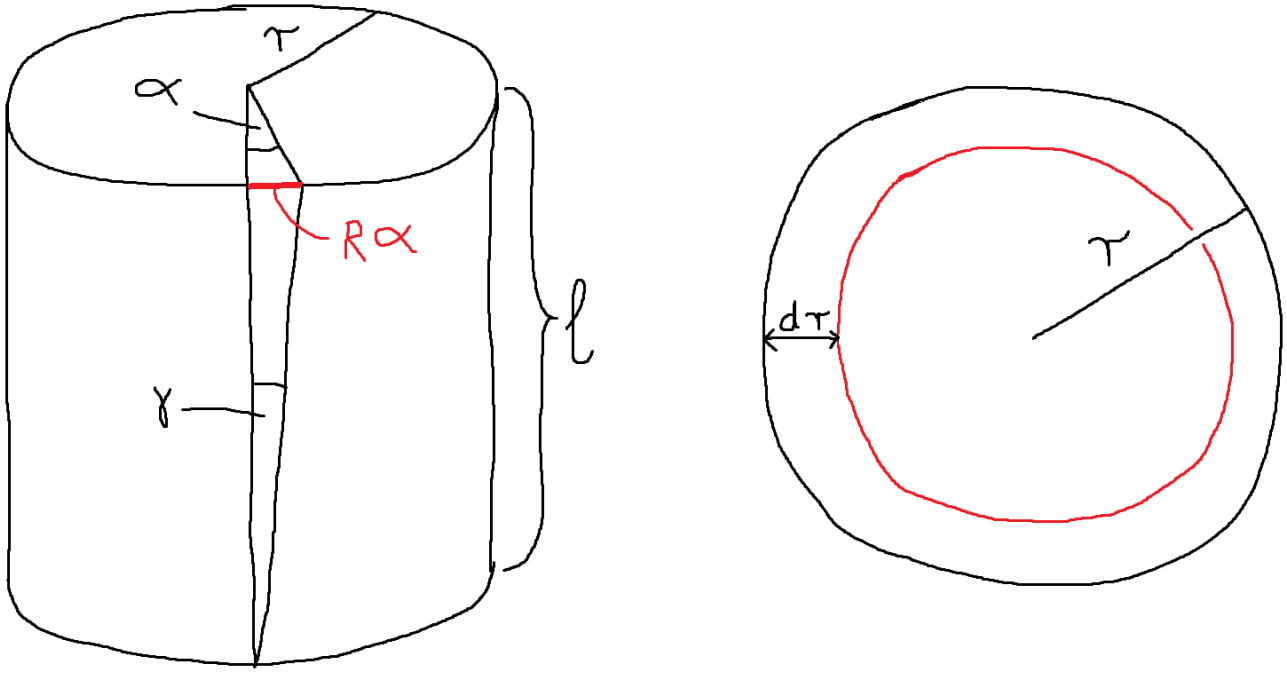
4. SPECIÁLIS DEFORMÁCIÓK

4.1. Ami kell

Csavarás; Lehajlás: neutrális zóna, másodrendű felületi nyomaték; Behajlás; Kihajlás; Maradandó alakváltozás és diszlokáció mechanizmus

4.2. Kidolgozás

Vegyünk egy r sugarú és l magas hengert és csavarjuk meg egy kicsit. Ennek paraméterei a baloldali ábrán látszanak:



Mivel α és γ is kicsi ezért γ a következőképpen írható föl:

$$\gamma = \frac{r\alpha}{l}$$

Térfogatváltozás nem történt, így ez egy γ szögű nyírással hozható analógiába, ahol $\tau = \mu\gamma$. Vizsgáljuk meg, hogy a jobboldalon látható gyűrűre mekkora erővel hatunk:

$$\mathrm{d}F = \tau \mathrm{d}A = \mu\gamma \cdot 2r\pi \mathrm{d}r = \mu\frac{r\alpha}{l} \cdot 2r\pi \mathrm{d}r$$

Az ezáltal keltett forgatónyomaték:

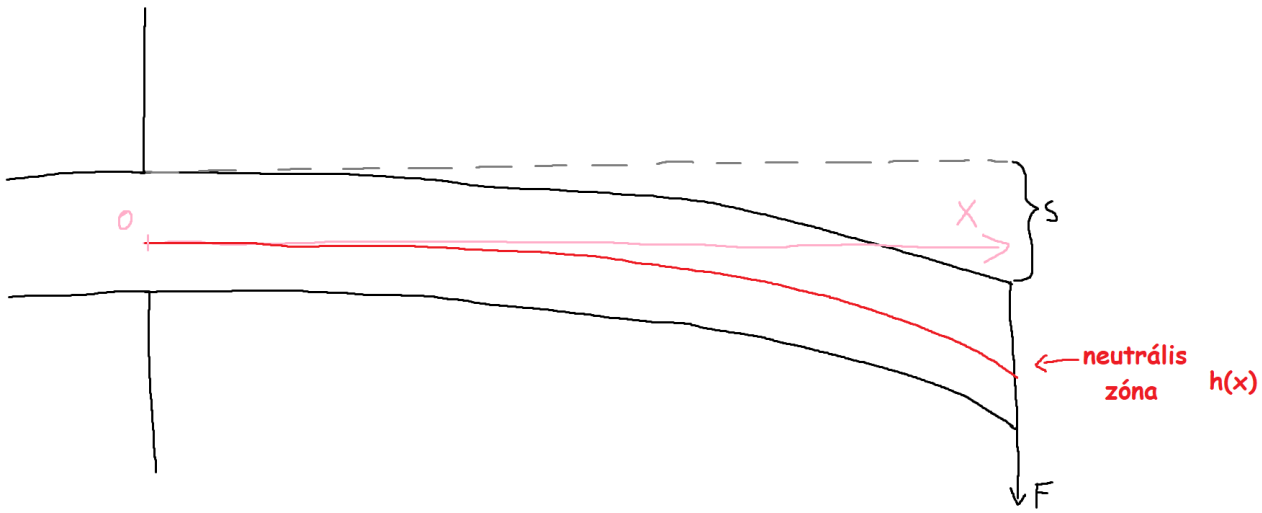
$$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}F = 2\pi\frac{\alpha}{l}\mu r^3 \mathrm{d}r$$

Ezt összegezve, illetve integrálva:

$$M = \int_0^R 2\pi\frac{\alpha}{l}\mu r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi\mu}{2l}R^4\alpha = D^*\alpha$$

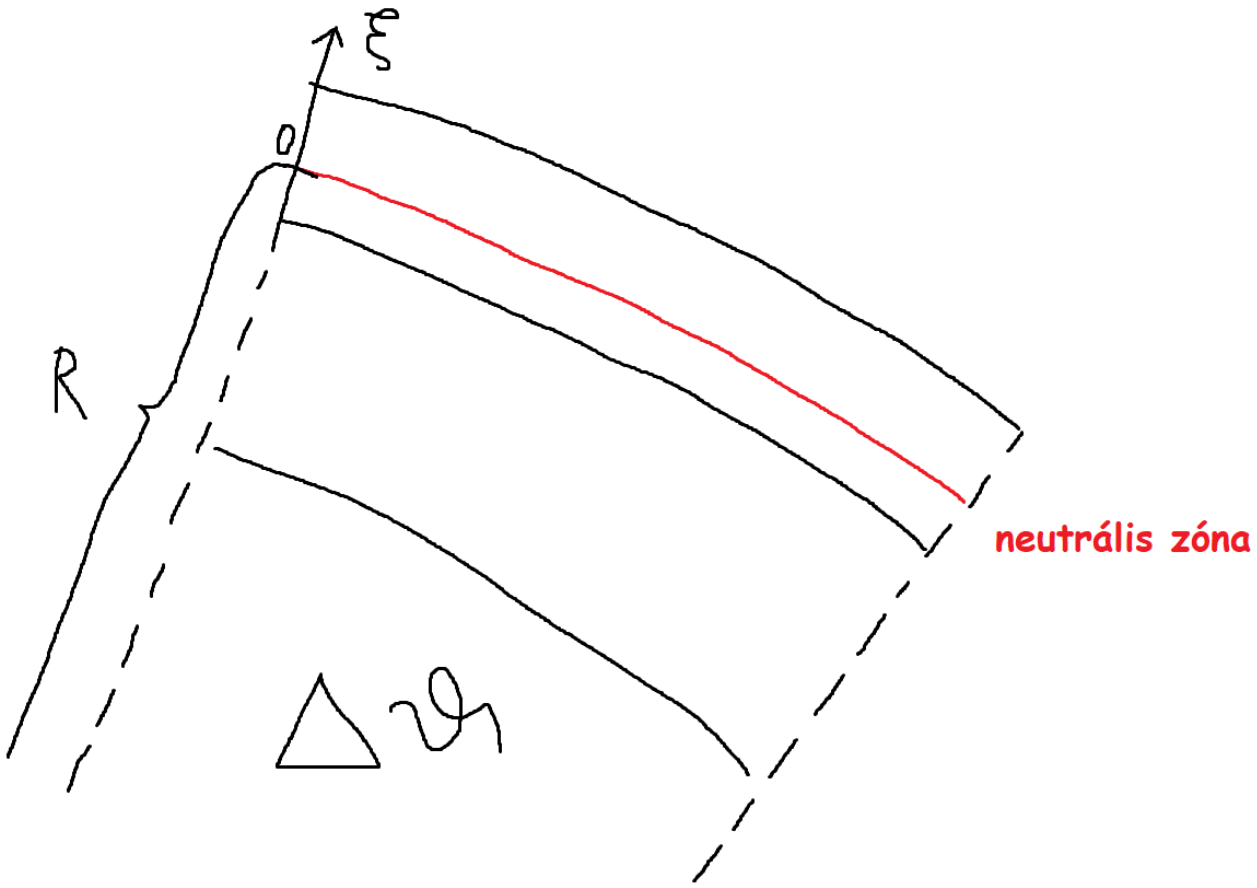
A bevezetett D^* a torziós modulus. Láthatjuk, hogy ez a sugár negyedik hatványával arányos. Ezt a tulajdonságot használjuk ki, amikor torziós szálat készítünk, mivel a nagyon vékony szálnak kicsiny a torziós modulusa.

Vizsgáljunk egy téglalap keresztmetszetű L hosszú rudat, mely egyik végét rögzítjük a másikra pedig erővel hatunk:



Látható, hogy a rúd az erő hatására lehajlik, így a vége lejjeb kerül s-sel. Definiáltuk még a neutrális zónát. Ez az a vonal a testben, melynek hossza a lehajlás következtében nem változik. Fölötte megnyúlik, alatta összenyomódik a rúd. Ennek alakját leírhatjuk egy $h(x)$ függvénnyel az ábrán látható x-tengelyt használva.

Most közelítsünk rá az elhajlított rúd egy rövid szakaszára (ahol $h(x)$ görbülete közel állandó):



A ξ = áll. egyeneltű görbék deformációja:

$$\varepsilon_{xx}(\xi) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(R+\xi)\Delta\vartheta - R\Delta\vartheta}{R\Delta\vartheta} = \frac{\xi}{R}$$

Vizsgáljuk meg az egyensúlyi helyzetet, ekkor az erők és a forgatónyomatékok eredője nulla!

„Vágjunk bele" a rúdba merőlegesen egy tetszőleges ponton és vizsgáljuk az így kialakult keresztmetszeten az erőket! Ennek egy kis felületi elemére ható erő x (rúd hosszával párhuzamos)-komponense:

$$\mathrm{d}F_x = \sigma_{xx}\mathrm{d}A = E\varepsilon_{xx}\mathrm{d}A$$

Így az egész keresztmetszetre ható eredőerő x-komponense, melynek nullának kell lennie:

$$\int_A E\frac{\xi}{R}\mathrm{d}A = 0$$

Ebből megadható a neutrális zóna helye a kiválasztott keresztmetszeten.

Az erők függőleges (y) komponensét a hajlító erő és a nyíró erők adják.

Az erők mellett vizsgálnunk kell még a forgatónyomatékokat is. Vegyük ismét az előbbi keresztmetszetet. Ennek és a neutrális zónának a metszéspontjára vett forgatónyomatékok:

$$\begin{aligned}\sum M_z &= 0\\ -F\cdot(L-x) + \int_A \mathrm{d}F_x\cdot\xi\mathrm{d}A &= 0\\ -F\cdot(L-x) + \int_A E\frac{\xi}{R}\xi\mathrm{d}A &= 0\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a neutrális zóna görbéjének görbületi sugara (annak reciproka) a következőképpen fehjezhető ki:

$$\frac{1}{R} = \frac{|h''(x)|}{(1+h'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Mivel az elhajlás mértéke igen kicsiny, ezért $h'(x)^2 \approx 0$, így

$$\frac{1}{R} \approx |h''(x)|$$

Ezt fölhasználva az előbbi forgatónyomaték integrálos tagja:

$$\int_A E\frac{\xi}{R}\xi\mathrm{d}A \approx E\cdot|h''(x)|\int_A \xi^2\mathrm{d}A = E\cdot|h''(x)|\cdot I$$

A bevezetett I mennyiség a másodrendű nyomaték, mely m^4 dimenziójú.
Így a következő differenciálegynlet adja meg a keresett $h(x)$ függvényt:

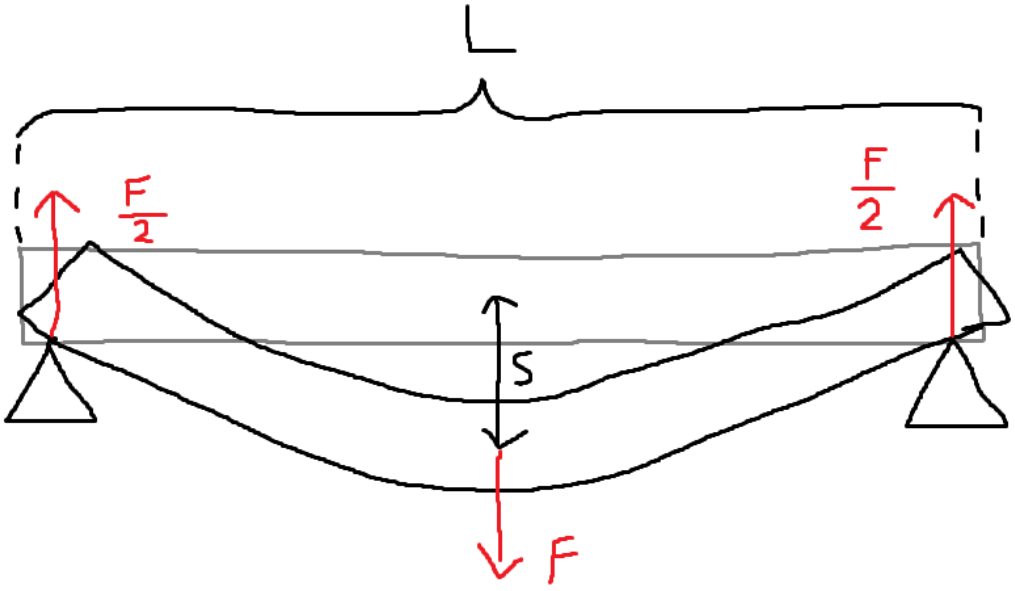
$$EIh''(x) = F(x-L)$$

A megfelelő peremfeltételek mellett egyszerű integrálással ez megoldható:

$$h(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2}\right)$$

$$s = |h(L)| = \frac{1}{3}\frac{L^3}{EI}F$$

Következőnek vizsgáljunk egy kétvégénél alátámasztott rudat:



A jelenséget behajlásnak nevezzük.
Erre hasonló módon meglehet oldani az előző egyenleteket és a következőt kapjuk:

$$s = \frac{1}{3}\frac{1}{EI}\left(\frac{L}{2}\right)^3 \frac{F}{2} = \frac{1}{48}\cdot\frac{L^3}{EI}F$$

Ehhez hasonló jelenséggel találkozhatunk, ha egy lapos testet hosszában összenyomunk:

Ez a kihajlás jelensége.
Ebben az esetben a külső összenyomó erő forgatónyomatéka $F \cdot h(x)$, tehát a megoldandó egyenlet:

$$F \cdot h(x) + EIh''(x) = 0$$
$$h''(x) + \frac{F}{EI}h(x) = 0$$
$$h''(x) + k^2 h(x) = 0$$

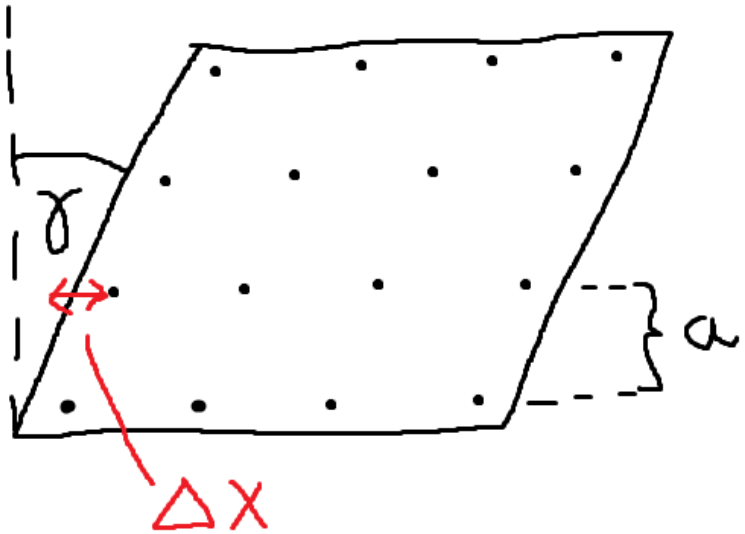
Ez a harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete, tehát:

$$h(x) = A\sin(kx + \varphi_0)$$

ahol k az úgynevezett hullámszám: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$
Határfeltételeink, hogy a test két végénél a kitérés nulla legyen. Ezt fölhasználva végtelen sok megoldást kapunk, mivel $h(L) = 0$ feltétel azt vonzza magával, hogy $kL = n\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$
Néhány megoldás:

- $n = 0$: $F_0 = 0$
- $n = 1$: $F_1 = EI\dfrac{\pi^2}{L^2}$ (ez az Euler-erő)
- $n = 2$: $F_2 = 4F_1$
- $\vdots$

Érdekes még megvizsgálni a fémek maradandó alakváltozásait. Ha egy fémhuzalt hosszában megnyújtjuk, akkor azt vehetjük észre hogy apró nyírásokkal valósul meg a maradandó alakváltozás.
Mekkora nyírófeszültségre van szükség, hogy a fémrács egyes rétegeit elmozdítsuk?



Az ábra alapján:

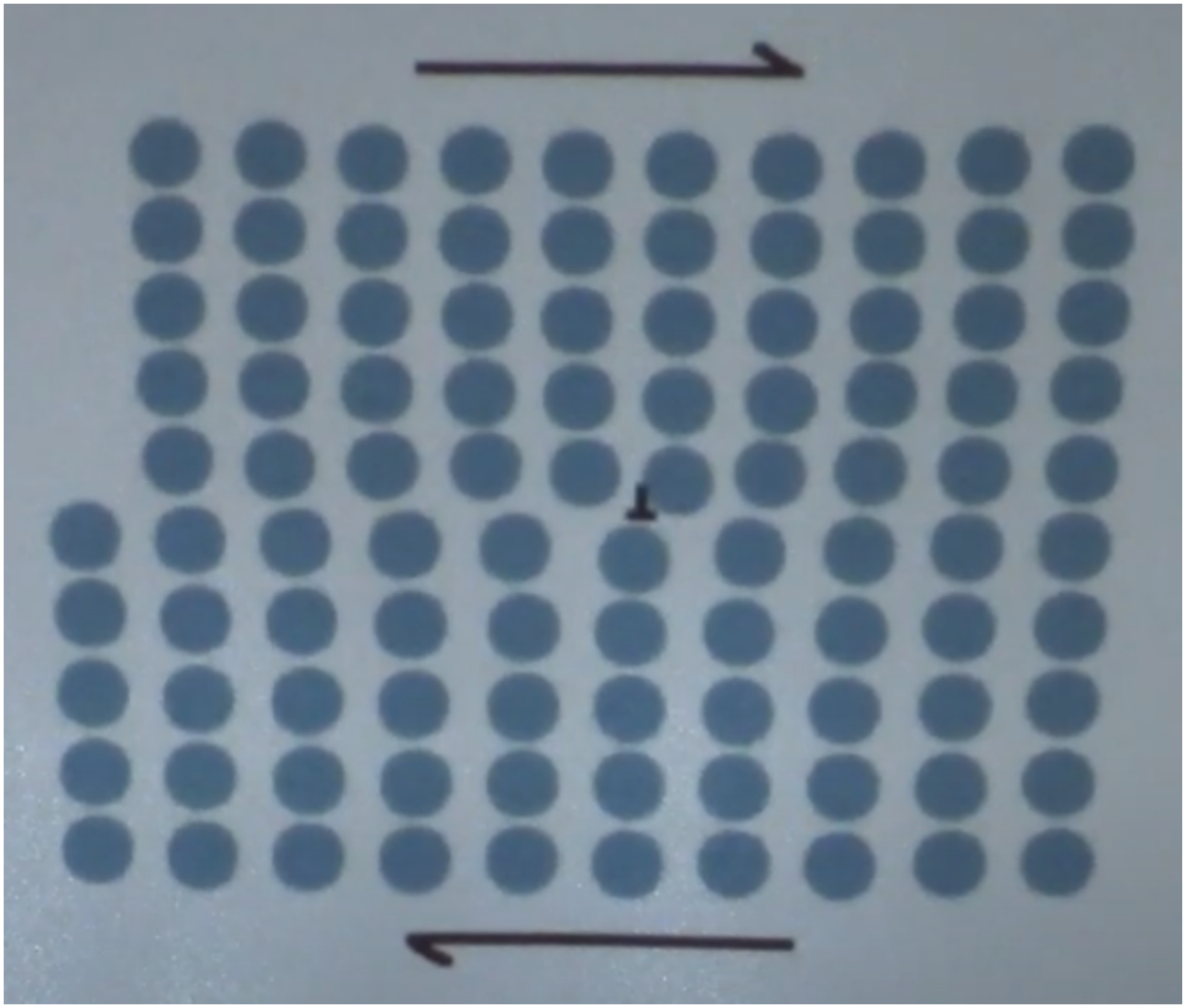
$$\gamma = \frac{\Delta x}{a} = \frac{\tau}{\mu} \Longleftrightarrow \tau = \frac{\mu}{a}\Delta x$$

A rendszer szimmetriája miatt $\tau = 0$-nak kell fennálnia, ha az egyes rétegeket egész, illetve fél rácsállandónyival toljuk el, tehát a $\tau(\Delta x)$ függvénynek szinuszosnak kell lennie:

$$\tau(\Delta x) = \frac{\mu}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{\Delta x}{a}\right)$$

Ebből τ_{max} elméleti folyásfeszültség körülbelül 10 GPa, de a kísérletek jóval kisebb értéket eredményeznek. (kb.: $10 - 100$ MPa)

Ennek okára 1936-ban jött rá egymástól függetlenül Orován, Taylor, és Polányi. Apró diszlokációk nyírófeszültség hatására elmozdulnak, mely hatására létrejön a maradandó alakváltozás. Ha egy diszlokáció végighalad a kristályon, akkor jön létre egy rácsállandónyi alakváltozás. Ezt jól szemlélteti a hatodik előadáson lejátszott animáció, ahol egy fordított T jelöli a diszlokáció helyét:



Mendei Barna

4.3. Megjegyzések

A diszlokációs részhez érdemes megnézni a hatodik előadás első tíz percét, mivel ez egy mesélősebb rész és Péter elég jól elmagyarázta ezt benne.

5. HIDROSZTATIKA

5.1. Ami kell

Hidrosztatikai nyomás; Pascal-törvény; Arkhimédész törvény; Forgó folyadék felszíne; Barometrikus magasságformula

5.2. Kidolgozás

Folyadékokról van szó, ezért a korábban bevezetett $\vec{u}(\vec{r})$ helyvektorokat már nem célszerű használni. Inkább érdemes a folyadékra egy kicsi ablakból ránézni, és egy kis résznek a sebességét vizsgálni. Így kapjuk a továbbiakban nagyon serényen használt $\vec{v}(\vec{r},t)$ sebességmezőt, ami függhet a helytől és az időtől. Továbbá fontos mennyiség a sűrűség $\rho(\vec{r},t)$ skalármező is. Ennek utóbbinak a hely és az időfüggése gázok esetén lesz nagyon fontos.
A hidrosztatikában a folyadék vagy gáz (angolul egyszóval 'fluid') nyugalomban van, nem mozog. Ez nagyon leegyszerűsíti a dolgokat, mert pl. nem fognak fellépni különböző súrlódások, nyírások. Így a továbbiakban az egyenleteinkben nagyon kényelmes közelítéseket tudunk majd csinálni.
Írjuk fel egy nyugvó folyadék feszültség tenzorát. Vegyünk egy pici $\mathrm{d}A$ Felületet. Az erre ható erő: $\mathrm{d}\vec{F} = \hat{\sigma}\mathrm{d}\vec{A}$. Az erő a folyadék nyomásából ered, így

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p(\vec{r}) & 0 & 0 \\ 0 & -p(\vec{r}) & 0 \\ 0 & 0 & -p(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

A mátrix diagonális, mivel nincsenek nyíróerők (a sztatika miatt), sem kitüntetett irányok. $p(\vec{r})$ a nyomás. Mértékegysége a Pascal (Pa). A feszültségtenzor ilyen alakú meghatározását szokás Pascal-törvénynek hívni. Pascal-törvény demonstrációra láttuk a Pascal-buzogányt. További megfogalmazása: Nyugvó folyadékban a nyomás minden irányban gyengítetlenül terjed, és nyugvó folyadékban nincsenek nyíróerők.
Mivel egyensúlyban van a sztatikus folyadék, kezelhető szilárd testként, így érvényes a $\mathrm{div}(\hat{\sigma}) + \vec{f} = 0$, ahol $\vec{f}$ a külső erők. Így $\mathrm{div}\ \hat{\sigma} = -\mathrm{grad}\ p$. Tehát a nyugvó folyadékok egyensúlyi feltétele:

$$\mathrm{grad}\ p = \vec{f}$$

Amennyiben a külső erő a gravitációból származik, akkor $\vec{f} = \rho g$, ahol g helyére behelyettesíthető $-\mathrm{grad}\ \Phi$. Így

$$\mathrm{grad}\ p = -\rho\ \mathrm{grad}\ \Phi$$

ρ-t vigyük be a gradiensbe. Ezt azért tehetjük meg, mert a folyadékot összenyomhatatlannak tekintjük, így a sűrűség nem fog függeni a helytől. $\rho = \rho_0 =$ áll. Ez víz esetén egy ésszerű feltételezés. (Nagyon pici a kompresszibilitás. Gázok esetén ez nem lenne igaz.) Így

$$\mathrm{grad}\ p = -\mathrm{grad}\ (\rho_0\Phi)$$

Tehát

$$p + \rho_0\Phi = p_0$$

ahol p_0 egy konstans, látható, hogy mértékegysége Pascal. (Ez az egyenlet a Pascal-törvény egyik legfontosabb következménye.) A nehézségi erőtér $\Phi = gz = -gh$, ahol h a vízmélység. Így

$$p = p_0 + \rho_0 g h \tag{1}$$

Így már látható, pontosan mi is p_0. Ő az a nyomás lesz, ami $h = 0$-nál van, tehát a légköri nyomás. $\rho_0 gh$ pedig a hidrosztatikai nyomás. Vegyük észre, hogy ez csak a mélységtől függ, a folyadékoszlop szélességétől nem!

Archimédész törvényének levezetéséhez vegyünk egy felül és alul A felületű, x magas hasábot, ami h mélységben van víz alatt. Archimédész törvénye azt állítja, hogy a rá ható felhajtó erő megegyezik a kiszorított víz súlyával. Írjuk fel rá 1. egyenletet. Amit felírunk, az a test tetején és alján a rá ható erő:

$$F_\mathrm{f} = \rho g(h+x)A - \rho g h A = \rho g x A = \rho g V$$

ahol V a test térfogata, és ρ a folyadék sűrűsége. És valóban ez a rá ható erő. De nézzük ezt meg egy nem ennyire speciális formára. Vegyünk egy tetszőleges alakú, V térfogatú testet. Az őrá ható erőket az alábbi egyenlet adja meg, amit azonnal a Gauss-tétellel át is alakíthatunk,

$$F_\mathrm{f} = \oint_\mathrm{F} \hat{\sigma}\ \mathrm{d}A = \int_\mathrm{V} \mathrm{div}\ \hat{\sigma}\ \mathrm{d}V$$

De mi div $\hat{\sigma}$-t már ismerjük:

$$= -\int_\mathrm{V} \rho g\ \mathrm{d}V = -\rho g V$$

Így egy teljesen általános testre is levezettük Archimédész-törvényét. Fontos megjegyezni, hogy ez nem csak akkor igaz, ha egy szilárd test van a folyadékban, akár egy folyadékrészre is felírható, akkor is igaz lesz. (Ez kísérleti tapasztalat.)

Bonyolítsuk életünket azzal, hogy nézzük meg mi történik egy forgó rendszerben. Viszgáljuk meg egy forgó folyadék felszínét. (Érdekesség: ezzel Newton is foglalkozott, a Principiának az angol fordításában a 81. oldalon ki is fejti. Angolul a jelenség neve is 'Newton's bucket'.)

Azzal, hogy forgatjuk a rendszert, egy új külső erő lép fel, a centrifugális erő. De előtte vizsgáljuk meg a víz felszínét, amikor még nem forgattuk. Tudjuk, hogy

$$p = p_0 - \rho_0 \Phi$$

De mivel mi most a vízfelszínen vagyunk, biztos, hogy $p = p_0$, hiszen p_0 a külső légköri nyomás. Tehát $\rho_0 \Phi = 0$, azaz $\Phi = 0$. Ebből az a lényeg, hogy a vízfelszín egy ekvipotenciális felület. Amikor forgatni fogjuk a vödröt, akkor is a vízfelszín egy ekvipotenciális felület lesz.

Na de akkor forgassuk meg az edényt. A centrifugális erő $F_\mathrm{c} = m\omega^2 \underline{r}$. Tehát így a külső erők:

$$\mathrm{grad}\ p = \underline{f} = \rho \underline{g} + \rho \omega^2 \underline{r}$$

ahol $\underline{r} = (x, y, 0)$. Ismét felírható a következő egyenlet:

$$\underline{f} = -\rho\ \mathrm{grad}\ \Phi = -\mathrm{grad}\ (\rho\Phi)$$

de most $\Phi = gz - \omega^2 \frac{x^2+y^2}{2} + C$. C egy integrációs konstans. Mi most a korábban említett ekvipotenciális felületet keressük, ami nem más, mint amikor a gradiens nulla. Tehát

$$\mathrm{grad}\ (p + \rho\Phi) = 0$$

Mivel a felszínre vagyunk kíváncsiak:

$$p + \rho\Phi = p_0$$

Ahol p_0 ismét a légköri nyomás. Mivel a felszínen vagyunk $p(x,y,z) = p_0$, tehát $\rho\Phi(x,y,z) = 0$. Ebből $gz = \omega^2 \frac{x^2+y^2}{2}$. Így:

$$z = \frac{\omega^2}{g}\frac{x^2+y^2}{2}$$

Ez egy forgás paraboloid egyenlete. Tehát a vízfelszín ekkor forgásparaboloid formát vesz fel. Ez ekvivalens azzal az állítással, hogy az ekvipotenciális felületek is forgásparaboloid alakúak.

Eddig olyan eseteket vizsgáltunk, ahol a sűrűség állandó volt. Viszont főként gázok esetében ez általában nem igaz. Írjuk fel az ideális gáz állapot egyenletét: $pV = \frac{m}{M}RT$. Kis átrendezgetés után $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T$. Jól láthatóan van valami kapcsolat ρ és p között. Viszont felbukkant egy új változó, a hőmérséklet, T. Közelítsük a problémát izotermikus úton, azaz vegyük T-t állandónak, ez nagyban megkönnyíti életünket. Így

$$\rho = \frac{M}{R}\frac{p}{T}$$

Most pedig írjuk fel, hogy nehézségi erőtérben hogyan változik a nyomás:

$$\text{grad } p = -\frac{M}{R}\frac{p}{T}\underline{g}$$

(Nem tettünk mást, mint behelyettesítettünk $\text{grad}(p) = -\rho\text{grad}(\Phi)$ egyenletbe.) Amit kaptunk, az egy differenciálegyenlet p-re. $\underline{g}$-nek csak z irányú komponense van, így

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{Mg}{RT}p$$

Ennek megoldása:

$$p(z) = p_0 e^{\frac{Mg}{RT}z}$$

Ezt hívjuk barometrikus magasságformulának. A lényege az, hogy a nyomás függ a magasságtól, méghozzá exponenciálisan. p_0 nem más, mint a felszínen a nyomás. Természetesen ez az összefüggés nagy magasságoknál már nem túl pontos, hiszen a feltételezés, hogy a hőmérséklet állandó akkor már nem lenne igaz.

Továbbá fontos észrevenni, hogy ez a nyomás függ a moláris tömegtől. Tudjuk, hogy $R = N_\mathrm{A}k_\mathrm{B}$, és $M = N_\mathrm{A}m$. Így a következőképp alakítható az egyenlet:

$$p(z) = p_0 e^{\frac{-mgz}{k_\mathrm{B}T}} = p_0 e^{\frac{E_\mathrm{pot}}{k_\mathrm{B}T}}$$

ahol az exponenciálisban lévő tag a Boltzmann-faktor.

5.3. Megjegyzések

Link a Principiához

Kadlecsik Ádám

6. MOLEKULÁRIS ERŐK

6.1. Ami kell

Felületi feszültség; A görbületi nyomás; Illeszkedési szög; Kapilláris jelenségek;

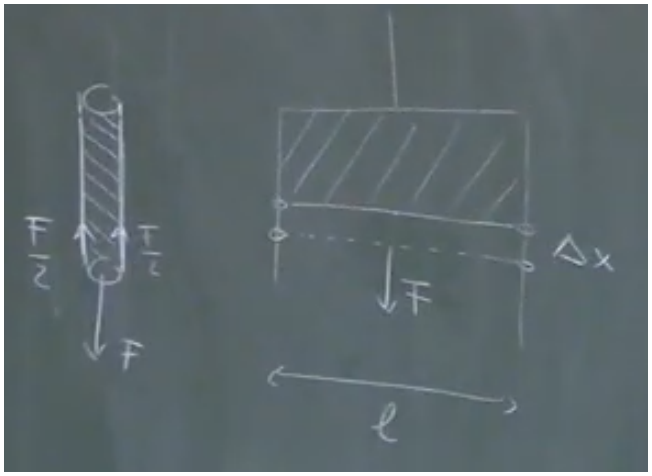
6.2. Kidolgozás

Felületi feszültség folyadékok felszínén tud kialakulni. Nagyon gyakran lehet vele találkozni, gondoljunk szappanbuborékokra, vagy a Balatonon a vízen chillelő molnárkákra.

Végezzünk egy kísérletet: Vegyünk egy keretet, melnyek az egyik oldala csúsztatható. A kereten belül hozzunk létre egy szappanhártyát. Azt tapasztaljuk, hogy a szappanhártja össze akarja húzni a keretet. Azaz ahhoz, hogy egy helyben tartsuk, ahhoz nekünk F erőt kell kifejtenünk. Kísérleti tapasztalatokból:

$$F = 2\alpha l$$

ahol α a felületi feszültség. $[\alpha] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$



1. ábra. Felületi feszültség. A bal oldali kép azt jelöli, hogy igazából két szappanhártyafelület van, nem egy, ezért szerepel az egyenletben egy 2-es szorzó.

Nézzük meg, mekkora munkát végez:

$$\Delta W = F \cdot \Delta x = 2\alpha l \Delta x = \alpha \Delta A$$

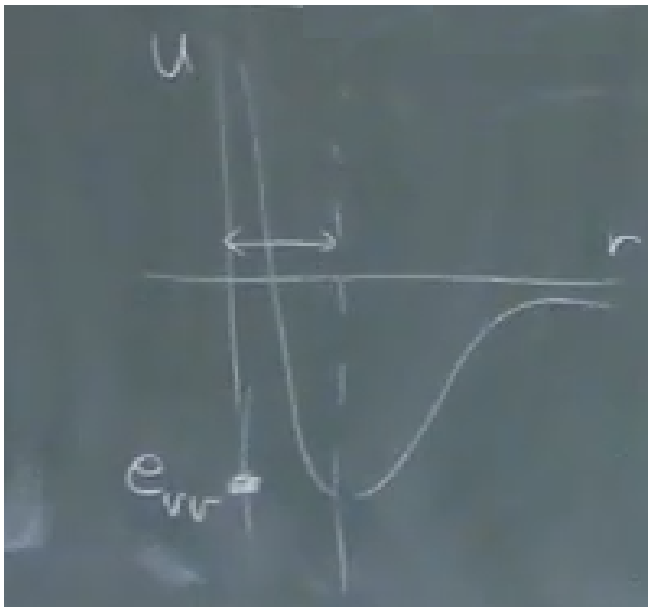
(Hiszen kettő ΔA felület van.) Tehát a munkatételből

$$\Delta E_{\mathrm{pot}} = \Delta W = \alpha \Delta A$$

Most már látjuk, pontosan mit is jelent ez a felületi feszültség: egységnyi felületre jutó potenciális energia. a mértékegységét is újraértelmezhetjük: $[\alpha] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}$.

Azt látjuk, hogy valamiért több potenciális energia jön abból, hogy az anyagnak felülete van. Nézzünk meg egy másik jelenséget:
Egy vizen úszó pénzérmét próbáljunk meg felemelni. Azt tapasztaljuk, hogy ahogy emeljük, a víz felülete az érme végeihez 'tapadva' húzza vissza azt. A víz részecskék között valami kölcsönhatásnak kell lennie. A vízmolekulák között valami vonzó erő van. Fel szokás rajzolni a

következő potenciál grafikont két molekula között:



2. ábra. Vízmolekulák közötti potenciál gödör.

Tehát van valamilyen távolság két atom között, ahol potenciál minimumban vannak. Magának az egész kád víznek a potenciális energiája:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} N n_{\text{sz}} e_{\text{vv}}$$

ahol N db. molekula van, n_{sz} db szomszéddal. Ez arányos V-vel. Viszont a felszínen lévő vízmolekuláknak kevesebb szomszédjuk van (mondjuk fele annyi), tehát hozzájuk kevesebb potenciál csökkenés tartozik. Vegyük ezt is figyelembe:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} N n_{\text{sz}} e_{\text{vv}} + N_{\text{f}} \frac{n_{\text{sz}}}{2} e_{\text{vv}}$$

és a második tag az A-val arányos. Pont ez jött ki az előbb is.
Tehát a folyadékok arra törekednek, hogy minél kisebb legyen a felületük, mivel nagyobb felülettel kisebb a potenciál csökkenésük. Ez az oka a felületi feszültségnek.

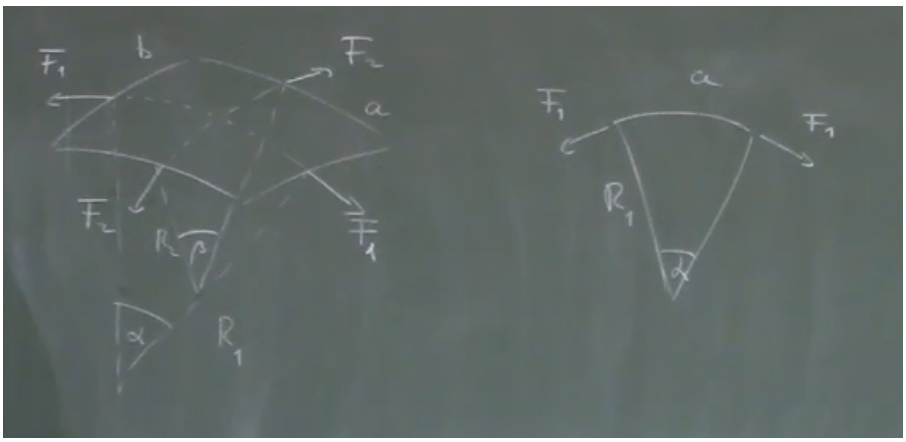
Vezessük le a görbületi nyomást általánosan. A 3 ábrán feltűntetem a használt mennyiségeket.
A felületet közelíthetjük két simulókörrel, az ábrán feltűntetett módon. Írjuk fel az eredő erőt (lefelé fog mutatni):

$$F_{\text{e}} = 2F_1 \sin\frac{\gamma}{2} + 2F_2 \sin\frac{\beta}{2}$$

Ha β és γ kicsik:

$$F_{\text{e}} = F_1\gamma + F_2\beta$$

Viszont mi F_1-et és F_2-t ismerjük, hiszen pont olyanok, mint amik a szappanhártyás keretnél voltak. Így:



3. ábra. A vizsgált felületrész. A jobb oldali kép az oldalnézet. Fontos!! Az ábrán az α-val jelölt szög az béna jelölés, a számolásban a helyett γ szerepel. (Mert α-val mást jelölünk.)

$$F_{\mathrm{e}} = \alpha b \frac{a}{R_1} + \alpha a \frac{b}{R_2} = \alpha a b \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Így megkaptuk Laplace I. törvényét:

$$\Delta p = \frac{F_{\mathrm{e}}}{A} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Ez azt adja meg, hogy görbe felületnél mekkora a túlnyomás. Vegyük észre, hogy minél görbébb a felület, (azaz minél kisebbek a sugarak) annál negyobb ez a túlnyomás. Ezt tapasztalhatjuk akkor, amikor például egy lufit fújunk fel. Ahogy tágul, egyre könnyebb fújni. Illetve erre kísérletet láttunk. Egy cső két végén különböző méretű szappanbuborékok voltak. Azt tapasztaltuk, hogy a kisebb még jobban összement, a nagyobb pedig kitágult.

Kísérleti tapasztalat, hogy egy vízcsepp egy üvegen hegyesszöget zár be az üveggel, míg például egy higanycsepp inkább golyóbis formát vesz fel, azaz tompaszöget zár be. Nézzük meg, hogy miért.
A 4. ábrán láthatunk egy vízcseppet üvegen. Vizsgáljuk a 'bal sarkot'. Három réteget látunk: üveg-víz, üveg-levegő és víz-levegő. Mindhárom rétegen alakul ki felületi feszültség. Hiszen például a vízmolekulák még mindig kevésbé szeretnek üveg részecskék közelében lenni, mint vízmolekula barátaik körében. Tehát a sarokban mindhárom felület irányában hatni fog felületi feszültségből származó erő.

A felülettel bezárt szöget φ-vel jelöljük. Mivel egyensúly van, érvényes a következő egyenlet:

$$F_{\mathrm{ül}} = F_{\mathrm{vü}} + F_{\mathrm{vl}} \cos \varphi$$

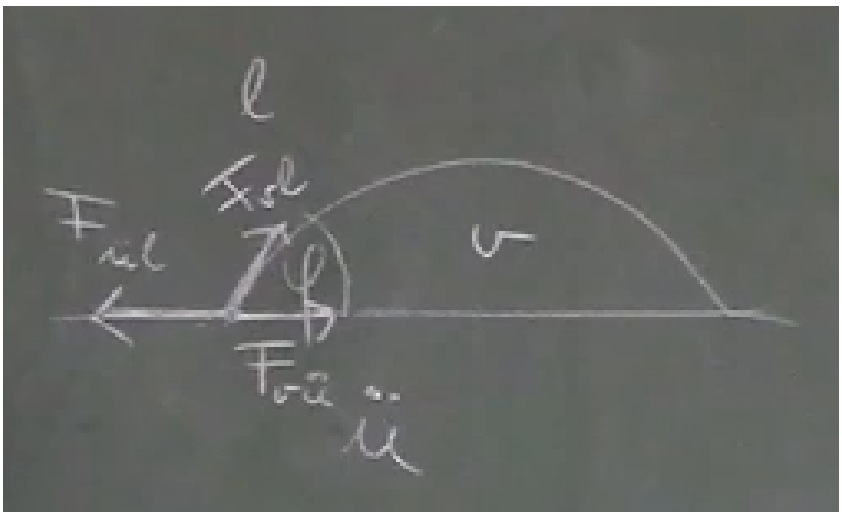
Az erők heylére behelyettesíthetjük a felületi feszültség egyenletét.

$$\alpha_{\mathrm{ül}} \Delta l = \alpha_{\mathrm{vü}} \Delta l + \alpha_{\mathrm{vl}} \Delta l \cos \varphi$$

Δl itt most olyan értelmet nyer, mintha picit arrébb vittük volna azt a pontot. De azonnal le is egyszerűsíthetünk vele:

$$\alpha_{\mathrm{ül}} = \alpha_{\mathrm{vü}} + \alpha_{\mathrm{vl}} \cos \varphi$$

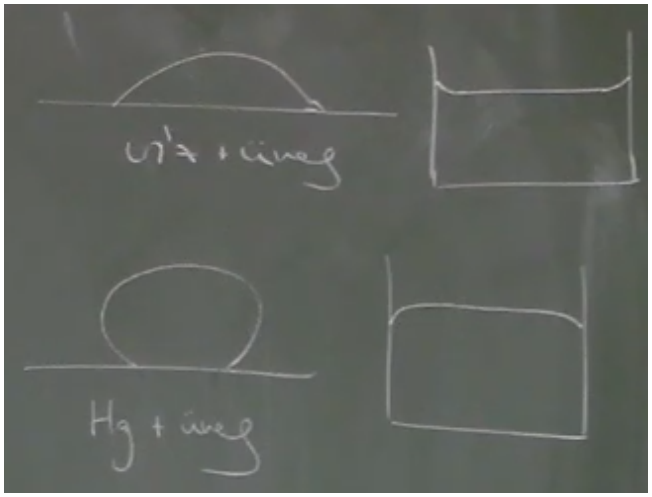
Ebből



4. ábra. Illeszkedési szög levegő, víz és üveg között. Milyen pontra hatnak az erők? Nincs értelme a kérdésnek. $F = -\text{grad}\, U$. És itt is ezt jelenti az erő: ha azt a pontot arrébb vinnem egy picit, akkor ennyivel változna meg az energiája.

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_{\text{ül}} - \alpha_{\text{vü}}}{\alpha_{\text{vl}}}$$

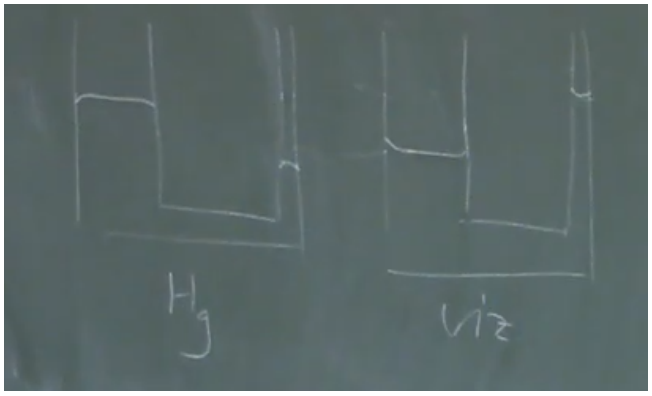
Megkaptuk Laplace II. törvényét. Nézzük meg, mit kaptunk! Ha $\alpha_{\text{ül}} > \alpha_{\text{vü}}$, akkor $\cos\varphi > 0$, tehát $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Tehát hegyesszöget kapunk. Ez a víz és üveg esete. Fizikailag azt jelenti, hogy az üveg-levegő határhoz nagyobb energia tartozik, mint az üveg-víz határhoz. Azaz, a víz nedvesíti a felületet. A felület 'örül', ha vizes.
Ha $\alpha_{\text{ül}} < \alpha_{\text{vü}}$, akkor $\cos\varphi < 0$, tehát $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Ekkor tompaszöget kapunk, ez van például higany-üveg esetén. A higany nem nedvesíti a felületet.
Ezt a jelenséget akkor is látjuk, amikor egy üvegpohárban van a folyadék. (5. ábra.)



5. ábra. Különböző illeszkedési szögek.

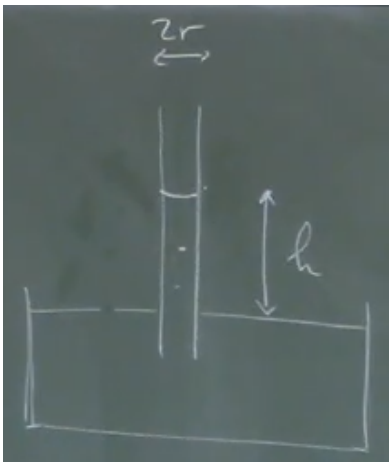
A felületi feszültség nem csak akkor releváns, amikor folyadék érintkezik szilárd anyaggal. Például a felületi feszültség miatt van az is, hogy ha olajat cseppentünk a vízfelszínre, az hatalmas területen fog szétfolyni.

Vizsgáljuk meg a kapillaritást, azaz a hajszál csövességet. A példa ismét víz és higany lesz (6. ábra.)



6. ábra. Kapillaritás különböző anyagoknál.

Azt tapasztaljuk, hogy a víz a keskenyebb csöben magasabban állapodik meg, míg a higany a vékonyabb csőben alacsonyabban áll. Ez a jelenség kéz-a-kézben jár a korábban tárgyalt jelenséggel: a víz benedvesíti az üvegfelületet, mig a higany nem. A 7. ábrán ez még jobban látszik.



7. ábra. Víz kapillaritása.

A víz ahhoz, hogy minél nagyobb területű üveget tudjon benedvesíteni, felkúszik a vékony csőben. Bár így magasabban van, az össz energiája így még mindig alacsonyabb lesz, mivel kisebb felülete érintkezik levegővel, és több üveggel. Írjuk fel a potenciális energia változást, ami amiatt van, mert a víz magasabbra került:

$$\Delta E_{\text{pot}} = \rho r^2 \pi h g \frac{h}{2}$$

ahol $m = \rho r^2 \pi h$ a csőben lévő víz tömege. Most pedig írjuk fel a megnőtt víz-üveg határfelület miatti energia csökkenést:

$$\Delta E_{\text{felület}} = (\alpha_{\text{vü}} - \alpha_{\text{ül}})\, 2r\pi h$$

Ha összeadjuk ezt a két energia változást, akkor megkapjuk, összesen mennyivel változott a víz energiája azzal, hogy h magasságra felkúszott ebben a csőben.

$$\Delta E(h) = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{felület}}$$

Mi ennek keressük a szélsőértékét. Ahhoz, hogy megtaláljuk, egyszerűen lederiváljuk, és annak keressük a zérushelyét:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta E(h)}{\mathrm{d}h} = \rho r^2 g h \pi + (\alpha_{\text{vü}} - \alpha_{\text{ül}})\, 2r\pi = 0$$

Ebből az egyenletből a kapilláris emelkedés kifejezhető:

$$h = \frac{2\,(\alpha_{\text{vü}} - \alpha_{\text{ül}})}{\rho g r}$$

Behelyettesíthetjük a nemrég levezetett Laplace II. törvényét, így egy másik alakban is felírható az egyenlet:

$$h = \frac{2\alpha_{\text{vl}} \cos\varphi}{\rho g r}$$

Érdekesség, hogy mind a fák, mind például a szivacs ezen elv alapján működik.

6.3. Megjegyzések

Itt annál az egyenletnél, amelyiknél úgy írjuk le az egész kád víz potenciálját, hogy a felszínen lévő molekulákat is figyelembe vesszük, ott párakat zavarhat, hogy a második tagba nem írtunk $\frac{1}{2}$-es szorzót. Maga az $\frac{1}{2}$-es szorzó az első tagban azért van, hogy ne vegyük a molekula párokat kétszer, csak egyszer. Viszont amikor csak a felszínieket nézzük, akkor vannak felszíni-felszíni párok, és felszíni-belső párok. Tehát itt akkor valamilyen 0.8-as szorzó kellene, vagy valami. De ez az egész dolog inkább ilyen 'kamuzás', a lényeg az az, hogy az első tag V-vel arányos, a második tag A-val, és az első taggal tud lekötődni több energia, ezért A minimalizálódik.

Kadlecsik Ádám

7. IDEÁLIS FOLYADÉKOK ÁRAMLÁSA

7.1. Ami kell

Áramlások típusai; Az áramlások matematikai leírása; Kontinuitási egyenlet; Áramlási cső; Bernoulli-törvény folyadékokra; Magnus-effektus; Torricelli ill. Bunsen-féle kiömlési törvények

7.2. Kidolgozás

Folyadékokról van szó, ezért a korábban bevezetett $\vec{u}(\vec{r})$ helyvektorokat már nem célszerű használni. Inkább érdemes a folyadékra egy kicsi ablakból ránézni, és egy kis résznek a sebességét vizsgálni. Így kapjuk a továbbiakban nagyon serényen használt $\vec{v}(\vec{r},t)$ sebességmezőt, ami függhet a helytől és az időtől.

Áramlásoknak több típusa van. Először is megkülönzöztethetünk súrlódásos és súrlódás mentes áramlást. Súrlódás mentes áramlás ideális folyadékban szokott lenni. Természetesen a valóságban ilyen nem nagyon létezik.
Megkülönböztethetünk örvényes és örvénymentes áramlást, melynek elnevezései önmagukért beszélnek. Örvénymentes áramlásnál a következő egyenlet áll fenn: $\Gamma = \oint \underline{v}\ \mathrm{d}\underline{r} = 0$, ahol Γ az örvényességet jellemzi.
Különbséget teszünk lamináris és turbulens áramlások között. Lamináris áramlás során az egyes áramlások egymás mellett rendezetten helyezkednek el, míg turbulens áramlásoknál össze-vissza kaotikusan is előfordulhatnak.
Végül létezik stacionárius és nem stacionárius áramlás. A stacionárius áramlás időben állandó.

Az áramlások leírásához a következő mennyiségek adottak: $p(\underline{r},t)$, $\underline{v}(\underline{r},t)$ és $\rho(\underline{r},t)$ mezők. Ezek azt adják meg, hogy adott helyen, adott pillanatban mi a sebesség, nyomás, vagy sűrűség. Ezek között szeretnénk kapcsolatokat találni.

A kontiunitási egyenletek lényege dióhélyban az, hogy ami befolyik, az ki is fog folyni. Szebben megfogalmazva egy felületen egységnyi idő alatt beáramló anyagmennyiségnek meg kell, hogy egyezzen a felületen belül lévő anyag koncentrációjának a megváltozásával. Ezt nem csak anyagokra lehet felírni, de pl. töltésekre is. Vezessük le a kontiunitási egyenletet anyagra!
Legyen egy A felületünk, aminek pici $\mathrm{d}A$ felület elemein Δt idő alatt $\mathrm{d}m$ tömegű anyagmennyiség áramlik át, $\underline{v}$ sebességvektorral. Legyen $\underline{n}$ a felület normálvektora, így $\mathrm{d}m = \rho\ \mathrm{d}A(\underline{vn})\Delta t$, ahol a felületelemvektort bevezetve:

$$\mathrm{d}m = \rho \underline{v} \mathrm{d}\underline{A} \Delta t$$

ahol $\rho\underline{v} = \underline{j}$ az áramsűrűség. Így az egész felületen a tömegváltozás:

$$\Delta m = -\oint_{\mathrm{A}} \rho \underline{v}\ \mathrm{d}\underline{A} \cdot \Delta t$$

(Negatív előjel, mert csökken a tömeg.) Az össz tömeg $m = \int_{\mathrm{V}} \rho\ \mathrm{d}V$. Ennek az idő szerinti megváltozása:

$$\dot{m} = \int_{\mathrm{V}} \dot{\rho}\ \mathrm{d}V$$

Az első egyenletet 'leosztva' Δt-vel, ott is megkapjuk $\dot{m}$-et, tehát a következő reláció áll fenn:

$$\int_{\mathrm{V}} \dot{\rho}\, \mathrm{d}V = -\oint_{\mathrm{A}} \rho \underline{v}\, \mathrm{d}A$$

A Gauss-törvény segítségével átírható differenciális alakra:

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}\ (\rho \underline{v}) = 0$$

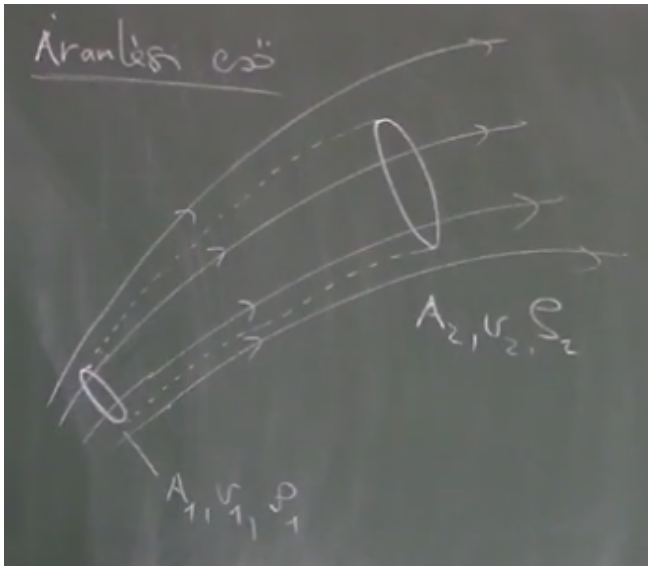
ahol $\dot{\rho} = \frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t}$. Ez a kontiunitási egyenlet differenciális alakja.

Nézzük meg a korábban említett stacionárius áramlás esetét. Ekkor a sebességmező az időben állandó, azaz az egyenlet a következőképp alakul:

$$\mathrm{div}\ (\rho \underline{v}) = 0$$

Ilyen áramlásokat ábrázolni a legkönyebb áramvonalakkal. Fontos, hogy ebben az egyenletben még nem szerepel a folyadék összenyomhatatlansága. Amennyiben az a kitétel is élne, ρ is eltűnhetne a divergenciából.

A kontiunitási törvénynek van egy érdekes következménye stacionárius áramlásra. Vegyünk egy áramlási csövet, aminek átmérője térben változik. (8. ábra.) Írjuk fel erre a már erre az esetre egyszerűsített kontiunitási egyenletünket:



8. ábra. Áramlási cső szemléltetése.

$$\mathrm{div}\ (\rho \underline{v}) = 0$$

Ennek integrál alakja:

$$\oint_{\mathrm{A}} \rho \underline{v}\, \mathrm{d}\underline{A} = 0$$

Az ábrán feltűntetett jelölésekkel a következőt kapjuk:

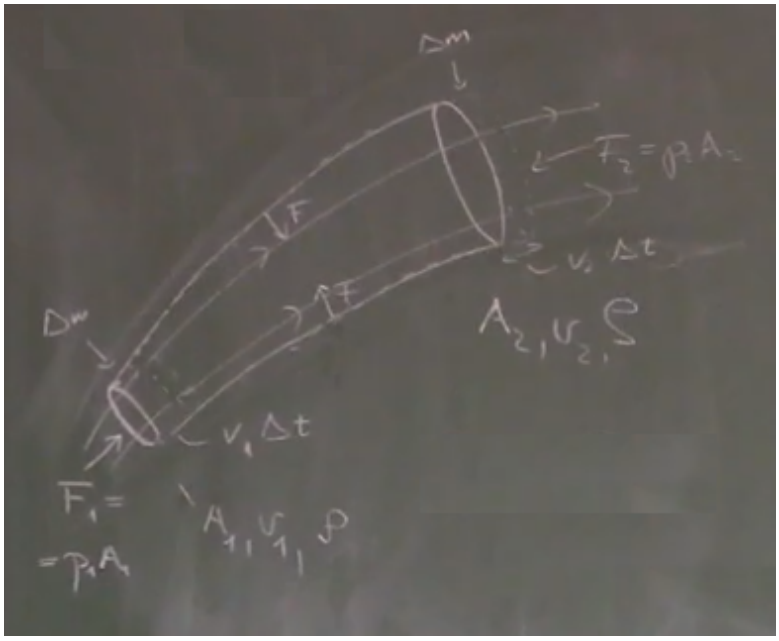
$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Ez a kontiunitási egyenlet áramlási cső esetén. Amennyiben a folyadék összenyomhatatlan, akkor $\rho_1 = \rho_2$, tehát egyszerűsíthetünk:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Ebből azt olvashatjuk le, hogy ha nő a keresztemtszet, akkor csökken a sebesség, ha csökken a keresztmetszet, akkor nő a sebesség. Jó példa erre a csapból kifolyó víz. A vízsugár egyre keskenyebb lesz, ahogy egyre gyorsabban folyik a víz.

Viszont eddig nem beszéltünk nyomásokról, hozzuk be ezt is a buliba. Vegyük újra az áramlási csövünket, és írjuk fel rá a munkatételt. $W = \Delta E$. A munka lehet külső erőből származó W_k, vagy belső erőből származó W_b. Viszont mi most a folyadékrészecskéket kis billiárdgolyóknak fogjuk tekinteni, nem gumilabdáknak, illetve a folyadékot is összenyomhatatlannak tekintjük, így $W_\mathrm{b} = 0$. Tehát $W = W_\mathrm{k}$
Az energia megváltozás lehet kinetikus ΔE_k és potenciális ΔE_p.
Azt csináljuk, hogy ránézünk erre az áramlási csőre most, és Δt idő múlva. Ugyan azt fogjuk látni (hiszen az áramlás stacionárius), viszont ami 0 pillanatban anyag ott volt, az kicsit odébbment. Azt a mennyiséget, amennyi kicsit odébbment a két végénél, annak a tömegét jelöli Δm.



9. ábra. Az egyes mennyiségek feltüntetése.

Írjuk fel ΔE_k-t.

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

ahol $\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$, hiszen használhatjuk az előbb levezetett kontiunitási egyenletet összenyomhatatlan folyadékra.

ΔE_p nem más, mint a potenciálkülönbségekből származó energia különbség:

$$\Delta E_\mathrm{p} = (\Phi_1 - \Phi_2)\Delta m$$

Adjuk meg W_k-t, a külső erők munkáját. Egyrészt hatnak az áramlási cső két végénél erők (lásd ábra), másrészt a palást oldalára is hathatnak valamilyen erők. Viszont a palástra ható erők merőlegesek az elmozdulásra, így azok itt nem játszanak szerepet.

$$W_{\mathrm{k}} = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \Delta m$$

Most, hogy minden megvan, írjuk be ezeket a munkatételbe:

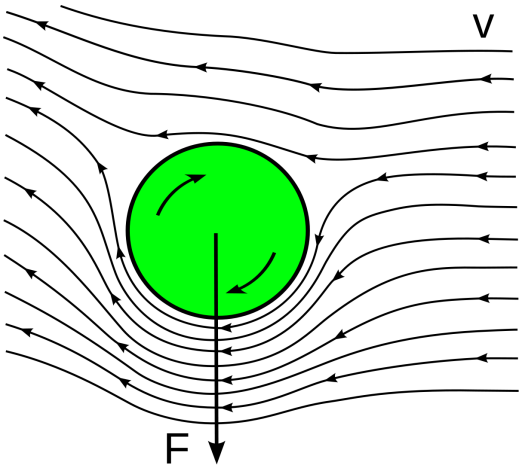
$$\frac{p_1}{\rho} + \Phi_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \Phi_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

Tehát

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \Phi = \text{áll.}$$

Ez Bernoulli-törvénye. Ez csak ideális, súrlódásmentes, összenyomhatatlan folyadékokra igaz. Ebből például azt lehet leolvasni, hogy általánosságban egy áramlásnál, ahol gyorsabban áramlik az anyag, ott kisebb a nyomás, míg ahol lassabban, ott nagyobb.

Nézzük meg Bernoulli-törvényének pár következményét. Először nézzük a Magnus-effektust.



10. ábra. A Magnus-effektus szemléltetése.

Ha egy forgó test egy 'fluid' áramlatban van, akkor hozzá képest a két végénél a 'fluid' más sebességekkel áramlik. Egyik végénél gyorsabban, mint a másik. Amelyik oldalt gyorsabban áramlik, ott lecsökken a nyomás, míg a másik oldalt megnő, így a kisebb nyomás irányába erő fog rá hatni. Áramlásoknál ilyen sebességkülönbségekből eredő nyomáskülönbségek miatti erőket szokás 'Bernoulli-szívásnak' is nevezni.

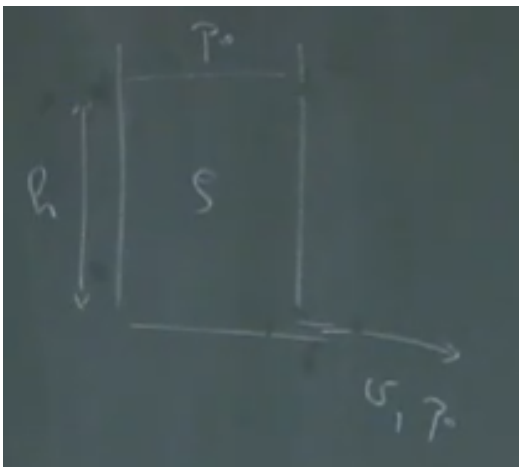
Továbbá nézzünk meg két kiömlést is. Először vegyünk egy kádat, aminek a falán alul van egy lyuk, ahol ki tud folyni a folyadék. Írjuk fel Bernoulli törvényét a kádban lévő folyadék tetejére, és a lyukra.

$$\frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

(A kád tetejénél a sebességet 0-nak tekintjük.) Ebből

$$v = \sqrt{2gh}$$

Ez a Toricelli-féle kiömlési törvény. Vegyük észre, hogy ez pont akkora sebesség, mintha h magasságból esett labdának néztük volna a sebességét.



11. ábra. Toricelli-féle kiömlési törvény.

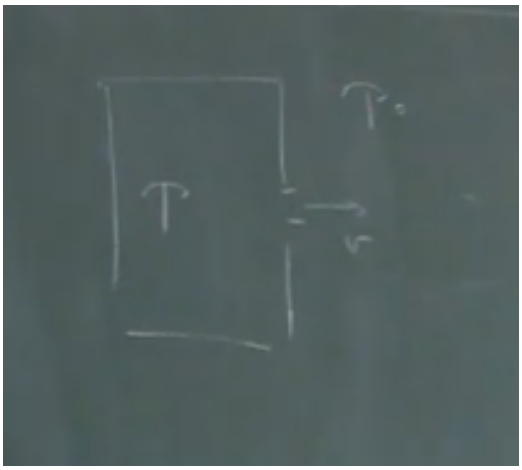
Most nézzünk egy másik dobozt, amiben a nyomást tekinstük állandónak, és az oldalán van a lyuk. Erre is írjuk fel Bernoullit: (belül a nyomás p, a sebesség 0.)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

Ebből

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p - p_0)}$$

Ez például egy kilyukasztott lufiból kiáramló levegő pillanatnyi sebességét tudja leírni Ez a Bunsen-féle kiömlési-törvény.



12. ábra. Bunsen-féle kiömlési törvény.

7.3. Megjegyzések

Kadlecsik Ádám

8. SÚRLÓDÓ FOLYADÉKOK ÁRAMLÁSA

8.1. Ami kell

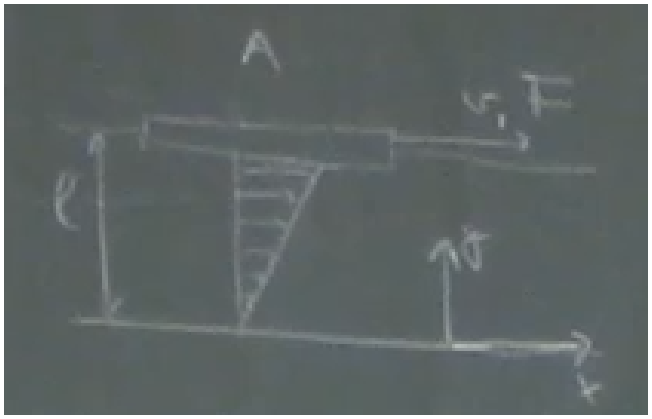
Viszkozitás fogalma; Newton-féle viszkozitási törvény; Feszültségtenzor viszkózus folyadékokban; Folyadékok mozgásegyenlete; Navier-Stokes-egyenlet; Lamináris és turbulens áramlás; Reynolds-szám; Bernoulli-törvény általános levezetése; Stacionárius lamináris áramlás csőben; Hagen-Poiseuille-törvény

8.2. Kidolgozás

Ennek a tételnek az értelmezéséhez szükséges az 5. és 7. tétel ismerete, mivel sok ottani elnevezést, ott definiált dolgokat fogok használni, mert ha mindezt újra kéne definiálnom, akkor ez a tétel 42 oldal lenne.

Eddig súrlódásmentes folyadékokat vizsgáltunk, most súrlódó folyadékokról lesz szó, és bevezetésre kerül a viszkozitás, mint fogalom. Ennek a két folyadéktípusnak a matematikai leírása ég és föld, mivel egyenleteink (és egyben a hidrodinamikai jelenségeink) a súrlódások miatt hatványozottan bonyolultabbá válnak. Feynman vezetett be találó neveket ezen két folyadéktípusra: száraz és nedves víz. A száraz víz a súrlódásmentes vízre utal, hiszen azzal a modellel pont a víznek a vizességét, a viszkozitását hanyagoljuk el. Most ezt nem fogjuk megtenni, nedves vízzel fogunk foglalkozni.

Korábban láttuk, hogy szilárd anyagoknál a feszültségtenzor a deformációtól függ. Folyadékoknál ez nem igaz, ugyanis itt nem $\hat{\varepsilon}$-tól, hanem annak idő szerinti deriváltjától függ.
Nézzünk egy kísérleti példát. Egy edényben egy viszkózus folyadékon úszó deszkát a felszínen húzunk.



13. ábra. Newton-féle viszkozitási törvény szemléltetése.

Azt látjuk, hogy ahogy mozgatjuk a folyadék tetején a deszkát, úgy a folyadék hozzá tapadva mozog vele, és ahogy egyre mélyebbre megyünk, az ábrán látható módon csökken a sebessége, majd a tányér alján a falhoz képest áll. Így a folyadék sebességére a következő egyenlet áll fenn: $v_{\mathrm{x}} = \frac{y}{l}v$. Lineárisan függ a mélységtől.
Kísérleti tapasztalatokból, mérésekből adódik a következő egyenlet:

$$F = \eta \frac{vA}{l}$$

Ahol η valamiféle arányossági tényező. (Ő lesz a viszkozitás.) Ez a Newton-féle viszkozitási törvény. Mi η dimenziója? A nyírófeszültség:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{v}{l}$$

τ Pascal dimenziójú, így $[\eta] = Pa \cdot s$. Az egyenlet továbbírható:

$$\tau = \eta \frac{\partial v_{\mathrm{x}}}{\partial y}$$

És szilárd testeknél a disztorziónak az 12-es nyíró komponensére tanultuk:

$$\beta_{12} = \frac{\partial u_{\mathrm{x}}}{\partial y}$$

aminek az idő szerinti deriváltja:

$$\dot{\beta_{12}} = \frac{\partial v_{\mathrm{x}}}{\partial y}$$

Ez pedig beírható a korábbi egyenletünkbe. Így:

$$\tau = \eta \cdot \dot{\beta_{12}}$$

Ez pont egy nyírás, nagyon hasonlít, mint ami szilárd anyagoknál volt. Ha felidézzük a nyírásoknál felírt $\hat{\sigma}$, $\hat{\beta}$ és $\hat{\varepsilon}$ tenzorokat, akkor a következőt kapjuk:

$$\sigma_{12} = \tau = 2\eta \cdot \dot{\varepsilon_{12}}$$

A lényeg az az, hogy ilyen folyadékokban nyírásoknál a σ_{12} kapcsolatba kerül ε_{12} deriváltjával úgy, hogy a viszkozitás, mint egy együttható lép fel. Tehát σ_{12} nem ε_{12}-vel arányos, hanem $\dot{\varepsilon_{12}}$-val.

Vezessük le a súrlódó folyadékok mozgásegyenletét. Szilárd testeknél igaz volt a következő egyenlet:

$$\rho \underline{\ddot{u}} = \mathrm{div}\ \hat{\sigma} + \underline{f}$$

Ebből fogunk kiindulni. Először vizsgáljuk meg a feszültség tenzort. Az előbb láttuk, hogy ez folyadékok esetében más lesz, mint szilárd testeknél, hiszen $\dot{\hat{\varepsilon}}$-tól is függeni fog. $\hat{\sigma}(\hat{\varepsilon}, \dot{\hat{\varepsilon}})$. Newtoni folyadékoknál a következő mód felyezhető ki:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \hat{\sigma}'(\dot{\hat{\varepsilon}})$$

$\hat{\sigma}$ változói szétszedhetőek ezen módon. Az első tag már volt hidrosztatikánál, és ez nem függ sem $\hat{\varepsilon}$-tól, sem $\dot{\hat{\varepsilon}}$-tól. A második tagban a ' nem deriváltra utal, csak megkülönböztetés miatt van ott. A lényeg az, hogy $\hat{\sigma}'(\dot{\hat{\varepsilon}})$ egy lineáris kapcsolat, ettől lesz Newtoni a folyadék. Nem Newtoni folyadék esetén vagy ez a kapcsolat nem lineáris, vagy $\hat{\sigma}$ függ $\hat{\varepsilon}$-tól is.
Izotróp szilárd anyagra felírható a Hooke-törvény:

$$\sigma'_{\mathrm{ij}} = 2\mu\varepsilon_{\mathrm{ij}} + \lambda\delta_{\mathrm{ij}}\varepsilon_{\mathrm{kk}}$$

Ezt átírhatjuk izotróp folyadékra, kisebb módosításokkal. Egyrész $\hat{\varepsilon}$ deriváltjának kell szerepelnie az egyenleteinkben, illetve más együtthatók szerepelnek, névszerint a viszkozitás:

$$\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + \eta'\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}$$

A második tagban szereplő η' mennyiség, az egy viszkozitás dimenziójú mennyiség, de nem ugyan az, mint a sima viszkozitás. Maga a 2. tag általában nulla. Ez akkor van, ha a folyadékot összenyomhatatlannak tekintjük.
Fejezzük ki $\dot{\varepsilon}$-t a sebességekkel, hiszen mi azokkal szeretnénk leírni folyadékok mozgását:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right)$$

És

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial r_k} = \text{div } \underline{v}$$

Ami összenyomhatatlan folyadék esetén nulla. Ezért nem foglalkozunk mi most annyira η'-vel.

Viszont a most kapott dolgokat serényen visszahelyettesíthetjük az eddigi egyenleteinkbe:

$$(\text{div } \hat{\sigma}')_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial r_j} = \frac{\partial}{\partial r_j}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right) + \eta'\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial v_j}{\partial r_j}$$

$$= \eta\frac{\partial^2}{\partial v_j^2}v_i + (\eta + \eta')\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial v_j}{\partial r_j}$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\text{div } \hat{\sigma}' = \eta \triangle \underline{v} + (\eta + \eta')\,\text{grad div } \underline{v}$$

És összenyomhatatlan folyadék esetén

$$\text{div } \hat{\sigma}' = \eta \triangle \underline{v}$$

Tehát a feszültség tenzor divergenciája, ami a mozgásegyenletünkben is szerepel:

$$\text{div } \hat{\sigma} = -\text{grad } p + \eta \triangle \underline{v} + (\eta + \eta')\,\text{grad div } \underline{v}$$

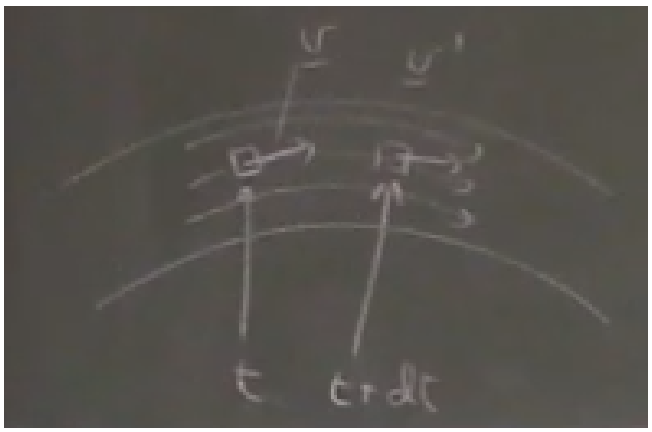
A mozgásegyenlet jobb oldalával készen vagyunk, hiszen ott már csak a külső erők szerepelnek, $\underline{f}$, ami már jó nekünk. Tehát $\sum \underline{F} = m\underline{a}$ egyenletből meg van nekünk a $\sum \underline{F}$, még kell az $m\underline{a}$.

Ezt viszont nem lesz annyira egyszerű kihozni, mivel egy részecskének a gyorsulásának a meghatározásához nem használhatjuk az eddig jól bevállt idő szerinti deriválást, mivel ahogy várunk Δt időt, a részecske amit vizsgálunk odébb is ment, más környezetben van. Ezért be kell vezetnünk az anyagi, avagy szubsztanciális deriváltat. Neve arra utal, hogy egy olyan dolognak a változását nézzük, ami valamilyen szubsztancia, ami áramlani tud, nem tűnik el és bukkan fel valahol máshol.

De akkor vizsgáljuk meg egy folyadékrészecske gyorsulását. A 14. ábrán látható részecskét vizsgáljuk. Azt fontos észrevenni, hogy ha megnézzük a részecskének a sebességét most, és Δt idő múlva, akkor nem csak az időpont változott, de ő is odébbment. Ebben nyilvánul meg az ő 'szubsztanciasága'. Tehát:

$$\underline{a}(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{v}(\underline{r} + \underline{v}\Delta t, t + \Delta t) - \underline{v}(\underline{r}, t)}{\Delta t}$$

ahol a részecske első rendű közelítésben Δt idő alatt $\underline{v}\Delta t$-vel ment arrébb.



14. ábra. A szubsztanciális derivált levezetéséhez vizsgált folyadékrészecske.

A következő trükkhöz folyamodunk:

$$\underline{a}(\underline{r},t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\underline{v}(\underline{r}+\underline{v}\Delta t,t+\Delta t)-\underline{v}(\underline{r},t+\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\underline{v}(\underline{r},t+\Delta t)-\underline{v}(\underline{r},t)}{\Delta t}$$

Vegyük észre, hogy a limeszben a második tag a régi barátunk, a mezei idő szerinti parciális deriválás. Továbbá az első tagot bővítsük v-vel, illetve a számlálóban a $t+\Delta t$-knél mindkét helyen lehúzhatjuk Δt-t, mivel a legvégén azzal úgy is 0-ba fogunk tartani. Így

$$\underline{a}(\underline{r},t)=\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}+\lim_{\Delta t\to 0}v\frac{\underline{v}(\underline{r}+\underline{v}\Delta t,t)-\underline{v}(\underline{r},t)}{v\Delta t}$$

Idézzük fel az iránymenti deriváltat:

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\Phi(\underline{r}+\underline{n}\xi)-\Phi(\underline{r})}{\xi}=(\underline{n}\ \underline{\nabla})\,\Phi$$

Ha jól megnézzük, itt is ugyan erről van szó. Tehát a következőt kapjuk a részecske gyorsulására:

$$\underline{a}(\underline{r},t)=(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v}+\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}$$

Ez az anyagi derivált. Ha ezt megszorozzuk ρ-val, akkor meg is kapjuk a mozgásegyenletünk bal oldalát. Ezt tegyük is meg. Így ideális folyadékra a következőt kapjuk mozgásegyenletnek:

$$\rho\left[(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v}+\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}\right]=-\mathrm{grad}\ p+\underline{f}$$

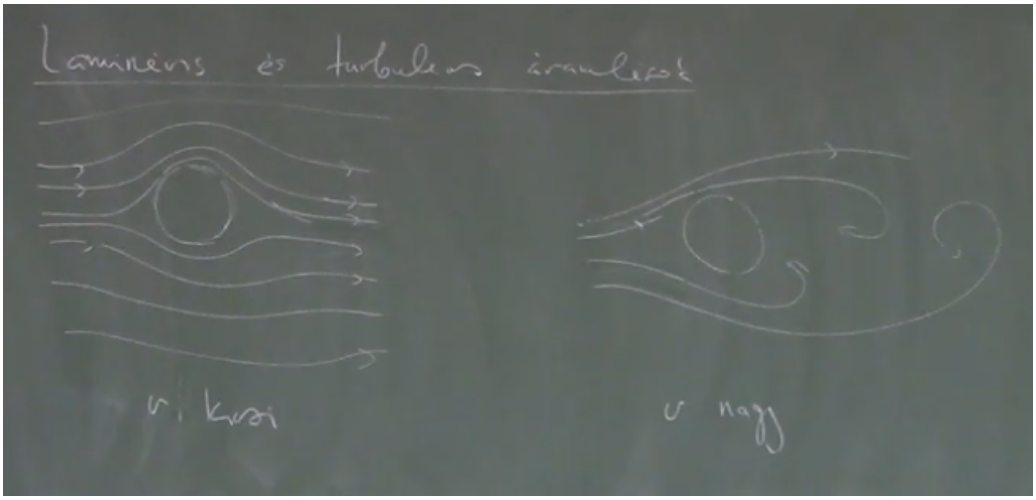
És súrlódó folyadékra:

$$\rho\left[(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v}+\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}\right]=-\mathrm{grad}\ p+\eta\,\triangle\underline{v}+(\eta+\eta')\,\mathrm{grad\ div}\ \underline{v}+\underline{f}\qquad(2)$$

Ez a Navier-Stokes egyenlet, a folyadékok mozgásegyenlete. (Ez itt csak Newtoni folyadékokra érvényes. De egyébként a jobb oldalt tudnánk tovább tetszés szerint bonyolítani. Például ha mágneses, vagy elektromosan töltött folyadékot szeretnénk leírni, akkor más erők is szerepelnének.) Bármilyen áramlást le tud írni. Fontos észrevenni, hogy nem lineáris differenciál egyenlet, így a megoldások összege nem megoldás. A legtöbb esetben nincsen analitikus megoldása, de numerikus szimulációkat például lehet ez alapján készíteni.

A célunk ugye az volt, hogy írjuk le a folyadékok mozgását. Eddig 5 változóról beszéltünk: $\underline{v}(\underline{r},t)$, $p(\underline{r},t)$ és $\rho(\underline{r},t)$. Ezeket szeretnénk kiszámolni, ehhez 5 egyenlet szükséges. A Navier-Stokes csak 3 egyenlet, ezért a legtöbbször a kontiunitási egyenlettel együtt szokás felírni, mert így már 4 egyenletünk van. Az 5., az valamilyen $p(\rho)$ függvény. Így meg van az 5 egyenlet. (Gázoknál elő szokott fordulni egy 6. változó, a hőmérséklet, ilyenkor kell még egy 6. egyenlet is.) Viszont így valóban bármilyen áramlást le tudunk írni.

Most, hogy meg van ez az egyenlet, korábbi állításainkat új fényben látjuk, például a lamináris és turbulens áramlások közötti különbséget.
Nézzük azt az esetet, amikor $\underline{v}$ kicsit. Ekkor annak a másodrendű deriváltja, $(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v}$ elhanyagolható. Így az egyenlet szépen leegyszerűsödik. Ez a lamináris áramlás esete. Ugyanakkor ha $\underline{v}$ nagy, akkor nem végezhetünk el ilyen egyszerűsítéseket. Ilyenkor az áramlás turbulensé tud válni.



15. ábra. Lamináris és trubulens áramlás.

A 15. ábrán jobb oldalt láthatunk példát turbulens áramlásokra. Itt most éppen Kármán-örvényeket[1] látunk, melyek akkor tudnak kialakulni, amikor egy henger alakú test körül áramlik gyorsan a folyadék, vagy gáz.
Érezhető, hogy kell lennie egy kritikus sebességnek, v_c-nek, ami felett egy adott áramlás turbulens lesz, alatta lamináris. Maga az, hogy egy áramlás turbulens lesz-e, vagy sem, felfogható a következő két mennyiség "csatájának":

$$(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v} \Longrightarrow\Longleftarrow \eta \triangle \underline{v}$$

Ha a bal oldali tag nagy, akkor az áramlás turbulens, ha a jobb oldali tag nagy, akkor nincs turbulencia. Fontos felismerni, hogy itt szerepet kap a viszkozitás, méghozzá úgy, hogy ha nagy a viszkozitás, akkor nincsen turbulencia.
Hogy jobban reprezentálni tudjuk ezt, mint egy mennyiséget, nézzük meg a két tag arányát. Bár ez az arány helyről helyre változik az áramlásban, megtehetjük, hogy egy karakterisztikus pontra írjuk fel. Tehát nézünk egy karakterisztikus sebességet, v_∞-t és egy karakterisztikus távolságot l-t. Így

$$Re = \frac{\rho v_\infty^2 \frac{1}{l}}{\eta \frac{v_\infty}{l^2}}$$

[1] *Szimuláció Kármán-örvényekről*

$$Re = \frac{\rho}{\eta} v_\infty l$$

Ez a Reynolds-szám. A két mennyiségnek a tipikus arányát adja meg. Ha ez a szám nagy, akkor az áramlás lehet turbulens. Reynolds-számnak akkor van nagy jelentőssége, ha két áramlást akarunk összehasonlítani. Amennyiben két méretben nagyon különböző áramlást vizsgálunk, melyeknek a Reynolds-száma azonos, akkor a két áramlást ugyan azok a képletek írják le, és nagyon hasonlóak lesznek.

Most, hogy kezünkben van a Navier-Stokes, vezessük le általánosan Bernoulli törvényét. Először is írjuk fel egyenletünket stacionáris, örvénymentes, összenyomhatatlan ideális folyadékra, és a külső erőkbe helyettesítsük be a gravitációt:

$$\rho(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v} = -\text{grad}\ p - \rho\ \text{grad}\ \Phi$$

A következő reláció levezethető (most nem teszem meg, így is elég hosszú ez a tétel):

$$\underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) = \underline{\nabla}\left(\frac{\underline{v}^2}{2}\right) - (\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v}$$

Tehát

$$(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v} = \underline{\nabla}\left(\frac{\underline{v}^2}{2}\right) - \underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v})$$

Viszont mi most örvénymentes folyadékot nézünk, ezért a második rotációs tag lehagyható. Tehát $(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v} = \underline{\nabla}\left(\frac{\underline{v}^2}{2}\right)$. Ezt helyettesítsük be egyenletünkbe:

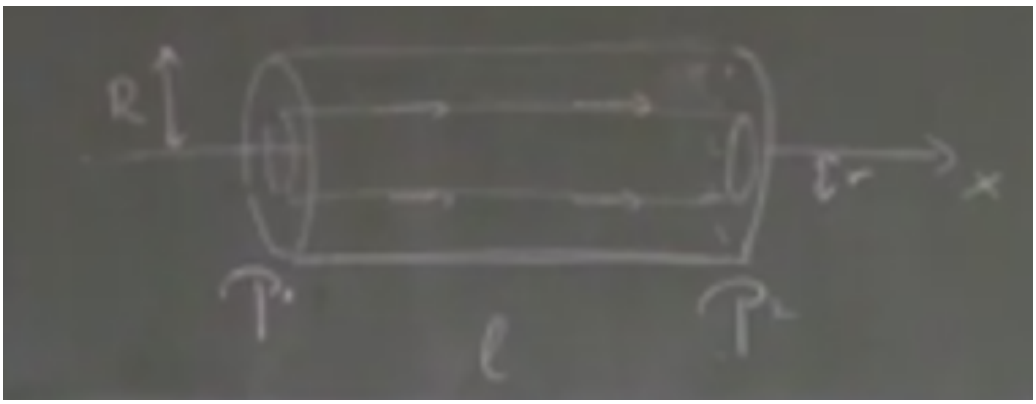
$$\rho\ \text{grad}\left(\frac{\underline{v}^2}{2}\right) = -\text{grad}\ p - \rho\ \text{grad}\ \Phi$$

Mivel ρ-t bevihetjük a gradiens belsejébe, a következőt kapjuk:

$$\text{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi\right) = 0$$

Ez pedig nem más, mint Bernoulli-törvénye.

Vizsgáljunk meg egy stacionárius lamináris áramlást csőben. Érezhető, hogy a falhoz közel a súrlódás miatt a folyadék lassabban fog áramlani, mint a cső közepében.



16. ábra. Stacionárius áramlás csőben.

Írjuk fel rá a Navier-Stokes-ot. Az egyenlet bal oldala 0 lesz, hiszen stacionárius az áramlás, azaz nincsen gyorsulás. Így:

$$0 = -\text{grad}\ p + \eta \triangle \underline{v} + 0 + 0$$

Ahova 0-t írtam, azokat a tagokat most nem vesszük figyelembe. Ebből az egyenletből az következik, hogy div $\hat{\sigma} = 0$. Nézzük ezt meg:

$$F = (p_1 - p_2)r^2\pi + \tau A$$

ahol $\tau A = \tau 2r\pi l = \eta \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{x}}{\mathrm{d}r} 2r\pi l$. Tehát

$$F = (p_1 - p_2)r^2\pi + \eta \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{x}}{\mathrm{d}r} 2r\pi l = 0$$

Ezt átrendezhetjük:

$$\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{x}}{\mathrm{d}r} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r$$

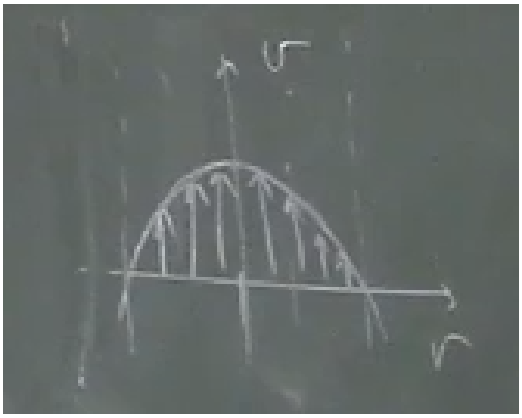
Tehát

$$v_\mathrm{x}(r) = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta} r^2 + C$$

ahol C valamilyen integrációs konstans, amit majd a határfeltételek adnak meg. A leggyakoribb határfeltétel az az, hogy a falnál a folyadék sebessége nulla. Azaz $v_\mathrm{x}(R) = 0$. Ebből

$$v_\mathrm{x}(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2)$$

Azt kaptuk, hogy a sebesség másodfokúan függ a sugártól. Tehát ha ábrázoljuk a sebeségprofilt, akkor a sebességvektorok egy parabolát fognak kifeszíteni, melynek a maximuma pont a csőnek a közepében lesz.



17. ábra. Az áramlás sebességprofilja.

Pontosan miért is áramlik itt a víz? Természetesen a nyomáskülönbség miatt a cső két végén. Feltételezhetjük, hogy a nyomás így néz ki:

$$p(x) = p_1 - (p_1 - p_2)\frac{x}{l}$$

azaz lineárisan csökken a csőben.

Nézzük meg, hogy mennyi víz is folyott át. $\underline{j} = \rho \underline{v}$ az áramsűrűség. Ez mondja meg, hogy egységnyi idő alatt egységnyi keresztmetszeten mennyi ment át. A teljes cső keresztemteszére vonatkozó áramsűrűséget $\dot{\Phi}$-vel fogom jelölni. Azaz ennyi anyag folyik át másodpercenként.

$$\dot{\Phi} = \int_{\mathrm{A}} \underline{j} \, \mathrm{d}\underline{A} = \int_0^R \rho v_{\mathrm{x}}(r) 2\pi r \, \mathrm{d}r =$$

$$= \rho 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, \mathrm{d}r$$

Tehát a következőt kapjuk:

$$\dot{\Phi} = \frac{p_1 - p_2}{8l\eta} \rho \pi R^4$$

Ez a Hagen-Poiseuille-törvény. Következményei: nagyobb nyomás különbség esetén gyorsabban áramlik a folyadék, hosszabb csövön nehezebben áramlik át, viszkózusabb folyadék is lassabban folyik, és vegyük észre, hogy a cső sugarára nagyon érzékeny, hiszen R^4 szerepel az egyenletben. Ez az egyenlet nagyon jól leírja például a hajszálerekben a vér áramlását.

8.3. Megjegyzések

A fizweben elérhető tételkidolgozás eléggé másképp közelíti meg ezt a tételt, mint amiket órán vettünk. Ahol két módon is meg lehetett volna közelíteni valamit, ott én az órai anyagot írtam. Most így ránézve erre a tételre, elnézést, hogy ilyen hosszúra sikerült, de végigmentem rajta, és én úgy látom, hogy ez mind kell. Igazából kicsit kevesebb, mint tűnik, mert egyrészt a folyadékos tételek között sok átfedés van, másrészt az általam kidolgozott tételek nagyon szövegesek. Ettől függetlenül nem lepődnék meg, ha ez lenne az idei leghosszabb tétel.

Kadlecsik Ádám

9. HULLÁM TERJEDÉS

9.1. Ami kell

Hanghullámok; A hullámegyenlet származtatása; Egydimenziós megoldások; Terjedési sebesség; Visszaverődés; Állóhullámok; Diszperzió; Fázis- és csoportsebesség; Síkhullámok

9.2. Kidolgozás

Lsd. képek.

9.3. Megjegyzések

Eléggé vázlatos és hosszú is lett, ha valami nem értelmezhető, vagy hibás akkor bocsi és keressetek, mert javítom, a síkhullámos részben kicsit több van mint amennyit Ispa elmodott, de mindent az utolsó óra jegyzetéből szedtem. (Malatinszky Adél)

9. Hullámterjedés

Hanghullámok:

Hang: Gázban vagy folyadékban terjedő nyomáshullám.

mellékfeltevések: ✓ közeg nem összenyomhatatlan

✓ hang terjedése során fellépő nyomásváltozás elhanyagolhatóan kicsi a közeghez (légkörinyomás) képest

Hullámegyenlet származtatása:

Kiindulás:

I. N-S egyenlet $\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v}\nabla)\underline{v} = -\operatorname{grad} p$

II. kontinuitási egyenlet $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$

✓ súrlódási erők elhanyagolhatóak

→ TRIVIÁLIS MO: $\underline{v} = 0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$ // konstans nyomású és sűrűségű álló közeg

Linearizálás

PERTURBATÍV MO ↓ kicsi $\delta(\,)$ függvényel

$$\underline{v}(\underline{r},t) = 0 + \delta\underline{v}(\underline{r},t)$$
$$\rho(\underline{r},t) = \rho_0 + \delta\rho(\underline{r},t)$$
$$p(\underline{r},t) = p_0 + \delta p(\underline{r},t)$$

behelyettesítés →

$\delta\delta$ elhanyagolása ↓ nem lineáris tag kicsik

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{I.} \quad \rho_0 \frac{\partial \delta \underline{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad}(\delta p) \\ &\text{II.} \quad \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\delta \underline{v}) = 0 \end{aligned}}$$

LINEARIZÁLÁS EREDMÉNYE

TFH: $\exists\, p(\rho)$ összefüggés és $p(\rho)$ ismert!

↳ $p(\rho) = p(\rho_0 + \delta\rho) = p(\rho_0) + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} \delta\rho = p_0 + \delta p$

első rendig sorfejtés

↳ $\delta p = c^2 \delta\rho$ $\quad [c] = \frac{m}{s}$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta \underline{v}}{\partial t} = -c^2 \operatorname{grad}(\delta\rho) \quad \swarrow \text{I.}$$

div ↳

$$\rho_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \delta \underline{v}}{\partial t}\right) = -c^2 \Delta \delta\rho$$

↳

$$\text{II.} \xrightarrow{\partial t} \quad \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \delta \underline{v}}{\partial t}\right) = 0$$

↳ behelyettesítés $\boxed{\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \delta\rho = 0}$ Általánosan $\phi(\underline{x}, t)$ terjedő mennyiségre

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = 0$$

HULLÁMEGYENLET (HE)

Egydimenziós megoldása:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

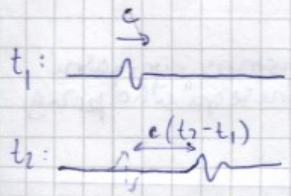
MO $f(x,t)$ pl: $\delta\rho$ sűrűség ingadozás

tetszőleges $f_0(x)$ ✓ kétszer deriválható fv megoldja alábbi alakban:

$$f(x,t) = f_0(x \pm ct)$$

Fizikai jelentés: hullám alakváltozás nélkül c sebességgel terjed a közegben

c: hullám terjedési sebessége



(+) argumentum → balra terjed

(−) — " — → jobbra terjed

fizes nyalmas kötélen keltett hullámok

peremérték probléma: "kötél végén történő események"

Visszaverődések:

- rögzített kötél esetén ellentétes fázissal visszapattan

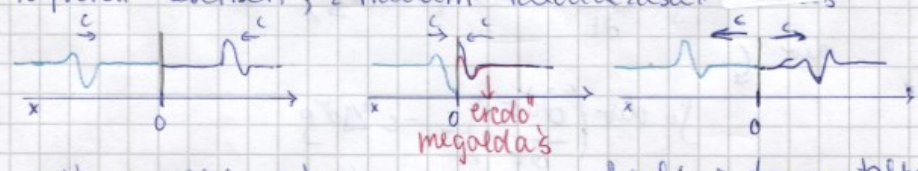
pl: $x = 0$ $\quad f(0,t) = 0$ ↯ látszólagos ellentmondás

feloldása: + tükrözött tag

$$f(x,t) = f_0(x+ct) - f_0(-(x-ct))$$

- rögzített esetben, 2 hullám találkozása:

1.



valós megoldás $x > 0$ $\qquad$ kioltás tapasztalható

- Nyiltvégi visszaverődések:

feltétel $\partial_x f(0,t) = 0$ → ráható erő 0.

Megoldás: "azonos fázisú hullámok indítása"

$$f(x,t) = f_0(x+ct) + f_0(-(x-ct))$$

Speciális eset: szinuszos hullámok

f_0 sin fv λ hullámhosszal legyen $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ($\sim$ körfrekvencia)

$$f(x,t) = F_0 \sin(\omega t \pm kx)$$

$\frac{\omega}{k} = c$ esetben megoldja a hullámegyenletet

↳ közeg $\forall$ pontja harm. rezgőmozg. véges ω frekivel

✓ λ távolságra azonos fázisok

✓ hom lin $f_1 \wedge f_2$ ✓ Mo → $f_1 + f_2$ ✓ Mo

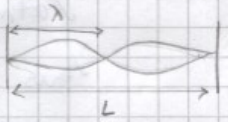
lehetséges Mo az állóhullám egyenlete:

$$\boxed{f(x,t) = F_0 \sin(\omega t - kx) + F_0 \sin(\omega t + kx)}$$

$\sim$: 2 egymással szemben haladó sin hullám

✓ $\forall$ pont ω körfrekvenciájú rezgés

✓ De! fázis egyforma, amplitúdó vált



✓ $f(0,t) = 0 \wedge f(L,t) = 0$

$kL = n\pi$ $\quad k = \frac{n\pi}{L}$ $\quad$ k: hullámszám

nem tetszőleges!

n: módus $\quad$ n = 1 alap módus

n > 1 felharmonikusok

Diszperzió:

sűrűséghullám terjedési sebessége: $c^2 = \frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}$

közegre jellemző terjedési sebesség számítása:

ismert $p(\rho)$

TFH közeg = ideális gáz → 2 független változó (n = áll mellett)

↳ 2 közelítés:

izoterm (T = áll) — adiabatikus

id. gáz áll egyenlete: $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T$

$c_T^2 = \frac{R}{M}T$

adiabata egyenlete alapján

$\frac{p}{\rho^K} = \frac{p_0}{\rho_0^K} = \text{áll}$

$c_{ab}^2 = K\frac{R}{M}T \qquad K = \frac{c_p}{c_V}$

ha elsegítő az idő a hőcseréhez

$\frac{\omega}{u} = c$

✓ ω kicsi

✓ nagy ω

↳olyan gyorsan végbemegy, hogy nincs idő a hőcserére

hang terjedési sebessége frekvenciafüggő (és hullámhossz)

✓átmenet folytonos

✓kis relatív eltérés $\frac{c_{ab}}{c_T} = \sqrt{K}$

↓

DISZPERZIÓ

// fehérfény → prizma

pl: magas hangok előbb érnek oda mint a mély hangok

Fázissebesség, csoportsebesség

diszperzió $c(\omega)$ nem egyszerű hullámhosszú és frekvenciájú hullámok összege $(\omega_1, k_1, \omega_2, k_2)$

✓ $\frac{\omega_1}{k_1} = c(\omega_1)$

✓ $\frac{\omega_2}{k_2} = c(\omega_2)$

azonosság ⇒

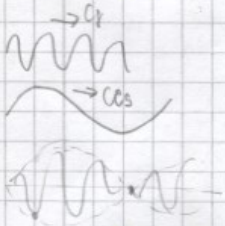
$f(x,t) = A\sin(\omega_1 t + k_1 x) + A\sin(\omega_2 t + k_2 x)$

De! $\omega_1 \approx \omega_2$ esetén jó közelítés: diszperzió → nemlineáris

$$f(x,t) = 2A\sin\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t + \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x\right]$$

$$\cos\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t + \left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x\right]$$

ebből: csoportsebesség: $c_{cs} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \approx \frac{d\omega}{dk}$



~: kioltási helyek terjedése

fázissebesség: $c_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \approx \frac{\omega}{k}$

~: nagyfrekvenciás jel maximumainak terjedése

// pl: fény esetében csoportsebesség c értéke → információ hordozó hullámcsomag

de! kvantumon belüli rezgések terjedhetnek gyorsabban

Síkhullámok:

térbeli HE $\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \delta\rho = 0$

síkhull alakban MO keressük:

$$\delta\rho(\underline{r}, t) = \delta\rho_0 \, e^{i(\omega t + \underline{k}\underline{r})}$$

✓ megoldása $\omega = ck$ esetben

$\delta\rho$ kiterjesztheto $\mathbb{C}$ → valódi megoldáshoz Im( ), Re( )

// $\delta\rho_0$ is lehet komplex → fázisa a hullám fázistolását adja

ω körfrekvenciával eltérő fázisban végeznek harmonikus rezg.

fázis: r pontban $\underline{k}\underline{r}$ → $\underline{k}$-ra ⊥ sík esetén állandó

állandó fázisú "pontok" síkok

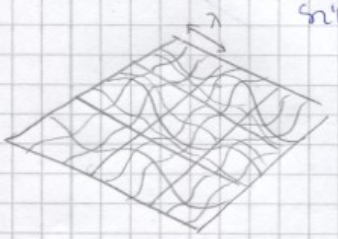
$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

↳ 2 szomszédos sík távolsága

$\underline{k}$: hullámszám vektor

↳ $k = |\underline{k}|$: hullámszám

↳ iránya: síkhullám iránya



csak részecskék elmozdulásával terjednek

sebességmező:

$$\delta v(\underline{r}, t) = \delta v_0 \, e^{i(\omega t + \underline{k}\underline{r})}$$

NS → $\rho_0 i\omega \delta v_0 e^{i(\omega t + kr)} = -c^2 i\underline{k} \delta\rho_0 e^{i(\omega t + kr)}$

✓ vekt → nagyságuk, irányuknak is egyezni kell → sebesség ∥ terjedés irák

⇓

LONGITUDINÁLIS HULLÁM

10. A TERMODINAMIKA ALAPFOGALMAI

10.1. Ami kell

A termodinamika tárgya; Hőmérsékletmérés: skálák, feltevések; Ideális gáz: Boyle-Mariotte és Gay-Lussac kísérletei és törvényei, állapotegyenlet; Kelvin-skála; Termodinamikai rendszer fogalma; Egyszerű rendszerek; Állapotjelzők és osztályozásuk; Termodinamikai egyensúly és 0. főtétel

10.2. Kidolgozás

#Itt hasznos a 11. előadáshoz tartozó jegyzet

Termodinamikai rendszerek:
Számtalan olyan jelenség van, ahol a hőmérsékletnek szerepe van; a termodinamika ilyen folyamatokat illetve rendszereket vizsgál. Termodinamikai rendszerről beszélünk, amikor
• a rendszer mérete sokkal nagyobb, mint az alkotó részecskéké,
• a benne lezajló bonyolult folyamatokat nem akarjuk részletesen leírni1, mert a makroszkopikusan is vizsgálható mennyiségek enélkül is megérthetőek.

Hőmérséklet és mérése
Itt a kiindulópontunk saját elemi érzékszervi tapasztalataink, melyek segítségével meg tudjuk különböztetni a hideget a melegtől. A hőmérséklettől, mint fizikai mennyiség-től azt várjuk el, hogy a test hőállapotát jellemezze olyan módon, hogy a hidegebb illetve melegebb testekhez mérőszámot rendeljen, és ezeket a hidegtől a meleg felé nőve úgy rendezze sorba, hogy az megegyezzen érzékszervi tapasztalatainkkal. Ilyen módon hőmérsékleti skálákat definiálhatunk.
Két fontos tapasztalat a hőmérséklet bevezetéséhez:
- adott stacionárius környezetben a test hőfoka állandósul, amit a környezete szab meg,
- az érintkezésbe hozott testek (termikus kölcsönhatás) hőfoka kiegyenlítődik.

Kelvin-skála:
a fizikai számolások szempontjából ez a legfontosabb, a továbbiakban minden hőmérsékleti kifejezést ebben értünk, kivéve ha azt külön nem jelezzük. Ez az abszolút hőmérsékleti skála. Az abszolút 0 fok:$0K = 273,16°C$. Abszolút 0 fokon a részecskék nem végeznek hőmozgást, azonban a 0K tetszőlegesen megközelíthető, de nem érhető el. Említettük már korábban, hogy a hőmérsékletméréshez referencia-pont is szükséges, ami a Kelvin-skála esetében a 0K és a víz ún. hármaspontjának hőmérsékletkülönbségének ($0°C$) 1/273,16-od része. Ennek megfelelőena két skála közötti átváltás:$K = C + 273,16$, ahol K és C jelöli rendre a Kelvin-illetve Celsius-skálán mért hőmérsékleteket.

Termodinamikai rendszerek

- izotróp: nincs kitüntetett irány
- homogén: nincs kitüntetett pont
- nincsen semmilyen elektromágneses jelenség,
- a felületi jelenségek elhanyagolhatóak
- két darab független állapotjelző van.

Állapotjelzőnek nevezzük az olyan fizikai mennyiségeket, melyek egy egyszerű termodinamikai rendszer esetén

- jellemzik a rendszer makroszkópikus állapotát,
- egy állapotban egyértelműen meghatározottak,
- nem függenek a rendszer múltjától.

Végtelen sok állapotjelző van, mert állapotjelzők kombinációja is állapotjelző. Két csoportba soroljuk őket: **extenzív** amik összeadódnak (V,N,U,S) és **intenzív** amik egyensúlyban kiegyenlítődnek, függetlenek a rendszer mennyiségétől (p,T,μ). Gyakran nem függetlenek egymástól, a köztük fenálló egyenleteket **állapotegyenletnek** nevezzük. Ez utóbbiak az állapotjelzők függvényei, melye

k minden esetben az alábbi alakban irhatóak fel:

$$f(p, V, T, ...) = 0$$

Állapotegyenlet meghatározása ált. kisérleti úton és az adott anyagra jellemző.

Termodinamikai egyensúly, 0. főtétel

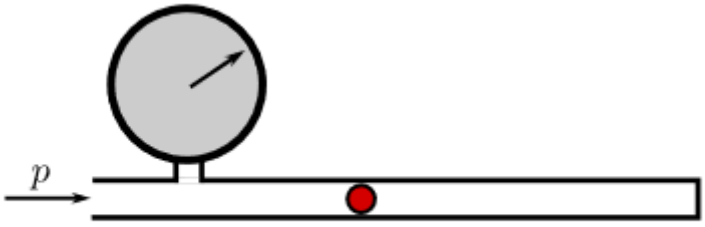
Termodinamikai egyensúlyról beszélünk, ha a rendszer makroszkopikus tulajdonságai, és ezáltal az állapotjelzői időben állandóak. Legyen három rendszerünk, jelöljük őket A, B és C-vel. Fontos megállapítás, hogy ha A és B rendszer, illetve B és C rendszer is egyensúlyban vannak, akkor A és C rendszer is egyensúlyban vannak egymással, azaz ha termikus kapcsolatba kerülnek, akkor az nem okozza az állapotjelzők megváltozását. Ezt az axiómáthívjuk a **termodinamika 0. főtételének**.

Ideális gáz

Az egyik legfontosabb egyszerű termo. rendszer. Id gáz, ha:

- a gázt alkotó atomok vagy molekulák térfogata a gáz által kitöltött térfogathoz képest elhanyagolható,
- gázmolekulák egymással ütköznek, azonban más (taszító vagy vonzó) kölcsönhatásban egymással nem állnak,
- a gázmolekulák egymással illetve a fallal vett ütközése tökéletesen rugalmas,
- gázmolekulák átlagos sebességét és kinetikus energiáját a gáz hőmérséklete szabja meg, valamint
- az azonos hőmérsékleten, azonos számú gázmolekula kinetikus energiája megegyezik,és független a gáz anyagi minőségétől.

Három fontos kisérlet és abból levont következtetés vonatkozik az id. gázokra:
Boyle-Mariotte-törvény: 1669-ben. Állandó T -> $pV = const.$ Ennek igazolására:

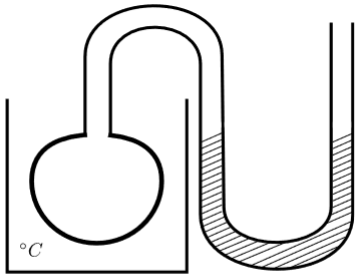


3a ábra: Boyle–Mariotte-törvény kimérése

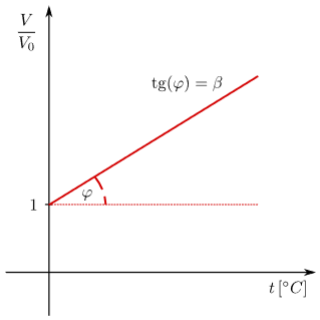
18. ábra. Caption

Gay-Lussac I.tv: 1802. Állandó nyomáson V és T között egyenes arányosság, méghozzá a következőképp:

$$V(t) = V_0(1 + \beta t)$$



3b ábra: Gay-Lussac I. és II. törvényének mérési elrendezése



2. ábra. Gay-Lussac I. törvénye.

19. ábra. Caption

Gay-Lussac II.tv: Állandó V -> a p és T között ugyanolyan arányosság mint az előbb:

$$p(t) = p_0(1 + \beta t)$$

β a két egyenletben ugyanaz értéke pedig $\beta = 1/273.16C$

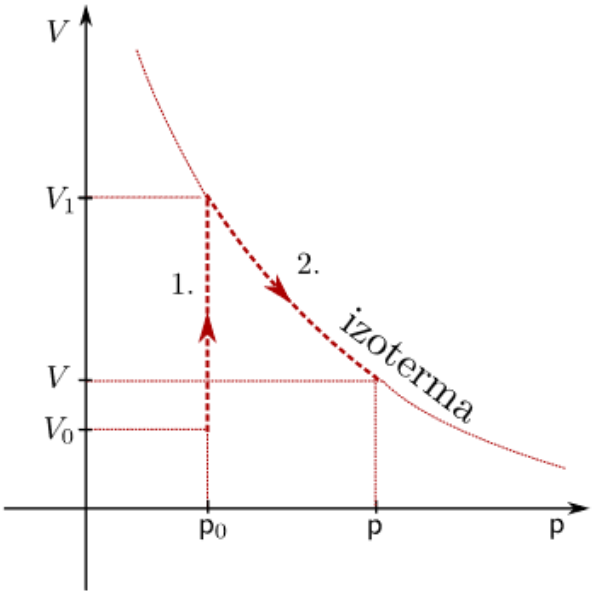
Id gáz állapotegyenlete

Ezek alapján az ideális gáz állapotegyenletét már meghatározhatjuk az alábbi gondolatkísérlettel. Induljunk ki egy 0 °C-os ideális gázból, melynek térfogata V_0, nyomása pedig p_0. Először állandó nyomáson növeljük meg a hőmérsékletét t-re, majd állandó hőmérsékleten a térfogatát változtassuk V-re. Így tetszőleges t és V elérhető. A folyamatot lásd a 4a. ábrán. A fenti törvények alapján ekkor:

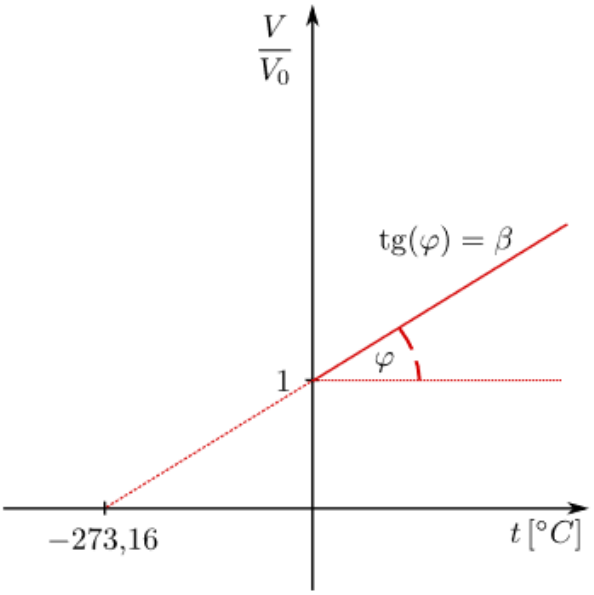
$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_0(1+\beta t) \\ p_0 V_1 &= pV \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad pV = p_0 V_0(1+\beta t) = \underbrace{p_0 V_0 \beta}_{=nR,\ \text{ez mérhető}} T \quad \Rightarrow \quad pV = nRT, \qquad (4)$$

ahol $T = t + 1/\beta$ a Kelvinben mért hőmérséklet, n jelöli az anyagmennyiséget[18], $R = 8{,}314$ J/(mol K) az univerzális gázállandó. Az n anyagmennyiség meghatározható egyrészt az Avogadro[19]-állandó ($N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$) segítségével és az összes részecske számával mint $n = N/N_A$, illetve ha ismert a teljes rendszer tömege (m), illetve a moláris tömeg (M), akkor $n = m/M$. A 4b. ábrán látható, hogy tényleg Kelvin-skálára áttérve 0K-en lesz a gáz térfogata zérus.

20. ábra. Caption



4a ábra: Folyamat a $\mathsf{p}-V$ síkon, melyből az állapotegyenlet meghatározható.



4b ábra: Kelvin-skálára áttérve 0K-en lesz a gáz térfogata zérus, az egyenes meredeksége pedig pont β.

Az előzőek alapján az ideális gáz állapotegyenlete tehát:

$$pV = nRT. \tag{5}$$

21. ábra. Caption

10.3. Megjegyzések

11. ANYAGI TULAJDONSÁGOK

11.1. Ami kell

Hőtágulás:lineáris és térfogati;Különleges viselkedésű anyagok; Kompresszibilitás; Feszültségi együttható; Hármasszabály; Összefüggés az anyagi paraméterek közt; Ideális gáz anyagi tulajdonságai

11.2. Kidolgozás

lsd. képek

11.3. Megjegyzések

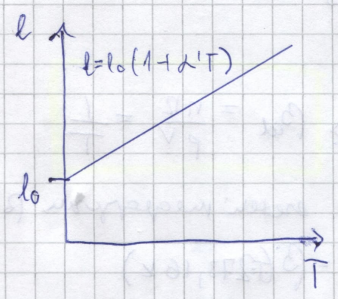
A kidolgozás a 12.óra jegyzete alapján készült. Ha bármi hiba van vagy nem olvasható stb.. –> Malatinszky Adél

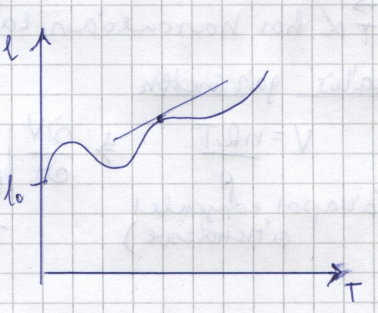
11. Anyagi tulajdonságok:

Anyagi paraméterek:

Kísérleti tapasztalat: fémnél melegítéseka megnő a hossza

⇒ általánosan: hőmérsékletváltozás hatására a testek hossza és térfogata megváltozik





↳ sok esetben $l = l_0(1+\alpha' T)$

α': lineáris hőtágulási együttható

↳ bonyolult kapcsolat

$l(T)$ görbe érintője határozható meg:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T}\Big|_p} \qquad [\alpha]\ \frac{1}{K}$$

hosszfüggetlen legyen az összefüggés

megadja hogy állandó nyomás mellett a hőmérsékletet változtatva mekkora a relatív hosszváltozás

általában $\alpha \neq \alpha'$

↓

aktuális hossza osztjuk le

$$l(T) = l_0(1+\alpha' T) \Rightarrow \Delta l = l_0 \alpha' T \Rightarrow \alpha = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T}\Big|_p = \frac{1}{l_0(1+\alpha' T)} l_0 \alpha'$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha'}{1+\alpha' T}}$$

ha α ⊖ → TT → összemegy

p': gumiszál

Nemcsak a hossz változhat, hanem a térfogat is hőmérséklet hatására

α szilár $= 10^{-5}\frac{1}{K}$

$$V = l^3 = (l_0(1+\alpha' T))^3 = \underbrace{l_0^3}_{V_0}(1+3\alpha' T + 3\alpha'^2 T + \alpha'^3 T^3)$$

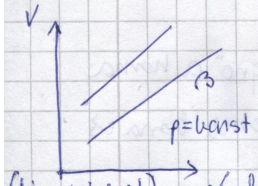
α' kicsi

↳ lineáris tagig

$$V \approx V_0(1+3\alpha^2 T) = V_0(1+\beta' T)$$

β: térfogati hőtágulási együttható

általános gázhoz (nem lineáris összefüggésre):



$$\boxed{\beta = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p}$$

↳ anyagi minőségtől független áll miatt

(lineáris eset) $\propto$ hoz hasonlóan látható $\beta \neq \beta'$

ideális gáz esetén

$$V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p = \frac{nR}{p} \Rightarrow \boxed{\beta_{id} = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}}$$

(állapot egyenlet átrendezve)

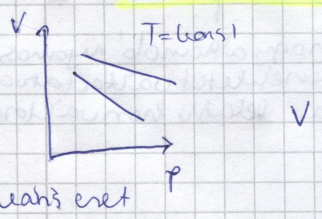
$T = 273{,}16\,K$ esetén megegyezik β'

$\beta' = \beta(T = 273{,}16\,K)$

állandó hőmérsékleten, 3 irányból történő nyomás

↳ Kompressibilitás: (lsd 1. tétel)

def: $\boxed{\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T}$ → derivált ∀ esetben ⊖ ez a rendszer stabilitásának feltétele (külső nyomás hatására tágulna és az ⌒)



lineáris eset

Ideális gázra:

$$V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow \boxed{\kappa_{id} = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T = -\frac{1}{V}\left(-\frac{nRT}{p^2}\right) = \frac{1}{p}}$$

Nézzük azt az esetet ahol V = áll

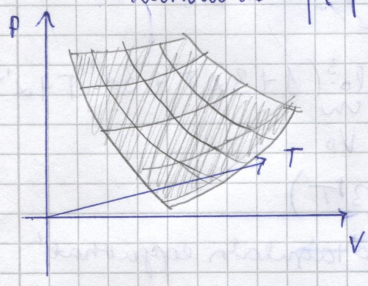
Feszültségi együttható: (γ)

~: Amikor állandó térfogatot melegítünk egy rudat majd lehűtjük mekkor feszültség keletkezik

def: $\boxed{\gamma = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V}$ → ideális gázra: $\boxed{\gamma_{id} = \frac{1}{p}\frac{nR}{V} = \frac{1}{T}}$

Megsejthetünk kapcsolatot az anyagi paraméterek közt

kiindulás: $f(p, V, T) = 0$ → 3d felület



ideális gáz esetéhez $pV - nRT = 0$

alábbi ideiglenes jelölések:

$p = P(v, t)$ $v = V(p, t)$ $t = T(p, v)$

↳ állapotegyenletből határozhatóak meg

↳ NEMFÜGGETLENEK EGYMÁSTÓL

pl: $v = V(P(v,t),t) \Rightarrow$ ① $\frac{\partial}{\partial v} v = \frac{\partial}{\partial v} V(P(v,t),t) \Rightarrow 1 = \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_t \frac{\partial P}{\partial v}\Big|_t$

deriváljuk t szerint

② $\frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial}{\partial t} V(P(v,t);t) \Rightarrow 0 = \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_t \cdot \frac{\partial P}{\partial t}\Big|_v + \frac{\partial V}{\partial t}\Big|_p$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_t \cdot \frac{\partial P}{\partial t}\Big|_v = -\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_p$$

ez alapján $\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_t = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial v}\Big|_t}$ ✓ tetszőleges 3 állapotjelző esetén érvényes

Általánosan megfogalmazható

$\Rightarrow$ HÁRMAS SZABÁLY:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_x}{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y}$$

// szinezés a megjegyeztetőséget segíti elő

felírható: $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y = -1 \right.$ alakban is $\left. \right)$

1 és 2. egyenletet összevonva és felhasználva az anyagi paraméterekről megállapítottakat

$$\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T \cdot \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V \frac{\partial T}{\partial V}\Big|_p = -1 \qquad (-Vk)\cdot(p\tau)\cdot\left(\frac{1}{\beta V}\right) = -1$$

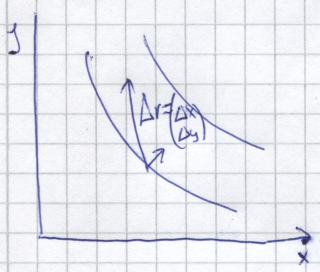
(látható hogy hármas szabállyal gyorsabban megoldható)

$$\boxed{\frac{pk\tau}{\beta} = 1}$$

Teljes derivált:

Matematikai jelentés: $f(x,y) \xrightarrow{\text{kis változás}} f(x+\Delta x, y+\Delta y)$

$$\underset{\text{Taylor sorfejtés}}{\approx} f(x,y) + \nabla f \Delta r + \mathcal{O}(\Delta r^2)$$



ahol $\nabla f \Delta r = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

Megváltozás első rendben.

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_y dx + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_x dy$$

$V(p,T)$ és $p(V,T)$ - kis megváltozása → teljes deriváltja

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T dp + \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p dT$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial V}\Big|_T dV + \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V dT = \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T} dV - \frac{\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p}{\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T} dT$$

↑ hármas szabály

12. KINETIKUSGÁZELMÉLETÉSREÁLISGÁZOK

12.1. Ami kell

Kinetikus gázelmélet: Feltevések; Ideális gáz állapotegyenletének származtatása; Hőmérséklet értelmezése; Ekvipartíció; Szabadsági fokok száma és hőmérsékletfüggéseReális gázok: Feltevések; van der Waals állapotegyenlet levezetése; a és b paraméterek jelentése; Kritikus pont; Állapotegyenlet redukált alakja

12.2. Kidolgozás

lsd. képek

12.3. Megjegyzések

A kidolgozás a 13.óra jegyzete alapján készült.Van benne egy szürke kérdőjeles rész amire rá fogok kérdezni Ispánál, hogy az hogy is van. Ha bármi hiba van vagy nem olvasható stb.. –> Malatinszky Adél

12. Kinetikus gázelmélet és reális gázok

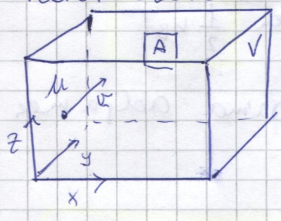
Kinetikus gázelmélet:

ideális gáz fogalma (lsd 10. tétel)

✓ magas hőmérsékleten és pl: a héliumra jól leírja

ideális gázok egyenű modellje a kinetikus gázelmélet

Feltételezések:



✓ gáz hexaéder x,y,z tengelyek irányába eső V térfogatú dobozba

// bent lévő részecskék száma N

✓ részecskék kitérjedése elhanyagolható = pontszerűek, tömegük μ

✓ részecskék közt kölcsönhatás = ütközés

✓ az ütközés tökéletesen rugalmas

✓ A részecske x,y,z irányba mozog és mindegyik irányba ugyanannyi *

✓ egyenletesen töltik ki a teret a részecskék

jelölések:
p: impulzus
ρ: valószínűség
p: nyomás

$p = \frac{F}{A}$ $F = \frac{dp}{dt}$

negatív+x irányba haladó részecskék:

↳ $\frac{N}{6}$ db ilyen részecske van

falra kifejtett nyomás

$$p = \frac{F_x}{A} = \frac{\Delta p_x}{A \Delta t} = \frac{\frac{N}{6} \mu \cdot \Delta v_x}{A \Delta t} = \frac{1}{6A\Delta t} \frac{N}{V} A v \Delta t \, 2\mu v$$

$$= \frac{1}{3} \frac{N}{V} \mu v^2$$

Δt: az az idő, amíg részecske falától falig ér

$$pV = \frac{2}{3} N \underbrace{\frac{1}{2} \mu v^2}_{E_{kin}} = \frac{2}{3} E_{kin} = nRT$$

ideális gáz áll egyenlete

$E_{kin} = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} RT = N \frac{1}{2} \mu v^2$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{R}{N_A}\right) = \frac{1}{2} \mu v^2$$

k_B : Boltzmann állandó $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K

Részecskék sebességével a hőmérséklet is kifejezhető:

$$E_{1,kin} = \frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y \rangle^2 + \langle v_z \rangle^2 \right)$$

$\langle \rangle$: várható értéke

Ekvipartíció tétel:

tehát teljes $E_{kin} = \frac{3}{2} k_B T$

↳ három tengelyben mozoghatnak a részecskék

↳ azonos a három irány várható értéke

kvadratikus energiajárulék várható értéke $\frac{1}{2} k_B T$

számát a szabadsági fokú mára adja meg

f: szabadsági fok

Egyatomos ideális gáz: $f = 3$

kétatomos gáz: $f = 5$

szilárd testek: $f = 6$

$$E_{kin} = \frac{f}{2} N k_B T$$

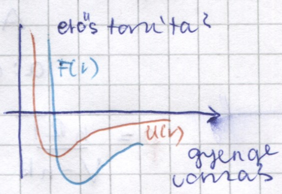
// Általános esetben a részecskék sebessége Maxwell-Boltzmann eloszlást követ.

Reális gázok:

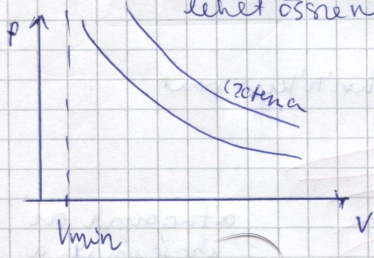
részecskéknek véges méretük és között kölcsönhatás van

✓ Kölcsönhatás Lennard-Jones potenciál

$$U_{LJ} = 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$



✓ Van minimális térfogat aminél kisebbre nem lehet összenyomni



$V_{min} = nb$ b: anyagi állandó

n: részecskeszám

emiatt

$$p(V - nb) = nRT \rightarrow p = \frac{nRT}{V - nb}$$

így V_{min} elérésekor végtelen nyomásra van szükség

Vegyük figyelembe a kölcsönhatást is!

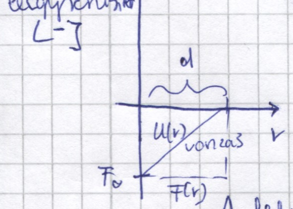
Lennard távra taszító egyébként vonzó kölcsönhatás van

✓ L-J potenciál és Van der Waals kh-ásra is

gázok ritkák → vonzó kh az (?)

→ összességében kisebb nyomást fognak kifejteni a részecskék a doboz falára

→ nyomás csökkenése



egyszerűsített kh-ok $-F_0$ konstans erejű d hatótávolságú

$$F = \begin{cases} -F_0 < 0 & \text{ha } r < d \\ 0 & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

A felületen kölcsönható részecskék száma ($N_{pár}$)

$$N_{pár} \approx \underbrace{\rho A d}_{\text{részecskék szám}} \; \overbrace{\rho d^3}^{\text{szomszédok száma}}$$

ahol $\rho = \frac{N}{V}$ részecske sűrűség

teljes nyomás megváltozása:

$$\Delta p = -\frac{F_{össz}}{A} \sim -F_0 \frac{N_{pár}}{A} \sim -\frac{F_0}{A} g^2 A d^4 = -F_0 d^4 \left(\frac{n}{V}\right)^2 = -a\left(\frac{n}{V}\right)^2$$

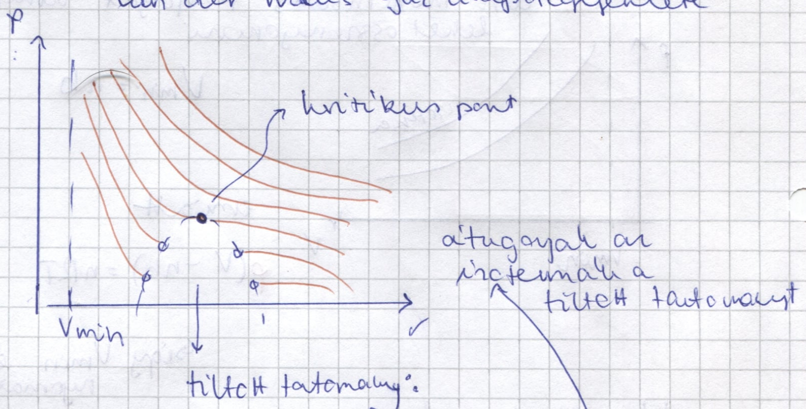
csökken a nyomás

a: anyagi állandó

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2 \Rightarrow \left[p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right](V-nb) = nRT$$

van der Waals gáz állapotegyenlete

p - V síkban:



Kiszámolható az izoterm kompresszibilitás adott tartományon negatív lenne ⇒ instabil

Kritikus pont:

ez alatt a nyomásnak vonpása van → másodrendű folytonos fázisátalakulás

állapotjelzőinek értéke

$$V_c = 3bn \quad p_c = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb} \quad T_c = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}$$

13. A TERMODINAMIKA I. FŐTÉTELE

13.1. Ami kell

Hő fogalma és kialakulása; Munka és hő ekvivalenciája; Belső energia; Joule-kísérlet; I. főtétel; Energiamegmaradás elve; Kvázisztatikus ill. adiabatikus folyamatok; Ideális gáz és vdW-gáz belső energiája

13.2. Kidolgozás

22. ábra. Caption

Hő fogalma, kialakulása:

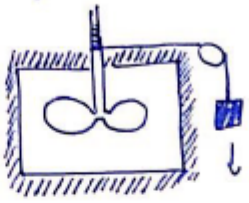
1738 Bernoulli – kinetikus gázelmélet

1763 Watt – gőzgép

1783 Lavoisier – Black: hőanyag elmélet

1790 Thompson: hő és munkavégzés kapcsolata, hő ~ mozgás

1842 Joule kísérlet ⟹



⇓

Hőszigetelt tartály esetén a keletkezett hőmennyiség a befektetett munka konstansszorosa (bármilyen munka esetén) ⟹

⟹ A hő nem anyag, hanem az energiaáramlás <u>során átadott energia.</u> (Munka és hő ekvivalenciája)

Két állapot között bárhogy végzünk munkát, az W_{AB} ⟹

⟹ rendeljünk egy-egy állapothoz U állapotjelzőt ⟹

⟹ $U_B = U_A + W_{AB} \Rightarrow U(B) = U(A) + W_{AB}$ (<u>tényleg állapotjelző</u>)

I. Főtétel:

Ismert, hogy U állapotjelző ⟹ $\oint dU = 0 \Rightarrow dU = \left.\frac{\partial U}{\partial p}\right|_V dp + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_p dV =$

$$= \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial U}{\partial p}\right|_V & \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dV \end{pmatrix} = \underline{\nabla} U \, d\underline{r} \Rightarrow \oint \underline{\nabla} U \, d\underline{r} = 0$$

Mert U-t a munkavégzés változtatja meg, az pedig V és p függvénye, valamint $U \sim T$, $T \sim p \cdot V$ miatt.

$U_A \to U_B$-be menve látható, hogy, a különböző utakon W nem egyforma. Az energiaátadás olyan formáját, melyhez nem tartozik munkavégzés jelöljük Q-val. Ez alapján kijelenthető,

(1)

23. ábra. Caption

hogy: $U(B) - U(A) = W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2 = \dots$ adott ΔU-ra állandó.

Nagyon rövid folyamatokra: $\boxed{dU = \delta W + \delta Q}$ Ez a termodinamika I. főtétele

Mivel $\oint dU = 0 = \oint \delta W + \oint \delta Q$, $\oint \delta W, \oint \delta Q$ nem kell, hogy 0-k legyenek $\Rightarrow$ nem állapotjelzők.

Adiabatikus folyamat ahol nincsen hőcsere $\Rightarrow \delta Q = 0$

Kvázisztatikus folyamat: A rendszer állapotjelzőinek változása lassan, egyenletesen történik, közben a rendszer végig egyensúlyban van, nincsenek kiegyenlítődési folyamatok

Korábbról ismert: $U_{id.g.} = \frac{f}{2} nRT$, és $nRT = pV \Rightarrow$

$\Rightarrow U_{id.g.} = \frac{f}{2} p.V$

Van der Waals gáz belső energiája:

$$U_{vaW} = \frac{f}{2} nRT - a\frac{n^2}{V}$$

(Mert a hölcs. hatások belső energia járuléka: $U_{kh} = \int_{bn}^{V} p_{kh}\, dV' = \frac{-an^2}{V} + \frac{an}{b}$

$$U = U_{id.g.} + U_{kh} = \frac{f}{2} nRT - \frac{an^2}{V} + \frac{an}{b}$$

Mivel a hölcsönhatások rövidtávúak, azt akarjuk, hogy $V \to \infty$ esetben $U_{vaW} \doteq U_{id.g.}$-vel $\Rightarrow U_{vaW} = \frac{f}{2} nRT - a\frac{n^2}{V}$

Energiamegmaradás: Az I. főtétel megfogalmazható úgy is, hogy nem létezik elsőfajú perpetuum mobile*, ez összhangban van az energiamegmaradással.

2

24. ábra. Caption

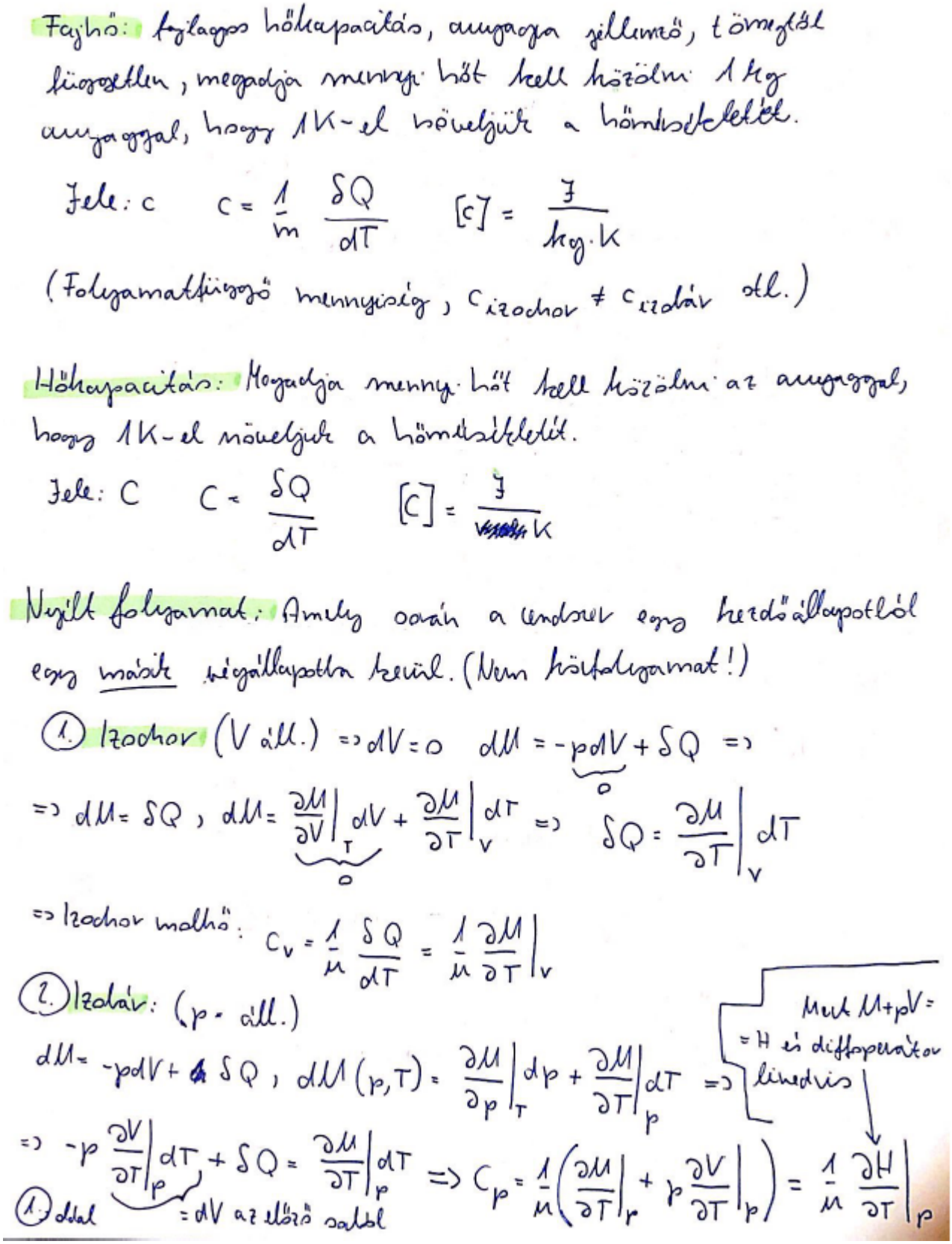
13.3. Megjegyzések

14. FOLYAMATOK ÉS HŐTANI ALAPMENNYISÉGEK

14.1. Ami kell

Fajhő; Hőkapacitás; Nyílt folyamatok ideális gázokkal: izoterm, izochor, adiabatikus, politrop folyamatok; Robert-Mayer-egyenlet; Gay-Lussac-kísérlet ideális és vdW-gázzal; Joule-Thomson-kísérlet; Entalpia fogalma; JT-együttható; Inverziós hőmérséklet

14.2. Kidolgozás



25. ábra. omegacica

Ideális gázokra:

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{f}{2}R \qquad C_p = \frac{1}{n}\frac{\partial (U+pV)}{\partial T}\Big|_p = \frac{1}{n}\left(\frac{f}{2}nR + p\frac{nR}{p}\right) = \frac{f+2}{2}R$$

Mathból

$$\Rightarrow C_p - C_V = R \Rightarrow \boxed{c_p - c_V = \frac{R}{M}}$$ Robert-Mayer

Robert Mayer általánosan:

$$C_p - C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p + p\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p - \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_V\right)$$

Mivel $\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p = \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T \cdot \frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p + \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V$, visszaírva

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p}_{V\beta}\underbrace{\left(p + \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T\right)}_{\frac{T\beta}{\kappa}} = \boxed{\frac{TV\beta^2}{n\kappa} = c_p - c_V}$$

Adiabatikus folyamat: $\delta Q = 0 \Rightarrow dU = -p\,dV$

$$dU(p,V) = \frac{\partial U}{\partial p}\Big|_V dp + \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_p dV = -p\,dV \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial p}\Big|_V dp = -\left(p + \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_p\right)dV$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dV} = \frac{g(p,V)}{f(p,V)}$$ differenciálegyenlet, ez ideális gázra:

$$U(p,V) = \frac{f}{2}pV \Rightarrow \frac{f}{2}V\,dp = -\left(p + \frac{f}{2}p\right)dV = -\frac{f+2}{2}p\,dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dV} = -\frac{f+2}{f}\frac{p}{V} \Rightarrow d(\ln p) = -\frac{f+2}{f}d(\ln V)\Big/\int \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln p = \ln\left(V^{-\frac{f+2}{f}}\right) + C \qquad \text{Legyen } \kappa = \frac{f+2}{f} \Rightarrow$$

(?)

26. ábra. Caption

$\Rightarrow p = \tilde{C} V^{-\kappa} \Rightarrow pV^{-\kappa} = \tilde{C} = \text{konstans}$

Politrop folyamat (molhő konstans):

$$\delta Q = \nu C\, dT \Rightarrow dU = -p\,dV + \delta Q \Rightarrow dU = -p\,dV + \nu C\, dT$$

Ideális gáz spec. eset:

$$dU(V,T) = \nu C_V\, dT \qquad \nu C_V\, dT = -p\,dV + \nu C\, dT$$

$$p\,dV = \frac{\nu R T}{V} dV = \nu (C - C_V)\, dT \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{C - C_V}{R} \frac{dT}{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{V_0}^{V} d(\ln V) = \int_{T_0}^{T} \frac{C - C_V}{R}\, d(\ln T) \Rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \frac{C - C_V}{R} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{C - C_V}{R}} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{C_V - C}{R}} \Rightarrow V T^{\frac{C_V - C}{R}} = V_0 T_0^{\frac{C_V - C}{R}}, \quad T V^{\frac{R}{C_V - C}} = T_0 V_0^{\frac{R}{C_V - C}}$$

Id. g.: $T = \frac{pV}{\nu R} \Rightarrow \frac{pV}{\nu R} V^{\frac{R}{C_V - C}} = \frac{p_0 V_0}{\nu R} V_0^{\frac{R}{C_V - C}} \Rightarrow pV^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa} = \text{const.}$

ahol $\kappa = \frac{C_p - C}{C_V - C}$

Mivel politrop folyamatnál id. g. esetén: $\Delta U = \nu C_V \Delta T \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = -\frac{p_1 V_1}{\kappa - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1}\right), \quad Q = \nu C \Delta T$$

Spec. esetek:

Izoterm: T áll. $\Rightarrow pV$ áll. $\Rightarrow \kappa = 1 \Rightarrow C \to \infty \Rightarrow W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV = -\nu R T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

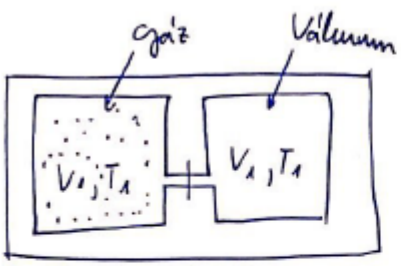
$\Rightarrow Q = \nu R T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ (Mert izoterm $\Rightarrow dU = 0 = W + Q$)

Izochor: $W = 0 \Rightarrow \Delta U = Q = \nu C_V \Delta T$

Izobár: $\Delta U = \nu C_V \Delta T \quad W = -p(V_2 - V_1) \quad Q = \nu C_p (T_2 - T_1)$ (3.)

27. ábra. Caption

Gay-Lussac kísérlet:



$U_{id.g} = \frac{f}{2} nkT = \mu C_V T$

$V_2 = 2V_1 \qquad Q, W = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow U_1(V_1, T_1) = U_2(V_2, T_2) \;, T_1 = T_2$

VdW gázzal: $U_{vdW} = \frac{f}{2} nkT - a\frac{n^2}{V} = \mu C_V T - a\frac{n^2}{V}$

$\left(C_V^{vdW} = C_V^{id.g} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V\right) \qquad U_1(V_1, T_1) = U_2(2V_1, T_2) \Rightarrow$

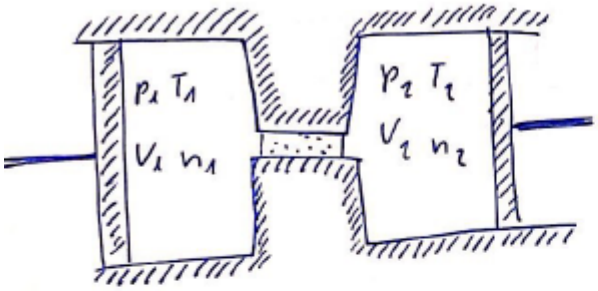
(mert $W, Q = 0$)

$\Rightarrow \mu C_V T_1 - a\frac{\mu^2}{V_1} = \mu C_V T_2 - a\frac{\mu^2}{2V_1} \Rightarrow \Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{C_V}\frac{a\mu}{2V_1}$

(V nő $\Rightarrow$ részecskék távolsága nő $\Rightarrow$ pot. energia nő, összenergia áll. $\Rightarrow$

$\Rightarrow E_{kin}$ csökken $\Rightarrow$ lehűl)

Joule-Thomson kísérlet:



$p_2 < p_1$

$n_1 = n_2$

$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{const.}, \quad Q = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta U = W \Rightarrow U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \Rightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 \Rightarrow H_1 = H_2$

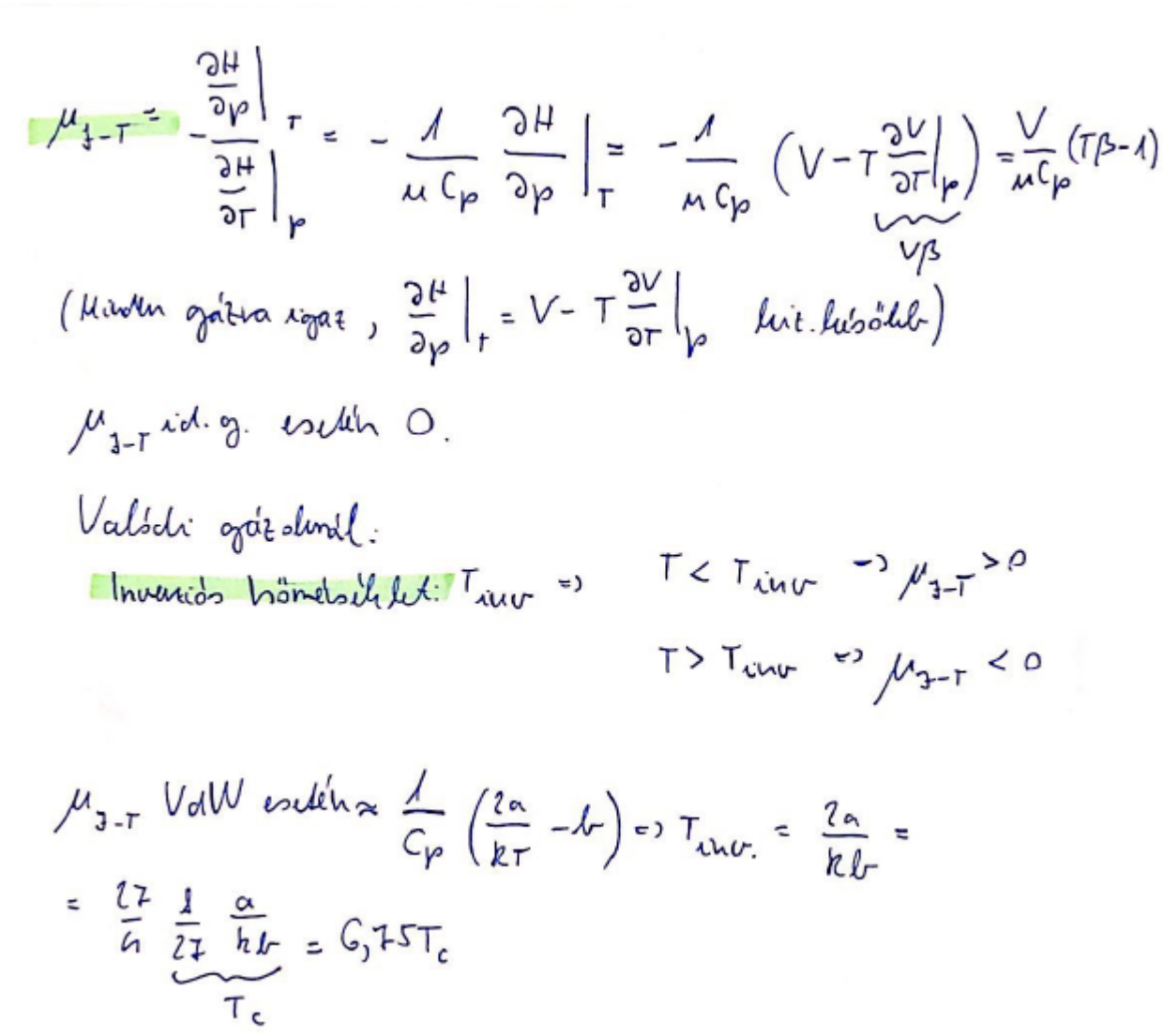
(Izentalpikus folyamat)

A gáz a folyamat hőtan hőmérsékletet változtat:

$\mu_{J-T} = \frac{\partial T}{\partial p}\Big|_H$ (Joule-Thomson együttható)

(4.)

28. ábra. Caption



29. ábra. Caption

14.3. Megjegyzések

15. A TERMODINAMIKA II. FŐTÉTELE

15.1. Ami kell

Reverzibilis/irreverzibilis folyamatok; Kvázisztatikusság és reverzibilitás kapcsolata; Példák reverzibilis folyamatokra; II. főtétel: Clausius és Kelvin–Planck-féle megfogalmazás; Carnot-körfolyamat fogalma;Hatásfok ideális gáz esetén; Hűtőgép és hőszivattyú hatásfoka; Termodinamikai hőmérsékleti skála; Carnot-körfolyamat speciális tulajdonságai; Kelvin–Planck-gép és Clausius-gép ekvivalenciája; Stirling-motor és hatásfoka

15.2. Kidolgozás

15. TÉTEL

Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok.

Irreverzibilis: • nem megfordítható, a külső hatásokat megfordítva a rendszer és környezete nem jut vissza eredeti állapotába.

• nem kvázisztatikus => irreverzibilis, a belső kiegyenlítődések miatt

• kvázisztatikus is lehet irreverzibilis, ha valamely állapotjelző lassú kiegyenlítődése történik

• súrlódással járó folyamatok, áram általi hőtermelés, legtöbb kémiai reakció, maradandó alakváltozás, ferromágneses anyagok átmágneseződése.

Reverzibilis: • megfordítható

• Minden kvázisztatikus folyamat ilyen, ha közben nincsen kiegyenlítődés

Példa:

(reverzibilis hőcsere!!)

↳ azonos hőmérsékletek közötti hőcsere

II. Főtétel:

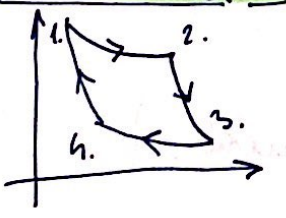
Clausius: A hő nem mehet alacsonyabb hőmérsékletű helyről magasabb hőmérsékletű helyre, anélkül, hogy a környezetében valami változás vissza ne maradjon.

↳ munkavégzés

Kelvin-Planck: Nem konstruálható olyan periodikusan működő gép, mely csupán egyetlen tartállyal áll kapcsolatban és munkát végez. (másodfajú perpetuum mobile ∄)

Carnot körfolyamat: 1→2, 3→4 izoterma

2→3, 4→1 adiabata



Reverzibilis, hiszen hőcsere csak az izoterm szakaszon van, azonos hőmérsékletek között.

Scanned with CamScanner

kvázisztatikus adiabata is reverzibilis → folyamat reverzibilis

	ΔU	W	Q
$1\to 2$	0	$-nkT_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$nkT_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
$2\to 3$	$-nC_V(T_1-T_2)$	$-nC_V(T_1-T_2)$	0
$3\to 4$	0	$+nkT_2\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$	$-nkT_2\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$
$4\to 1$	$nC_V(T_1-T_2)$	$nC_V(T_1-T_2)$	0

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = nk\left(T_2\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) - T_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right)$$

$pV^{\kappa} = \text{const.}$, $TV^{\kappa} = \text{const.}$

$$T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_4^{\kappa-1},\quad T_1V_2^{\kappa-1} = T_2V_3^{\kappa-1} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\kappa-1} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$$

$$W_{\text{öss.}} + Q_{\text{öss.}} = 0 \Rightarrow W = -Q_{12} - Q_{34} = -Q_{12} + |Q_{34}| =$$

$$= -Q_{12}\left(1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}}\right) = -Q_{12}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{fel}} \overset{\text{most}}{=} \frac{-W}{Q_{12}} \Rightarrow \eta_{id.g.}^{\text{Carnot}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$\Uparrow$ Minden gázra $\qquad$ $\Uparrow$ Csak ideálisra

$$\Rightarrow 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{34}}{Q_{12}} \Rightarrow \frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \frac{\delta Q}{T} = 0}$$

Spec. tul.:
(Period., revers., legjobb hatásfok, legkevesebb hőtartály)

Scanned with CamScanner

Hőszivattyú:

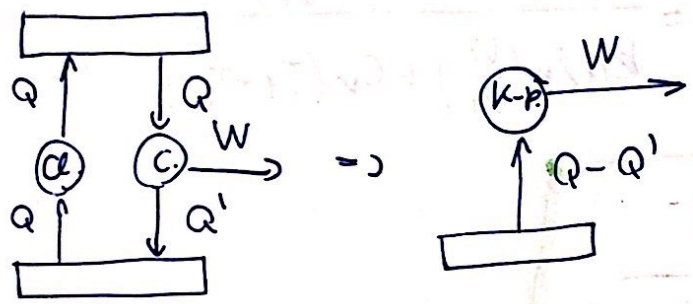
$$\eta^{\text{carnot}}_{\text{hőszív.}} = \frac{|Q_{12}|}{-W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta^{\text{carnot}}_{\text{id.g.}}} > 1$$

Hűtőgép jósági tényező:

$$\eta^{\text{carnot}}_{\text{hűtő}} = \frac{|Q_{34}|}{W} = \frac{T_2}{T_1} \cdot Q_{12} \cdot \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \eta^{\text{carnot}}_{\text{hőszív.}} - 1 > 0$$

Clausius és Kelvin Planck ekvivalenciája:

Clausius gép + Carnot:

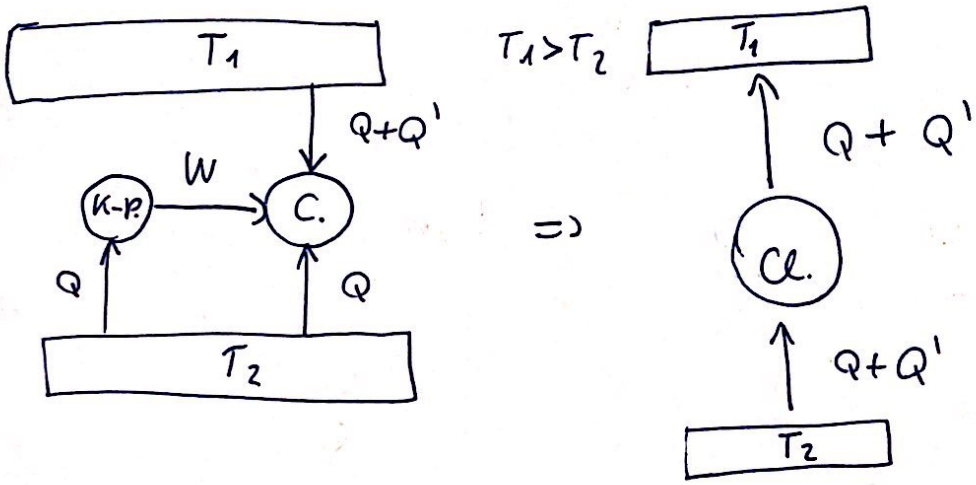


Ha ∃ Clausius =>

=> ∃ K-P. is

$$Q' = \frac{T_2}{T_1} Q < Q \quad , \quad Q - Q' = W$$

Kelvin Planck + Carnot visszafelé:



Scanned with CamScanner

Termodinamikai hőmérsékleti skála:

Mivel Carnot anyagfüggetlen, mindig igaz:

$$\eta = 1 - \frac{T_{ref}}{T} \Rightarrow T = \frac{T_{ref.}}{1-\eta}$$

ahol $T_{ref.}$ egy referencia hőmérséklet

T pedig a mérni kívánt hőmérséklet.

$\Downarrow$

η ismeretében hőmérséklet mérhető

Stirling motor:

Külső égésű motor (2 izoterm és 2 izochor szakasz)

$$\eta^{Stirling}_{id.g.} = -\frac{W_{12}+W_{34}}{Q_{12}+Q_{41}} = \frac{R(T_1-T_2)\cdot\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{RT_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)+C_V(T_1-T_2)} =$$

$$= \boxed{1 - \frac{\frac{T_2-T_1}{\kappa-1} + T_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{\frac{T_2-T_1}{\kappa-1} + T_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}}$$

(Van der Waalsra ugyanez)

Scanned with CamScanner

16. ENTRÓPIA

16.1. Ami kell

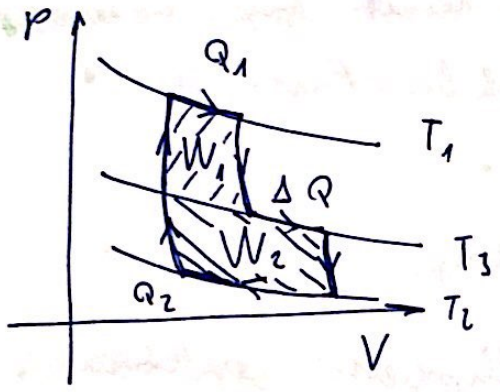
Redukált hő körfolyamatokra; Entrópia bevezetése; Entrópia viselkedése hőmérséklet-kiegyenlítődés és a Gay-Lussac-kísérlet során; Irreverzibilitás mikroszkopikus értelmezése; Fluktuációk; Entrópia mikroszkopikus defníciója; I. és II. főtétel egyesített alakja

16.2. Kidolgozás

16. TÉTEL

Ismert: Carnot esetén $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$

Két Carnot körfolyamat egyesítése:



Felső folyamatra:

$$0 = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_3}{T_3} \Rightarrow$$

alsó folyamatra:

$$0 = \frac{Q_3}{T_3} + \frac{\Delta Q}{T_3} - \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_3} - \frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

$$\eta_{12} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \eta_{13} = 1 - \frac{T_3}{T_1} \qquad \eta_{32} = 1 - \frac{T_2}{T_3}$$

Felső Carnot munkavégzése: $\eta_{13} Q_1$, T_3-nak leadott hő $\frac{T_3}{T_1} Q_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ez továbbadódik az alsó Carnotnak

Alsó Carnot felvett ΔQ hőt T_3-ból, ennek munkavégzése tehát $\eta_{32}\left(\frac{T_3}{T_1} Q_1 + \Delta Q\right)$, a T_2-nek leadott hő pedig:

$$\frac{T_2}{T_3}\left(\frac{T_3}{T_1} Q_1 + \Delta Q\right)$$

Tehát teljes hatásfok: $\eta = \frac{-W}{Q_1 + \Delta Q} = \frac{-W_1 - W_2}{Q_1 + \Delta Q} =$

$$= \frac{Q_1 + \Delta Q - \frac{T_2}{T_3}\left(\frac{T_3}{T_1} Q_1 + \Delta Q\right)}{Q_1 + \Delta Q} \overset{(1.)}{=} \frac{1 + x - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_3} x}{1 + x} = \frac{\eta_{12} + \eta_{32} \cdot x}{1 + x} =$$

Scanned with CamScanner

$$\eta_{12} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{\eta_{32}}{\eta_{12}} x}{1 + x}}_{< 1} < \eta_{12} \qquad \left(x := \frac{\Delta Q}{Q_1} \right)$$

Két Carnot együttes hatásfoka kisebb mint egyé, és mivel minden körfolyamatot kialakíthatunk sok kis Carnotból =>
=> Carnot hatásfoka a legnagyobb.

Valamint ha minden Carnotra igaz, hogy $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ =>
minden körfolyamatra igaz => $\frac{\delta Q}{T}$ állapotjelző: entrópia

$$dS := \frac{\delta Q}{T} \qquad [S] = \frac{J}{K} \qquad \oint dS = 0$$

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \qquad \left(S(A) = \int_0^A \frac{\delta Q}{T} \right)$$

(Igazából ennek az egésznek az volt a lényege hogy belássuk, az entrópia állapotjelző.)

Entrópia és hőmérsékletkiegyenlítődés.

Legyen 2 tartály, mindegyikben n mól, C mólhőjű anyag, egyik T_1, másik T_2, összenyitjük őket => $T^* = \frac{T_1 + T_2}{2}$ $\Delta S = ?$

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T^*} \frac{nC\,dT}{T} + \int_{T_2}^{T^*} \frac{nC\,dT}{T} = nC \left\{ \ln\left(\frac{T^*}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{T^*}{T_2}\right) \right\} =$$

$$= nC \ln\left(\frac{T^{*2}}{T_1 \cdot T_2}\right) \Rightarrow \frac{T^{*2}}{T_1 \cdot T_2} = \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} = \frac{T_1^2 + 2T_1T_2 + T_2^2}{4T_1T_2} =$$

$$= \frac{T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2}{4T_1T_2} + \frac{4T_1T_2}{4T_1T_2} = 1 + \frac{\overbrace{(T_1 - T_2)^2}^{>0}}{4T_1T_2} \Rightarrow > 1 \Rightarrow \boxed{\Delta S > 0}$$

(2)

Egyszerűbben: $dS = dS_1 + dS_2 = \delta Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) > 0$

Clausius egyenlőtlenség:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad \begin{pmatrix} = \text{ha reverzibilis} \\ > \text{ha irreverzibilis} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

I.-II. Főtétel egyesítve: $dU = \delta Q + \delta W \leq -p\,dV + T\,dS$

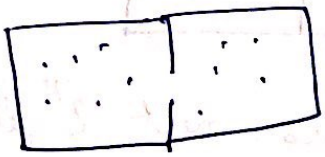
Entrópia és Gay-Lussac kísérlet: (Irreverzibilis, de történhet lehet)

Mivel $\Delta T = 0 \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow \delta Q = -\delta W$

$$W = -\int_{2V_1}^{V_1} p\,dV = -\int_{2V_1}^{V_1} \frac{\nu k T}{V}\,dV = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{\nu k T}{V}\,dV = \nu R T \ln 2$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{Q}{T} = -\frac{W}{T} = -\nu k \ln 2 = N k_B \ln 2 = k_B \ln(2^N)$$

Entrópia mikroszkopikus értelmezése:



$$p_k = \frac{N!}{k!\,(N-k!)!}\, p^k \cdot (1-p)^{N-k}$$

↑
Annak a valószínűsége, hogy k piros golyó van a bal és $N-k$ fekete golyó van a jobb oldali dobozban.

Várható érték: $\langle k \rangle = pN$, $p = \frac{1}{2}$, Mivel $V_1 = V_2 \Rightarrow \langle k \rangle = \frac{N}{2}$

A piros golyók összesen 2^N féleképpen lehetnek elrendezve, ebből csak 1 az, ahol a jobb oldali tartályban nincsen piros. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2^N} = 2^{-N}$ a valószínűsége ennek az esetnek, ami kb. 0, ha $N \gg$.

Tehát ha $N \to \infty \Rightarrow$ kvázi. eloszlás $\Rightarrow$ normális eloszlás $\Rightarrow$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow$ Várható érték $\mu = Np = \frac{N}{2}$

Szórás: $\sigma^2 = Np(1-p) = \frac{N}{4} = \frac{\mu}{2}$
(nevezett)

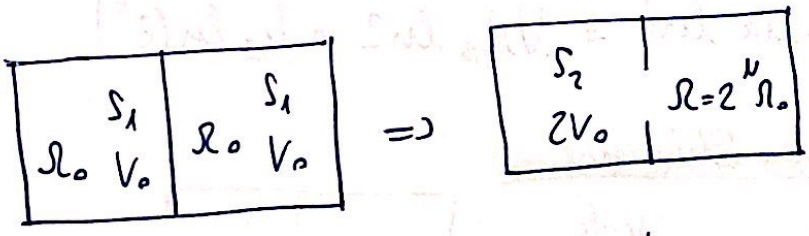
Tehát a bal oldali dobozban lévő piros részecskék száma:

$N_b = \frac{N}{2} \pm \Delta N$, $\Delta N = \sigma = \frac{\sqrt{N}}{2}$

Relatív szórás: $\frac{\sigma}{\mu} \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ (Ez a fluktuáció mértéke)

Ez nagyon kicsi, ezért az ingadozások nagyon kicsik, emiatt kb állandó a nyomás egy adatban stb. ($\Delta N << \frac{N}{2}$)

Irreverzibilitás stb.: Ω_0 a mikroállapotok száma



$\Omega = 2^N \Omega_0$, mert 2^N féleképpen helyezhetünk el N db részecskét a két tartály között, egy tartályban pedig Ω_0 féleképpen.

Boltzmann entrópia:

$S = k_B \ln \Omega \Rightarrow \Delta S = S_2 - S_1 = k_B \ln(2^N \Omega_0) - k_B \ln(\Omega_0) =$

$= k_B \ln(2^N) = N k_B \ln 2$ (Gay Lussacból is ezt kaptuk)

Ha két térben lévő mikroállapotok száma Ω_1, Ω_2, akkor ö.-t összekapcsolva $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2 \Rightarrow \ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 \Rightarrow S = S_1 + S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ tehetség **extenzív**

Scanned with CamScanner

17. TERMODINAMIKAI POTENCIÁLOK

17.1. Ami kell

Kémiai potenciál; Termodinamikai potenciál és fundamentális egyenlet fogalma; Legendre-transzformáció; Termodinamikai potenciálok: szabadenergia, entalpia, szabadentalpia, nagykanonikuspotenciál; A potenciálokra vonatkozó differenciális egyenletek

17.2. Kidolgozás

17. TÉTEL

Kémiai potenciál: Megadja mekkora energiát kell adnunk egy mólnyi részecskének, ha úgy akarjuk hozzáadni a m.-hez, hogy közben a térfogat és az entrópia állandó maradjon.

Természetes változók: U-t S,V,u függvényében célszerű megadni, hiszen akkor: $dU(S,V,u) = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_{V,u} dS + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{S,u} dV + \left.\frac{\partial U}{\partial u}\right|_{S,V} du \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_{V,u} \quad p = -\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{S,u} \quad \mu = \left.\frac{\partial U}{\partial u}\right|_{S,V}$$

S,V,u U természetes változói.

Konjugált párok: $T-S$, $p-V$, $\mu-u$

(**Természetes változók** azért jók, mert akkor parc. deriváltakként az állapotegyenletek állnak elő.)

Ig. g. fundamentális egy:

$$U(S,V,u) = Ae^{\frac{2S}{fnk}} \cdot V^{-\frac{2}{f}} \cdot u^{\frac{f+2}{f}} \Rightarrow T(S,V,u) = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_{V,u} = U \cdot \frac{2}{fnk} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{f}{2} ukT \qquad -p(S,V,u) = \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{S,u} \Rightarrow pV = ukT$$

Entrópiára: $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} du \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(U,V,u) \Rightarrow dS(U,V,u) = \left.\frac{\partial S}{\partial U}\right|_{V,u} dU + \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_{U,u} dV + \left.\frac{\partial S}{\partial u}\right|_{U,V} du$$

$$S(U,V,u) = -uk \ln \left\{ \left(\frac{U}{A}\right)^{\frac{f}{2}} \cdot V \cdot u^{-\frac{f+2}{2}} \right\}$$

Termodinamikai potenciál: Olyan függvények, melyek három konjugált pár tagjainak egyikétől függnek.

Scanned with CamScanner

Legendre transzf.:

$f(x)$: $u(x) = f'(x) \Rightarrow u(x(u)) = u$

$$g(u) = \left(f(x) - x \underbrace{f'(x)}_{u(x)} \right)\Big|_{x(u)} = f(x(u)) - x(u) \cdot u \Rightarrow$$

$\Rightarrow g(u)$ az $f(x)$ Legendre transzformáltja.

$(g'(u) = -x(u))$

Termodinamikai potenciálok:

$$F(T,V,N) = U - \frac{\partial U}{\partial S} \cdot S = U - TS \quad \text{(Helmholtz)}$$

$$dF(T,V,N) = \frac{\partial F}{\partial T}\Big|_{V,N} dT + \frac{\partial F}{\partial V}\Big|_{T,N} dV + \frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{T,V} dN$$

$$\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_{V,N} = \frac{\partial U}{\partial S}\Big|_{V,N} \cdot \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_{V,N} - S - T\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_{V,N} = -S(T,V,N)$$

$(F = U - TS$ - miatt, sima deriválás)

$$\frac{\partial F}{\partial V}\Big|_{T,N} = \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_{S,N} = -p$$

$$\frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{T,V} = \frac{\partial U}{\partial N}\Big|_{S,V} = \mu$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

Van inig:

$G = F + pV = U - TS + pV$, $dG = -SdT + Vdp + \mu dN$

$H = U + pV$, $dH = TdS + Vdp + \mu dN$

Természetes változók: $(G(T,p,N))$, $(H(S,p,N))$

(2.) $\phi = F - \mu N$, $U - TS - \mu N$, $d\phi = -SdT - pdV - Nd\mu$ $(\phi(T,V,\mu))$

Scanned with CamScanner

18. II. FŐTÉTEL KÖVETKEZMÉNYEI

18.1. Ami kell

Maxwell-relációk és alkalmazásuk a JT-folyamat és a RM-egyenlet esetén; Euler-összefüggés; Gibbs-Duhem-reláció

18.2. Kidolgozás

18. TÉTEL

Maxwell-relációk:

Ismert: $\left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_{V,n} = T$ $\quad \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{S,n} = -p$, $\quad \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_{S,n} = -\left.\frac{\partial p}{\partial S}\right|_{V,n}$ $\Rightarrow$ Az ilyen összefüggések a Maxwell-relációk

Vannak még: $\boxed{M: \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_S = -\left.\frac{\partial p}{\partial S}\right|_V}$ $\boxed{F: \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V}$

$\boxed{G: \left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_T = -\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p}$ $\boxed{H: \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_S = \left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_p}$

(Ha μ-t és u-t is belevesszük, akkor több van)

Alkalmazás: KM.-ből: $p + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T = \frac{T\kappa_T}{\beta}$ (korábbi tételben arra lépés volt)

$$p + \underbrace{\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T}_{\text{Kihasználjuk az } U\text{-t}} = p + T\underbrace{\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T}_{} - p\underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial V}\right|_T}_{1} = T\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T = T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V = \quad \text{Mx. el.}$$

$$= -T\frac{\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T}{\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p} = \frac{T \cdot V \cdot \kappa_T}{V\beta} = \boxed{\frac{T\kappa_T}{\beta}}$$

hányadosszabály

Joule-Thomsonnál is volt: $\quad 1$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_T = T\left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_T + V\underbrace{\left.\frac{\partial p}{\partial p}\right|_T}_{} \overset{\text{Mx.}}{=} -T\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p + V = -TV\beta + V = \boxed{V(1-T\beta)}$$

Scanned with CamScanner

Euler összefüggés:

Ismert $U(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \lambda U(S,V,n)$ (Elsőrendű homogén)

Ennek mindkét oldalát deriváljuk:

$/\frac{\partial}{\partial S} \Rightarrow T(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = T(S,V,n)$

$/\frac{\partial}{\partial V} \Rightarrow p(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = p(S,V,n)$

$/\frac{\partial}{\partial n} \Rightarrow \mu(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \mu(S,V,n)$

} Nulladrendű homogén ⇕ Intenzív állapotjelző

$$/\frac{\partial}{\partial \lambda} \Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_{V,n}(\lambda S, \lambda V, \lambda n)\cdot S + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{S,n}(\lambda S, \lambda V, \lambda n)\cdot V +$$

$$+ \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S,V}(\lambda S, \lambda V, \lambda n)\cdot n = T(\lambda S, \lambda V, \lambda n)\cdot S - p(\lambda S, \lambda V, \lambda n)V +$$

$$+ \mu(\lambda S, \lambda V, \lambda n)\cdot n = T(S,V,n)\cdot S - p(S,V,n)\cdot V + \mu(S,V,n)\cdot n =$$

$$= U(S,V,n) \Rightarrow \boxed{U = TS - pV + \mu n}$$ Euler összefüggés

Gibbs-Duhem alakjai:

$$dU = d(TS - pV + \mu n) = d(TS) - d(pV) + d(\mu n) =$$

$$= \underbrace{TdS - pdV + \mu dn}_{dU} + SdT - Vdp + nd\mu \Rightarrow \boxed{0 = SdT - Vdp + nd\mu}$$

Scanned with CamScanner

19. EGYENSÚLYI FELTÉTELEK

19.1. Ami kell

Összetett rendszerek: hő- és térfogatcsere; Belső változó fogalma; Egyensúly feltétele; Energia reprezentáció; Kapcsolat hőtartállyal; Állandó nyomás ill. állandó nyomás és hőmérséklet esete; Egykomponensű rendszer egyensúlya: Egyensúlyi állapot meghatározása; Mérlegszabály; Több változó esete; Stabilitási feltételek

19.2. Kidolgozás

Összetett rendszerek modellje

Vegyünk két tartályt, amik egymástól fallal vannak elválasztva! Az első tartályban az anyag belső energiája, térfogata és anyagmennyisége legyen rendre U_1, V_1, n_1, míg a másodikban lévőé U_2, V_2, n_2. A teljes rendszer zárt, azaz hőszigetelt, állandó térfogatú és a benne lévő anyagmennyiség is állandó. Ez alapján a teljes rendszer adatai:

$$U = U_1 + U_2 = konst. \quad V = V_1 + V_2 = konst. \quad n = n_1 + n_2 = konst.$$

Hőcsere összetett rendszerekben

Tegyük fel, hogy a két tartály között hőcsere történhet, az anyagmennyiség és a térfogat viszont mindkét oldalon állandó marad! Azt vizsgáljuk, ekkor milyen feltételek között alakul ki egyensúly. Ehhez vizsgáljuk meg a rendszer entrópiáját!

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S(U, V, n, U_1, V_1, n_1) = S_1(U_1, V_1, n_1) + S_2(U - U_1, V - V_1, n - n_1),$$

Ebben az U_1 változhat egyedül, ez a rendszer belső szabadsági foka. A megadott $S_1(U_1, V_1, n_1)$ és $S_2(U_2, V_2, n_2)$ függvények a két tartályban lévő anyag termodinamikai potenciáljai, így az anyag teljes termodinamikai viselkedését leírják. Kvázisztatikus hőcserét feltételezve az entrópia az egyik tartályban csökkenni, míg a másikban nőni fog, hiszen $\delta Q = T\mathrm{d}s$. Mivel a két részrendszerben a mikorállapotok egymástól függtelenek, a teljes rendszer mikorállapotainak száma ezek szorzatával egyenlő. A rendszer akkor van egyensúlbyan, ha a mikorállapotok száma maximális. A Boltzmann-entrópia viszont a mikorállapotok logaritmusával arányos ($S = k_B ln\Omega$), így akkor van egyensúly, ha a rendszer S entrópiája is maximális. Benne viszont csak U_1 tud megváltozni,ezért az összentrópia eszerinti deriváltja el kell hogy tűnjön. Egyensúlyban tehát:

$$\frac{\partial S}{\partial U_1}(U, V, n, U_1, V_1, n_1) = \frac{\partial S_1}{\partial U}(U_1, V_1, n_1) + \frac{\partial S_2}{\partial U}(U - U_1, V - V_1, n - n_1) \cdot \frac{\partial U_2}{\partial U_1} =$$
$$= \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$$

Tehát nem túl meglepő módon az entrópia akkor maximális, ha a hőmérsékletek kiegyenlítődnek. Fontos kiemelni, hogy egyensúlyben az S függvénynek csak U_1 belős változó szerinti deriváltja nulla, hiszen csak ez a mennyiség tudott megváltozni a hőcsere eredményeképp.

Hő- és Térfogatcsere

Most a két tarályt elválasztó falat cseréljük ki egy súrlódásmentesen mozgó dugattyúra. Így már nem csak hőáramlás lép fel, hanem térfogatuk is változni fog. Ekkor egyensúly esetén U_1 és V_1 belső változók deriváltjának is el kell tűnniük.

$$\frac{\partial S}{\partial U_1} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$$
$$\frac{\partial S}{\partial V_1} = 0 \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_1 = p_2$$

Továbbra sem túl meglepő módon most a hőmérséklet mellett a nyomás is kiegyenlítődött. Ha a rendszernek lennének egyéb belső szabadsági fokai, az előbbi gondolatmenetet elvégezhetnénk azokra is. Például ha megengednénk a részecskeáramlást, belátható, hogy akkor a kémiai potenciálok egyenlítődnének ki.

Energia reprezentáció

Képzeljünk el egy olyan rendszert, amikor az entrópia áramlik a két tartály között. Ilyen rendszer egyébként nem létezik, többek közt ezért kell *elképzelnünk*. Ekkor:

$$S = S_1 + S_2 = konst, \quad V_1 = konst, \quad V_2 = konst, \quad V = V_1 + V_2,$$
$$n_1 = konst, \quad n_2 = konst, \quad n = n8_1 + n_2$$

Itt a részrendszereket $U_1(S_1, V_1, n_1)$ illetve $U_2(S_2, V_2, n_2)$ termodinamikai potenciálok írják le. Keressük meg a belső energia entrópia szerinti szélsőértékét!

$$\frac{\partial U}{\partial S_1}(S, V, n, S_1, V_1, n_1) = \frac{\partial U_1}{\partial S}(S_1, V_1, n_1) + \frac{\partial U_2}{\partial S}(S - S_1, V - V_1, n - n_1) \cdot \frac{\partial S_2}{\partial S_1} =$$
$$= T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$$

Belátható, hogy ez a szélsőérték egy minimum lesz, tehát egyensúlyi állapotban a hőmérsékletek megegyeznek és energiaminimum van.

Kapcsolat hőtartállyal

Helyezzünk kapcsolatba egymással egy összetett rendszert (r) és egy hőtartályt (t) úgy, hogy közöttük hő áramolhat. A II. főtétel miatt az $S = S_r + S_t$ összentrópia maximalizálódni fog. Legyen a rendszer belső energiája $U_r(S, S_r, X_i)$, ahol X_i-vel jelöljük általánosan a belső változókat. A hőtartály energiája $U_t(S_t)$. Ezen kívül a hőtartálynak van még egy olyan kellemes tulajdonsága, hogy akármennyi hőt teszünk bele, vagy veszünk belőle ki, a hőmérséklete T_0 marad. Mindezek alapján a belső energia:

$$U_o(S, S_r, X_i) = U_r(S, S_r, X_i) + U_t(S - S_r)$$

A már megszokott módon keressük ennek az S_r és X_i szerinti minimumait.

$$\frac{\partial U_o}{\partial S_r}(S, S_r, X_i) = \frac{\partial U_r}{\partial S}(S_r, X_i) + \frac{\partial U_t}{\partial S}(S - S_r) = \frac{\partial U_r}{\partial S}(S_r, X_i) - T_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial U_r}{\partial S}(S_r, X_i) = T_0$$

Illetve:

$$\frac{\partial U_o}{\partial X_i}(S, S_r, X_i) = \frac{\partial U_r}{\partial X_i}(S, S_r, X_i) = 0$$

Ez az egyenletrendszer megoldható, de kellemetlen, Ezért saját magunkat megkímálve átírjuk az egészet szabadenergiára:

$$F_r(T_r, X_i) = U_r(S_r(T_r, X_i), X_i) - T_r S_r(T_r, X_i)$$

Ennek keressük az X_i szerinti deriváltját $T_r = T_0$ helyen:

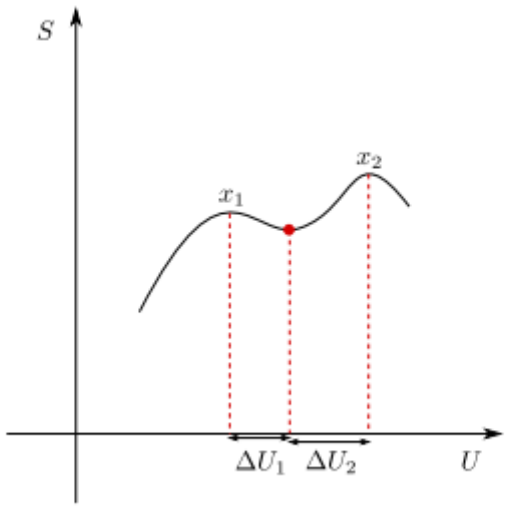
$$\frac{\partial F_r}{X_i}(T_0, X_i) = \frac{\partial U_r}{\partial S}(S_r, X_i) \cdot \frac{\partial S_r}{\partial X_i}(T_0, X_i) + \frac{\partial U_r}{X_i}(S_r, X_i) - T_0 \frac{\partial S_r}{\partial X_i}(T_0, X_i) = 0$$

Azaz ezen a helyen a rendszer szabadenergiája szélsőértéket vesz fel (ráadásul minimumot). Így ha ismerjük a szabadenregiát, csak az X_i változó szerinti minumumot kell megkeresnünk a probléma megoldásához. Azt kaptuk tehát, hogy összetett rendszert hőtartállyal kapcsolatba hozva az energia minimalizálódik, az alrendszeren belül pedig a szabadenergia minimalizálódik. Így látható, hogy nem is érdemes a teljes (hőtartályos) rendszert nézni, elég az alrendszerrel számolni. Egyéb esetekben más termodinamiak potenciálok minimalizálódnak, ezeket az alábbi táblázatban láthatjuk:

Külső kapcsolat	Egyensúly feltétele
Termosztát (T_0)	F minimalizálódik
Barosztát (p_0)	H minimalizálódik
p_0, T_0	G minimalizálódik

Egykomponensű rendszerek egyensúlya

Eddig láttuk, hogy két egyforma V térfogatú, n anyagmennyiségű alrendszer esetében akkor van egyensúly, ha minkét oldalon az energia U_0. Ekkor a teljes entrópia $2S(U_0, V, n)$ lesz. Tegyük fel, hogy anyagunk nem teljesen homogén, hanem két fázisban van: $U_0 - \Delta U_1$ és $U_0 + \Delta U_2$. Minden más továbbra is azonos. Ekkor az összentrópia $S(U_0 - \Delta U_1, V, n) + S(U_0 + \Delta U_2, V, n)$. Ez az összeg akár több is lehet, mint homogén anyag esetében, azaz az inhomogenitás növelheti az összentrópiát. Ekkor a függvény képe konvex lenne. Korábban viszont láttuk, hogy $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} < 0$. Ez itt nem teljesül, tehát szét fog esni az egész két alrendszerre, mert így nő az összentrópiája.



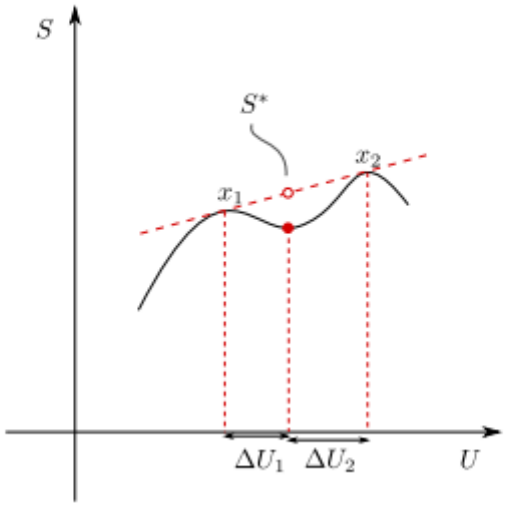
Tegyük fel, hogy ekkor az anyagnak x_1 része kerül az egyik alrendszerbe, és x_2 a másikba ($x_1 + x_2 = 1$). Ennek segítségével felírhatjuk (kis algebra után), hogy:

$$x_1 = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1 + \Delta U_2} \qquad x_2 = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_1 + \Delta U_2}$$

Az összentrópia ez alapján:

$$S^* = x_1 S(U_1, V, n) + x_2 S(U_2, V, n) = x_1 S_1 + x - 2S_2 = S_1 + \frac{\Delta U_1}{\Delta U_1 + \Delta U_2}(S_2 - S_1)$$

A fenti összefüggést hívjuk mérlegszabálynak, ami szerint az anyag akkor eshet két részre, ha így megnő az összentrópiája, aminek az értéke az U_0 helyen vett érintő lesz.



Ekkor az entrópia maximális értéke a görbe burkolóérintőjén érhető el, ahogy az a fenti ábrán is látható. Ilyenkor a két pontbeli (U_1, U_2) derivált megegyzik, tehát hőmérsékletük egyenlő lesz. Hasonlóan felírható, hogy amennyiben a rendszerünk két alrendszerre esik szét, a nyomásuknak és a kémiai potenicáluknak is meg kell egyezniük. Ezeket a különböző tulajdonságú, de azonos intenzív állapotjelzőkkel jellemzett állapotokat nevezzük fázisoknak, melyek tehát ugyanannak az anyagnak különböző megjelenési formái. Az S(U) függvény közbülső tartománya az instabil tartomány, ahol nem létezhet stabil egyensúlyban az anyag. Ezek alapján megfogalmazhatunk stabilitási feltételeket, azaz mikor lesz homogén a rendszer. Ehhez az entrópiafüggvénynek konkávnak kell lennie, tehát:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U}\frac{1}{T} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial U} = -\frac{1}{T^2}\frac{1}{\frac{\partial U}{\partial T}} = -\frac{1}{T^2}\frac{1}{nRc_V} < 0$$

Ebből következik, hogy $c_V > 0$. Ezt nevezzük Le Chatelier-elvnek. Ha ez nem teljesülne és kis hőmérsékletkülönbség alakulna ki két térrész között, akkor hő áramolna a nagyobb hőmérsékletű hely felé és a rendszer instabillá válna. Mivel az entrópia nemcsak a belső energia függyvénye, hanem például a térfogaté is, arra is ki kell terjesztenünk a stabilitási feltételt. Képezzük tehát az $S(U, V)$ függyvény Hesse-mátrixát!

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} & \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \end{pmatrix}$$

Ennek a mátrixnak kell negatív definitnek lennie. Ebből következik, hogy
$c_V < 0$ és **det** H$<0 \Rightarrow \kappa_T > 0$.
Ha mindkettő teljesül, azt nevezzük Le Chatelier-Braun elvnek. Ha κ_T pozitív lenne, akkor pl egy dugattyú a nagyobb nyomás felé mozdulna el.

19.3. Megjegyzések

20. előadás jegyzete hasznos itt, gyakorlatilag az az egész tétel (Gajdán Gréta)

20. FÁZISÁTALAKULÁSOK ÉS ALACSONY HŐMÉRSÉKLETEK FIZIKÁJA

20.1. Ami kell

Van der Waals-gáz viselkedése Tc alatt; Kémiai potenciál meghatározása; Maxwell-szerkesztés; Elsőrendű fázisátalakulások; Gibbs-féle fázisszabály; CO2 és víz fázisdiagramja; Látens hő; Másodrendű fázisátalakulások; Kritikus opaleszcencia

20.2. Kidolgozás

20. TÉTEL

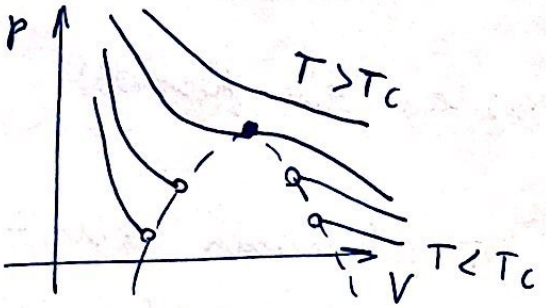
VdW gáz viselkedése T_c alatt.

Ismert: $\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$

$T < T_c \Rightarrow \kappa_T > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T < 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T < 0$ ↯

$\Rightarrow$ instabilitás, az anyag két fázisra esik szét és $p_1 = p_2, T_1 = T_2, \mu_1 = \mu_2$

A két fázis egyalapján egy izotermán van valamint a p-V diagramon egy vízszintes vonalon.



$\mu_1 = \mu_2$ feltétel is van.

Ismert:

$dU = TdS - pdV + \mu dn$

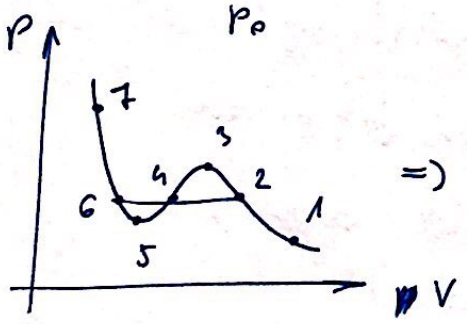
$SdT - Vdp + nd\mu = 0$

Bevezetjük be: $s = \frac{S}{n}$ $v = \frac{V}{n}$

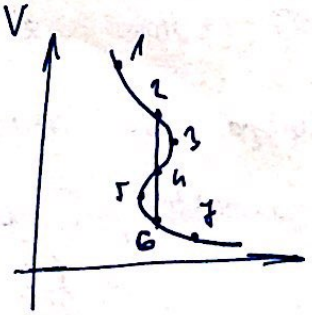
$$d\mu = \frac{V}{n}dp - \frac{S}{n}dT = vdp - sdT$$

Egy izoterma mentén: $d\mu = vdp$, hiszen ekkor $dT = 0$

$$\Rightarrow \mu(p) = \int_{p_0}^{p} v\,dp' + \mu(p_0)$$ (V-p grafikon alatti terület)



$\Rightarrow$

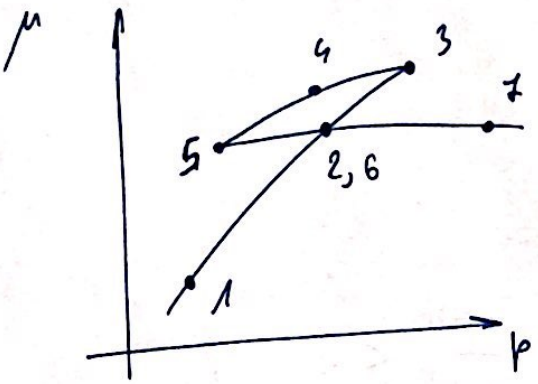


1-3: $p\uparrow$ $\mu\uparrow$

3-5: $p\downarrow$ $\mu\downarrow$

5-7: $p\uparrow$

Scanned with CamScanner



2,4,6 tartozik $p_2 = p_4 = p_6$ - hoz,
2,6 esetében $\mu_2 = \mu_6$ is teljesül.

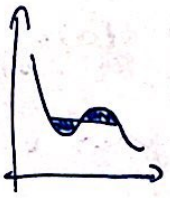
$T_2 = T_6$, $p_2 = p_6$, $\mu_2 = \mu_6$

⇓

Ez felel meg az egyensúlyi fázisoknak

Maxwell szerkesztés:

$$\mu_2 = \mu_6 \Rightarrow \Delta\mu_{2,6} = \int_2^6 v\,dp = 0$$



2-6 pontok között az anyag egyszerre két fázisban van jelen.

Víz-gőz fázisátalakulásnál μ, G, p, T folytonosan változik, S, U, F, H, C, β stb. ugrik. Az olyan fázisátalakulások, melyekben a termodinamikai potenciálok valamely külső változó szerint deriváltja ugrik ⇒ elsőrendű

Ha a második deriált ugrik másodrendű

(Általát a jegyzetben)

A fázisátalakulás során munkát kell végezni, ez a látens hő.

Fázisdiagram: $p-T$ síkon jelöljük, hogy mely tartományon az anyagunk milyen fázisa van.

(A fázisátalakulásokhoz tartozó $p-T$ értékek összessége a fázishatár.)

Scanned with CamScanner

Hármaspont: Szilárd, folyadék és gáz fázis egyszerre van jelen. => $1K \equiv \frac{\text{víz hármaspont } T\text{-je}}{273,16}$

Kritikus opaleszcencia:

$$K_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_T = -\frac{1}{V}\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial V}\big|_T} = -\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{0} = -\infty$$

Mivel a kritikus pontnál $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$ => nincs stabilizáció => => nagy sűrűségfluktuációk => ~~méretük a korrelációs hossz~~ klaszterek, $\rho \sim n-1$ (törésmutató)

=> törésmutató is fluktuálódik => összevissza szórja a fényt.

Gibbs-féle fázisszabály:

$$c_i = \frac{n_i}{\sum_j n_j} \equiv \frac{n_i}{n} \quad 1 \le i \le k \Rightarrow \sum_i c_i = \frac{\sum_i n_i}{\sum_j n_j} = 1$$

(k komponensű, m fázisú anyag)

$$G(\underbrace{T, p, c_1, \dots, c_{k-1}, n}_{k+2 \text{ változó}}) = n \cdot g(\underbrace{T, p, c_1, \dots, c_{k-1}}_{k+1 \text{ változó}})$$

$$G = \sum_{i=1}^{k} n_i \mu_i$$

$$\mu_i = \frac{\partial G}{\partial n_i}\bigg|_{T, p, n_j \neq n_i} \Rightarrow \mu_i^{(n)}(T, p, c_1^{(n)}, \dots, c_{k-1}^{(n)})$$

Scanned with CamScanner

(i: a komponens, k: a fázis indexe)

Két komponens, két fázis esete:

$$G = \mu_1^{(1)} n_1^{(1)} + \mu_1^{(2)} n_1^{(2)} + \mu_2^{(1)} n_2^{(1)} + \mu_2^{(2)} n_2^{(2)}$$

Termodinamikai egyensúlyban ennek minimuma van:

$$dG = 0 \quad , \quad dn_i^{(1)} = - dn_i^{(2)}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i,k=1}^{2} \mu_i^{(k)} dn_i^{(j)} = 0 \Rightarrow (\mu_1^{(1)} - \mu_1^{(2)}) dn_1^{(1)} + (\mu_2^{(1)} - \mu_2^{(2)}) dn_2^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1^{(1)} = \mu_1^{(2)}, \quad \mu_2^{(1)} = \mu_2^{(2)}$$

(Ha több komponens van, akkor is ez áll.)

$$\Downarrow$$

$k(m-1)$ összefüggés, $m(k-1)+2$ független változó

Δ = változók száma − feltételek száma $= 2 + m(k-1) - k(m-1) =$

$= 2 + k - m$ (kritikus pontban $\neq 0$)

Scanned with CamScanner

21. IDEÁLIS GÁZ ENTRÓPIÁJA

21.1. Ami kell

Fázistér fogalma; Konfgurációs entrópia; Termikus entrópia; Állapotegyenlet származtatása; Ergodicitás; Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerepe; Entrópia extenzivitása; Ideális gáz U(S,V,n) függvénye

21.2. Kidolgozás

21. TÉTEL

FÁZISTÉR:

Mikroállapotot: $\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, \underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_N$ - ek alapján határozható meg $\Rightarrow 6N$ db adat kell.

Geometriailag szemléltethető tér, melyben egy dinamikai rendszer összes lehetséges állapotai szerepelnek, a rendszer minden egyes lehetséges állapota a fázistér egy pontjának feleltethető meg.

↳ Esetünkben az a $6 \cdot N$ dimenziós tér, melyben a rendszer állapotai vannak.

A rendszer összentrópiája termikus és konfigurációs entrópiából áll.

$\Omega_{conf}^{(V,U)} = \left(\frac{V}{\Delta x^3}\right)^U$ ← részecskeszám

: Hányféleképpen valósulhatnak a részecskék a dobozba.

$\Omega_{term.}$: Hányféleképpen lehet az impulzusokat változtatni.

1 részecske: $\underbrace{\frac{p_{1x}^2}{2m}}_{U_x} + \underbrace{\frac{p_{1y}^2}{2m}}_{U_y} + \underbrace{\frac{p_{1z}^2}{2m}}_{U_z} = U \rightarrow p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2 = 2mU$

⇓

Gömb egyenlete

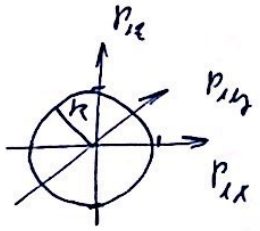
N részecske:

$$\frac{p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2}{2m} + \ldots + \frac{p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2}{2m} = U \Rightarrow \underbrace{p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2 + \ldots + p_{Nz}^2}_{3N \text{ db.}} = 2mU \Rightarrow$$

Scanned with CamScanner

Hipergömbfelület $3N$ dim-ban.

Δp^{3N} elemi kocka



$R = \sqrt{2mU}$ $\quad R' = \sqrt{2m(U+\delta U)}$

N darabos gömb térfogata: $V_N(R) = \dfrac{\pi^{\frac{N}{2}} \cdot R^N}{\left(\frac{N}{2}\right)!}$ $\Rightarrow$ $\int$ sz. kell.

$$\Downarrow$$

$$\ell_{term.} = \frac{V_{3N}\left(\sqrt{2m(U-\delta U)}\right) - V_{3N}\left(\sqrt{2mU}\right)}{\Delta p^{3N}} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Delta p^{3N}\left(\frac{3N}{2}\right)!} \cdot \underbrace{\frac{\left[2m(U+\delta U)\right]^{\frac{3N}{2}} - (2mU)^{\frac{3N}{2}}}{\delta U}}_{f'(U)} \cdot \delta U =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Delta p^{3N}\left(\frac{3N}{2}\right)!} \cdot \delta U \cdot \frac{3N}{2} \cdot (2mU)^{\frac{3N}{2}-1} \cdot 2m =$$

$$= \frac{(m\pi)^{\frac{3N}{2}}}{\Delta p^{3N} \cdot 2\left(\frac{3N}{2}\right)!} \cdot \frac{\delta U}{U} \cdot U^{\frac{3N}{2}}, \qquad \ln(A \cdot \Omega) = \ln A + \ln \Omega \Rightarrow$$

$\left(\frac{3N}{2}\right)! \approx 3N!$

$\ln A \ll \ln \Omega$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{(m\pi)^{\frac{3N}{2}}}{2\Delta p^{3N} \cdot \left(\frac{3}{2}N\right)!} \cdot U^{\frac{3N}{2}} = \Omega_{term}(U,N)}$$

$$\Rightarrow \Omega(U,V,u) = \Omega_{konf.} \cdot \Omega_{term} = \frac{(m\pi)^{\frac{3N}{2}}}{2(\Delta x \Delta p)^{3N}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2}N\right)!} \cdot V^N \cdot U^{\frac{3N}{2}}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow S(M,V,m) = k_B \cdot \ln \Omega(M,V,m) =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2} k_B \cdot N \cdot \ln(mT) - 3 \ln \Delta x \Delta p \, k_B \cdot N - k_B \ln \frac{3N}{2}!}_{C(N)} - k_B \cdot N \cdot \left(\ln V + \frac{3}{2} \ln M\right)$$

$C(N)$ (Csak N függő)

$$\Rightarrow \frac{1}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial M}\right|_{V,N} = k_B \cdot N \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{M} \Rightarrow M = \frac{3}{2} N \cdot k_B \cdot T = \frac{3}{2} nRT \checkmark$$

$$\frac{p}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_{M,N} = k_B \cdot N \cdot \frac{1}{V} \Rightarrow p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T = n \cdot R \cdot T \checkmark$$

(Ez is fundamentális egyenlet ennek)

Ergodicitás: Ergodikusnak nevezünk egy dinamikai rendszert, ha elegendően hosszú idő alatt minden – a megmaradási törvények által megengedett – állapotát felveszi.

Határozatlansági reláció:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

$\Uparrow$

$6N$ dimenziós térben elemi kocka, egy részecske helyét és impulzusát nem tudjuk tetszőleges pontossággal meghatározni; ezért tetszőleges nagyságú ezek az elemi kockák, ennél pontosabbat nem lehet csinálni.

Entrópia extenzivitása:

$$S(2M,2V,2N) = 2S(M,V,N) \Rightarrow \text{Ezt várjuk}$$

Scanned with CamScanner

Ismert (Stirling-formula): $\ln N! \approx N \cdot \ln N - N \approx N \cdot \ln$

$$\Rightarrow -k_B \cdot \ln\left(\frac{3N}{2}\right)! \simeq -k_B \frac{3N}{2} \cdot \ln\left(\frac{3N}{2}\right) = k_B N \left(\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} + \ln N^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow S(U,V,N) = k_B \cdot N(\ldots) + k_B N \left(\ln V + \ln U^{3/2} - \ln N^{3/2}\right)$$

↑ Korábban levezetett képletből, itt nem leírjuk

$$\Rightarrow k_B \cdot N(\ldots) + k_B \cdot N \cdot \left(\ln V \left(\frac{U}{N}\right)^{3/2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Látható, hogy ez nem elsőrendű homogén $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Feloldás: Gibbs-paradoxon: A részecskék nem megkülönböztethetőek, a mikroállapotok lehetséges száma kap egy $\frac{1}{N}$-es szorzót emiatt $\Rightarrow$ így már elsőrendű homogén lesz.

Ideális gáz $U(S,V,n)$ függvénye:

(Nem értem ez hogy jön ide, gondolom a fundamentális egyenlet kell.

Scanned with CamScanner

22. KANONIKUS SOKASÁG

22.1. Ami kell

Maxwell-Boltzmann-eloszlás; Boltzmann-faktor levezetése; Állapotösszeg fogalma; Mikrokanonikus és kanonikus sokaság fogalma

22.2. Kidolgozás

Lsd. képek.

22.3. Megjegyzések

Órai anyag alapján készült, az elején a hosszú levezetés a Maxwell-Boltzmannál ennek alapvetően a főbb lépéseit kell tudni, viszont szerintem átláthatóbbak így a számításokkal, viszont köszönhetően az online vizsgának ez konkrétan nem lesz számon kérve (Ispa állítása alapján). Ha bármi hiba vagy nem olvasható stb.. –> Malatinszky Adél

22. Kanonikus sokaság

Maxwell – Boltzman eloszlás

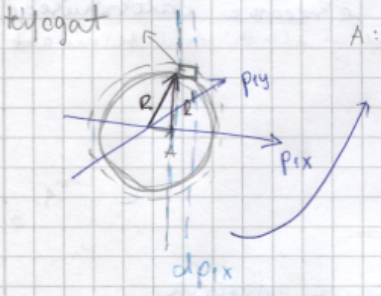
n: ütköző gázmolekulák sebesség szerinti eloszlásának meghatározása

✓ mikroállapotok valószínűsége =

↳ De! tapasztalat részecskék nagyjából ugyanolyan sebességgel mozognak, és egyenletesen töltik ki a teret

Nézzük meg 1 részecskének a várható sebességét:

N dimenziós hipergömb



A: adott értek

Mekkora az adott "sáv" és a gömb metszete?

$P(p_{1x})\, dp_{1x}$

"p_{1x} dp_{1x} környezetébe esésének valószínűsége"

$$R' = \sqrt{2mU - p_{1x}^2}$$

$$P(p_{1x})\, dp_{1x} = \frac{\left[V_{3N-1}\left(\sqrt{2m(U+\delta U) - p_{1x}^2}\right) - V_{3N-1}\left(\sqrt{2mU - p_{1x}^2}\right)\right] dp_{1x}}{V_{3N}\left(\sqrt{2m(U+\delta U)}\right) - V_{3N}\left(\sqrt{2mU}\right)}$$

külső "körgyűrű" — kihasított "kör" téfogat — belső "körgyűrű"

↳ gömbhély téfogata

emlékeztető:

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}} R^N}{\left(\frac{N}{2}\right)!}$$

$$P(1x) = \frac{\frac{\pi^{\frac{3N-1}{2}}}{\left(\frac{3N-1}{2}\right)!}\, \cancel{\delta U}\, \frac{[2m(U+\delta U)]^{\frac{3N}{2}} - (2mU)^{\frac{3N}{2}}}{\delta U}}{\frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!}\, \cancel{\delta U}\, \frac{[2m(U+\delta U]^{\frac{3N}{2}} - (2mU)^{\frac{3N}{2}}}{\delta U}}$$

bővítek $\frac{\frac{\delta U}{\delta U}}{\frac{\delta U}{\delta U}}$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3N}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\cancel{\frac{3N-1}{2}}\, (2mU - p_{1x}^2)^{\frac{3N-3}{2}} \cdot \cancel{2m}}{\cancel{\frac{3N}{2}}\, (2mU)^{\frac{3N-2}{2}} \cdot \cancel{2m}} = \sqrt{\frac{3N}{2\pi}}\, \frac{(2mU)^{\frac{3N-3}{2}} \left(1 - \frac{p_{1x}^2}{2mU}\right)^{\frac{3N-3}{2}}}{(2mU)^{\frac{3N-2}{2}}}$$

fel lett használva $(N+\frac{1}{2})! \approx \sqrt{N} \cdot N!$, δU tagokkal elvégezve a deriválást, és az egyszerűsítéska kihasználva hogy N nagyon nagy $\frac{3N-1}{2} \approx \frac{3N}{2}$

$$= \sqrt{\frac{3N}{2\pi m U}} \left(1 - \frac{p_{1x}^2}{2mU}\right)^{\frac{3N-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \left(1 - \frac{p_{1x}^2}{2mU}\right)^{\frac{3N-3}{2}}$$

↳ 1 hez nagyon közeli szám

ahol kihasználtuk, hogy $U = \frac{3}{2} k_B N T$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \, e^{-\frac{p_{1x}^2}{2mU}\cdot\frac{3N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \, e^{-\frac{p_{1x}^2}{2m k_B T}}$$

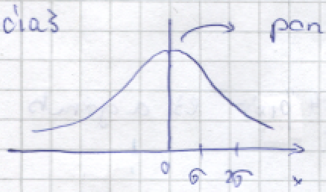
ahol felhasználtuk $(1+\varepsilon)^n = \left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]^{\varepsilon n} \to e^{\varepsilon n}$ határértéket, valamint $U = \frac{3}{2} N k_B T$

Normális eloszlást mutat

Normál eloszlás

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \sigma_{p_{1x}}^2 = m k_B T \text{ lesz a szórása}$$

σ: szórás



→ pont 0-val menő részecske valószínűsége 0 // 1 pont függvény alatti területe miatt

További következtetések:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \, e^{-\frac{p_{1x}^2}{2m k_B T}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \, e^{-\frac{E_{kin,x}}{k_B T}}$$

normalizáló konstans; x irányú kinetikus energia

BOLTZMANN FAKTOR

Figyeljük meg, hogy E_{kin} helyett E_{pot} megjelenik a barometrikus magasság formula (lsd. 5. tétel)

Átlagok:

$\langle p_{1x}\rangle = 0$ → átlag 0, de a sebesség abszolútértékének a várható értéke már $\neq 0$

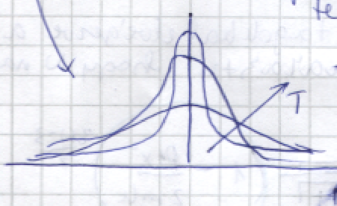
$\langle p_{1x}^2\rangle = \sigma_{px}^2 = m k_B T$

$$\langle E_{kin,x}\rangle = \frac{\sigma_{p_{1x}}^2}{2m} = \frac{1}{2} k_B T$$

→ összhangban van a kinetikus gázelmélettel

De! ott feltettük, hogy ∃ átlagseb.

ekvipartíció tétele is kijön



→ alatti terület mindig 1, hőmérséklet növelésével lapul a görbe

Mikrokanonikus elszlás:

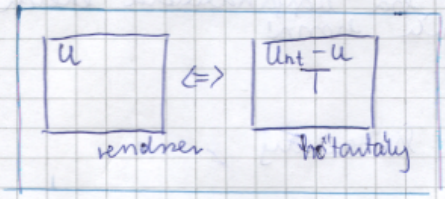
~: ∘ minden állapot egyforma a állapot ⇒ $P(a) = a'U$ valószínűségük egyforma

∘ izolált rendszerben

∘ $U = a'U$

pl: ideális gáz dobozmodelljénél használjuk

Boltzmann faktor levezetése:



↳ igaz lesz rá a mikrokanonikus elszlás

vegyünk a_1 és a_2 állapotot

$P(a_1)$, $P(a_2)$ valószínűségek

$P(a_1) = \Omega_{ht}(a_1) = \Omega_{ht}(U - U_1)$

↳ hányféle állapotot vehet fel a hőtartály, ha a rendszer a_1-es állapotban van

$P(a_2) = \Omega_{ht}(a_2) = \Omega_{ht}(U - U_2)$

Kérdés: Mennyiben különbözik a mikroállapotok száma?

arányukat vizsgálva: $\frac{P(a_1)}{P(a_2)} = \frac{\Omega_{ht}(U-U_2)}{\Omega_{ht}(U-U_2)} =$

$$= \frac{e^{\frac{S_{ht}(U-U_1,\dots)}{k_B}}}{e^{\frac{S_{ht}(U-U_2,\dots)}{k_B}}} =$$

kül. extenzív változók

Entrópia

$S = k_B \ln \Omega(U, V, N$

$\Omega = e^{\frac{S(U,V,N)}{k_B}}$

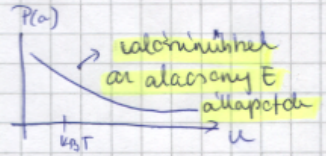
Tudjuk, hogy bármennyi hőt veszek ki a hőtartályból a hőmérséklete nem változik meg így:

$$\left.\frac{\partial S_{ht}}{\partial U}\right|_{\dots} = \frac{1}{T}$$

$$= e^{\frac{1}{k_B}\left(S_{ht}(U-U_1,\dots) - S_{ht}(U-U_2)\right)} = e^{\frac{1}{k_B}\left(\cancel{S_{ht}(U)} - \frac{\partial S_{ht}}{\partial U}U_1 - \cancel{S_{ht}(U)} - \frac{\partial S_{ht}}{\partial U}U_2\right)}$$

Taylor sorfejtés

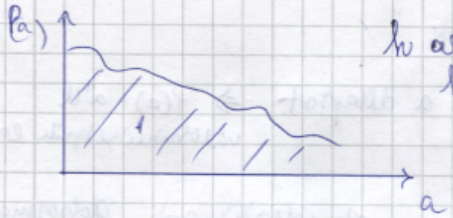
$$= e^{\frac{U_2-U_1}{k_BT}} = \frac{e^{-\frac{U_1}{k_BT}}}{e^{-\frac{U_2}{k_BT}}} \Rightarrow P(a) \sim e^{-\frac{U_a}{k_BT}}$$



↳ csak az alrendszert nezve a mikrokanonikus rendszerben nem lesz ugyanannyi a valószínűsége ∀ állapotnak

pl: vezetési jelenségekkel → e energiája → vezetés és szigetelés

Kanonikus eloszlás



h alakja milyen úgy, hogy a függvény alatti terület 1.

$$\sum_a P(a) = \sum_a C e^{-\frac{U_a}{k_B T}} = 1 \quad = C = \frac{1}{\sum_a P(a)} = \frac{1}{\sum_a e^{-\frac{U_a}{k_B T}}}$$

állapot összeg

$$\boxed{P(a) = \frac{e^{-\frac{U_a}{k_B T}}}{\sum_{a'} e^{-\frac{U_{a'}}{k_B T}}}}$$

→ ∀ állapotnak más a valószínűsége, kivéve ha ugyanakkora energia tartozik hozzá

KANONIKUS ELOSZLÁS

~ : T hőmérsékletű hőtartály

$P(a) = \dots$

23. OLDHATÓSÁG

23.1. Ami kell

Oldódás mikroszkopikus modellje állandó T és p esetén; Mikroállapotok száma; Keveredési entrópia; Egyensúly feltétele; Oldhatósági határ; Fázisdiagram

23.2. Kidolgozás

Oldódás mikroszkópikus modellje

Az oldódás modelljét órán egy egyszerű sóoldat viselkedésével vizsgáltuk, állandó hőmérsékleten és nyomáson. Egy pohár vízben N_v db víz és N_s db só van, a sót 1 molekulának tekintjük (NaCl). Jelöljük c-vel azt a belső változót, ami azt jelöli mennyi só oldódik fel. Ekkor felírhatjuk hogy: $c * N_S$ db részecske oldódik a vízben, illetve $(1-c) * N_s$ részecske marad a pohár alaján. (ha minden feloldódik c=1) Mivel T,p rögzített, ezért tudjuk hogy a szabadentalpia (Gibbs-potenciál) minimalizálódik. Ekkor felírhatjuk az egyensúlyi helyzetet:

$$G(t,p,N_v,N_s,c) = U(T,p,N_v,N_v,c) + pV(T,p,N_s,N_v,c) \tag{3}$$

Most, ennek az egyenletnek, minden függvényét próbáljuk meg külön-külön megkereseni. Nézzük meg a só és víz belső energiáját, legyen U_0 a víz energiája abban a pillanatban amikor a só bekerül, de még nem kezdett el oldódni.

$$U(T,p,N_s,N_v,c) = U_0(T,p,N_s,N_v) + cN_s\Delta U \tag{4}$$

A $cN_s\Delta U$ az oldódás során létrejövő energia változás. Felírhatjuk a térfogatot is a fennti módszerrrel, de azt a közelítést tesszük, hogy:

$$V(T,p,N_s,N_v,c) = V_0(T,p,N_s,N_v) \tag{5}$$

Az entrópia változás pedig:

$$S(T,p,N_s,N_v,c) = S_0(T,p,N_s,N_v) + S_{mix}(N,N_s,c) \tag{6}$$

Ahol az S_{mix}, függ Ω-tól, mivel a beoldódótt részecskék vándorolhatnak a pohrá vízben, amivel megnő a mikro állapotok száma, tehát Ω_0 megszorzom egy keveredési Ω-val.

$$\Omega_0(T,p,N_s,N_v) * \Omega_{mix}(N_s,N_v,c) \tag{7}$$

(A keveredési entrópiát a következő fejezetben írtam le) $x = \frac{cN_s}{N_v}$ itt közelítünk, ezt hozzá kéne adni, mivel azt mondjuk sokkal több a vízrészecske,az lentebb kiszámolt S-nek csak az első tagját veszzük, mivel a második elhanyagolhatóan kicsi

$$S(T,p,N_s,N_v,c) = S_0 - k_B N_V[\frac{cN_s}{N_v} ln(\frac{cN_s}{N_v})] \tag{8}$$

Ahhoz hogy megkapjuk G-t, le kell deriválni a függvényeineket c szerint, hogy a belső változót minimalizáljuk

$$\frac{\partial G}{\partial c} G(t,p,N_v,N_s,c) = \frac{\partial}{\partial c}(U_0 + cN_s\Delta U + pV_0 - TS_0 + k_B T N_v[\frac{cN_s}{N_v} ln(\frac{cN_s}{N_v})]) \stackrel{!}{=} 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial c} = N_s\Delta U + k_B T N_v[\frac{N_s}{N_v} ln(\frac{cN_s}{N_v}) + \frac{N_s}{N_v}] \tag{10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial c} = \Delta U + k_B T[ln(\frac{cN_s}{N_v}) + 1] \tag{11}$$

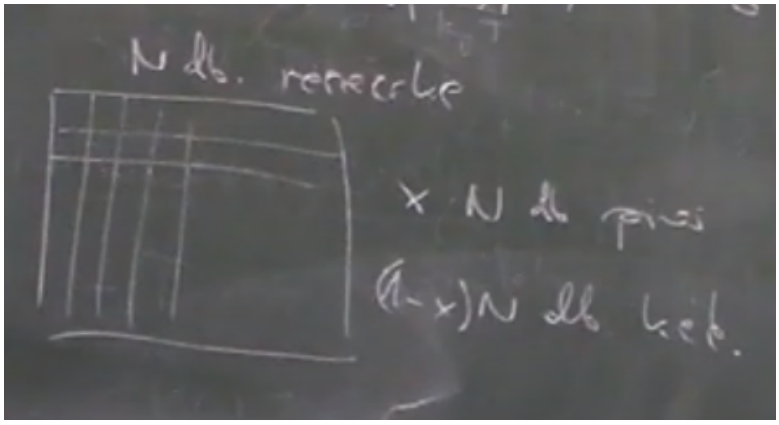
Az egyet elhanyagoljuk a logaritmus mellet, a rendetett egyenlet (vagyis Ispi nem számolt azzal a taggal ami kiejtené, ezért ezt mondta)

$$ln\frac{cN_s}{N_v} = \frac{-\Delta U}{-k_B T} \tag{12}$$

$$c = \frac{N_v}{N_c} \exp \frac{-\Delta U}{-k_B T} \tag{13}$$

Kiindulásként rögzítettük,hogy minden állapot valszínűsége ugyan az. Van N db részecském, egy zárt rendszerben,én 1 db részecskére koncentrálok, és abból az 1 részecskéből akartam kiszámolni az egész rendszer tulajdonságait, de mivel N nagy, ezért úgy viselekedik mintha egy hőtartályban lenne, így 1 részecskére kijön a Boltzman-faktoros eloszlás.

Mikroállapotok száma és keveredési entrópia



N db részecske, xN db piros $(1-x)N$ db kék, ezeket hogy tudom lerakni ebbe a rácsba? Ugyanis a mikróaállapotok száma arányos azzal hogy a golyókat hányféle képpen tudom elrendezni.

$$\Omega_m ix = \binom{N}{xN} = \frac{N!}{(xN!) * (1-x)N!} \tag{14}$$

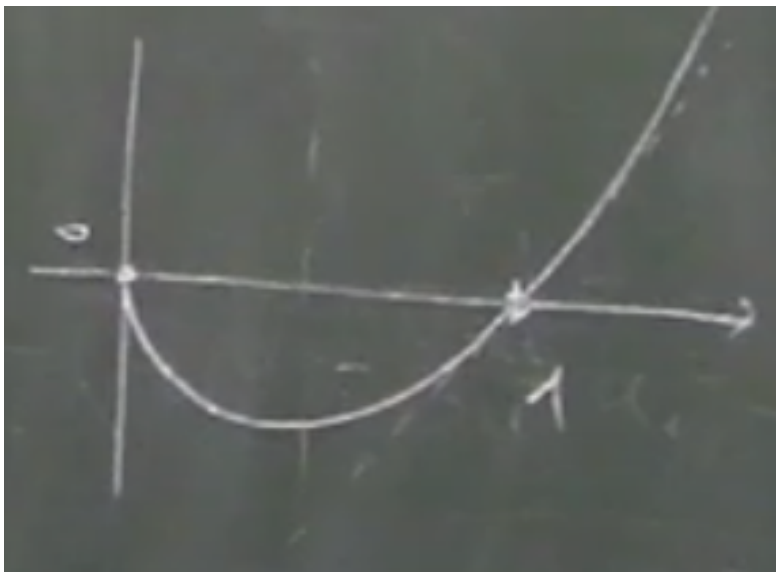
Ebből felírhatjuk a keveredési entrópiát, a logaritmus közelítésében a Stirling formula segít minket (a közpéső [10] ln-es lehet nem jó):

$$S_{mix} = k \ln \Omega_m ix = k[N \ln (N \ln(N) - N) - (xN) \ln(xN) + (xN) - (1-x)N \ln(1-xN) + (1-x)N] \tag{15}$$

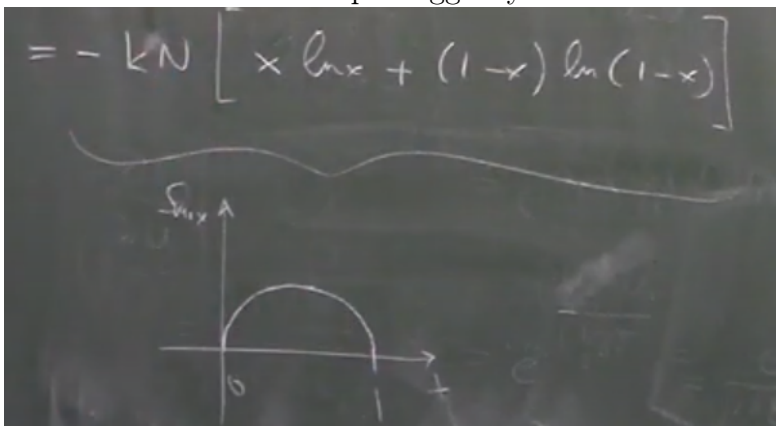
$$S_{mix} = k[N \ln(N) - xN \ln(x) - xN \ln(N) - (1-x)N \ln(N)(1-x) - (1-x)N \ln(1-x)] \tag{16}$$

$$S_{mix} = -Nk[x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)] \tag{17}$$

Bármilyen keveredésre igaz, 0 és 1 között keressük $xln(x)$-et mivel x arányszám, $ln(x)$ végig negatív. A függvény meredeksége, 0-ban végtelen, 1-ben 0.



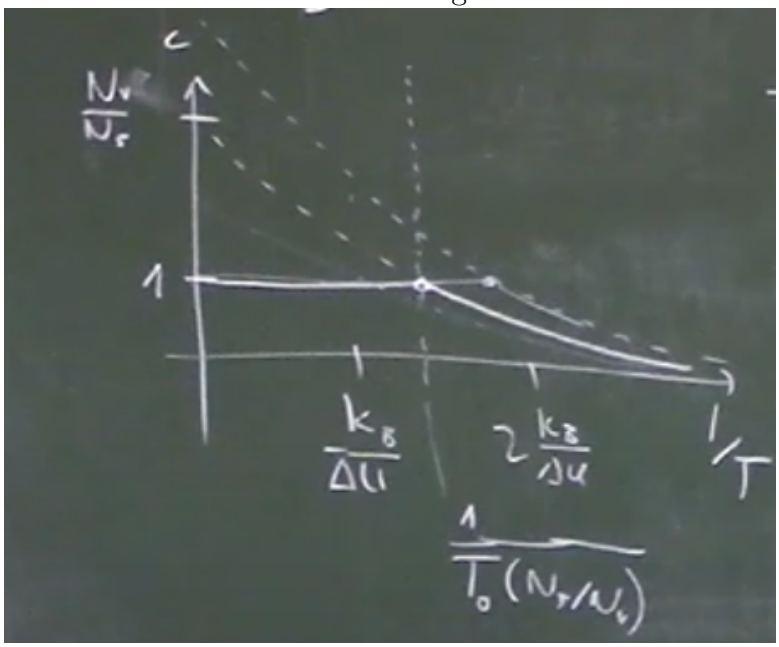
Az entrópia függvénye



Ebből látszik hogy ugrásszerűen megugrik az entrópia még kicsi megváltozás esetén is.

Oldhatósági határ

Oldhatóság



T_o: oldhatósági határ Az oldhatósági határ minden $\frac{N_s}{N_v}$-re más,ezért a felső diagram adott pontra érvényes csak. A telített oldatra igaz:

$$\frac{N_s}{N_v} \exp \frac{-\Delta U}{k_B T_0} = 1 \tag{18}$$

Amit átrendezve megkapjuk belőle a T_o-t

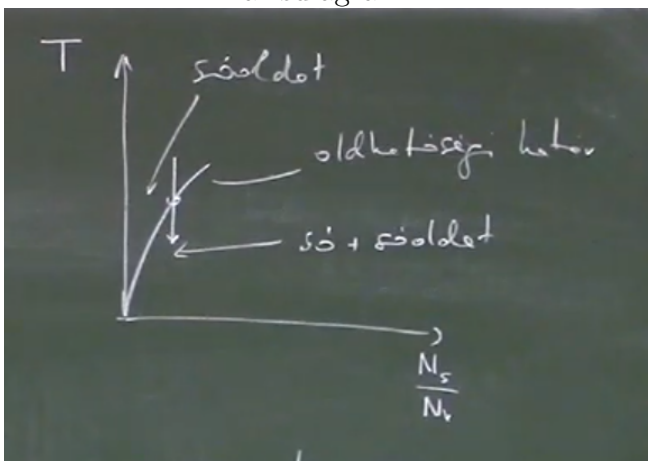
$$\ln(\frac{N_s}{N_v}) = \frac{-\Delta U}{k_B T_0} \tag{19}$$

$$T_o = \frac{\Delta U}{k_B T_0} \frac{1}{\ln(\frac{N_v}{N_s})} \tag{20}$$

Fázisdiagramm

Az oldhatósági határ 2 részre osztja a diagrammunkat, az egyik rész az tiszta oldat,a másik rész az ahol az oldat és oldandó anyag egyszerre van jelen. Hőmérséklet csökkenésével, ha átlépünk a határon elkezd kiválni az anyag

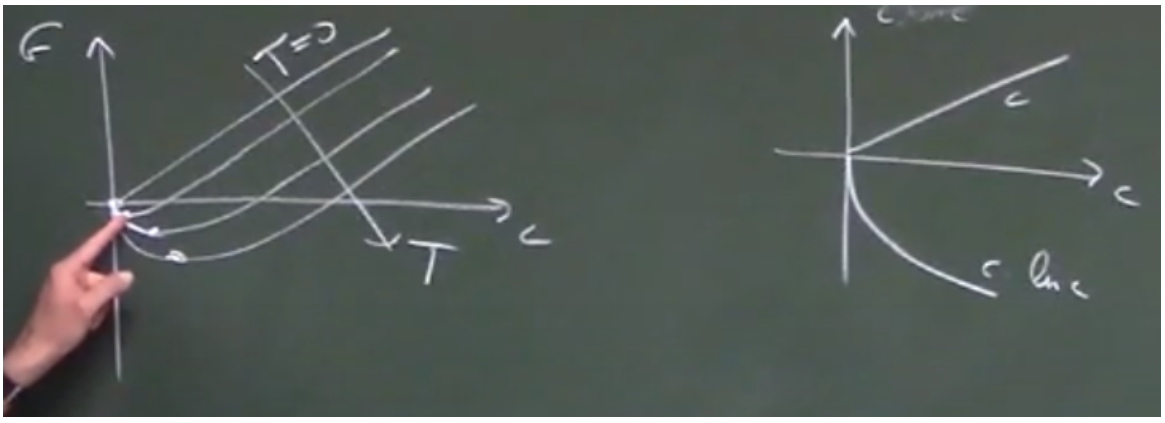
Fázisdiagramm



A c függő Gibbs potenciál függ a kezdeti állapottól, Ac-tól $= \Delta U$ ami az oldódásból származott, illetve $Bc\ln(c)$ ami az entrópia függvénye. A, B az összes konstans tömörítve

$$G(c) = G_0 + Ac + Bc\ln(c) \tag{21}$$

Ennek az egyenletnek kerestük c szerinti minimumát, és látjuk, hogy mindig oldódik anyag a vízbe kivéve $T = 0$



23.3. Megjegyzések

WR

24. ALACSONY HŐMÉRSÉKLETEK FIZIKÁJA ÉS HŐVEZETÉS

24.1. Ami kell

Thomsen-Berthelot-szabály; A termodinamika III. főtétele; Anyagi állandók viselkedése 0 K közelében; Planck-tétel; Hőterjedési folyamatok megkülönböztetése; Egyes folyamatok jellemzői és köztük lévő különbségek; Fourier-törvény; Hővezetési-együttható értelmezése.

24.2. Kidolgozás

24. TÉTEL

Hőterjedési folyamatok:

- Hővezetés → folytonos közegben, inhomogén hőmérséklettel, állandó összenergiával
- Konvekció → áramlással gázban
- Hősugárzás ⇒ összefüggő közeg nélkül, elektromágneses sugárzással és folyadékban

$W = c_p \cdot \varrho \cdot T \qquad \int_V dW = dQ.$

$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = c_p \cdot \varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \qquad [\underline{j}] = \frac{J}{m^2 \cdot s}$

$\underline{j} \sim \underline{\nabla} T \Rightarrow \boxed{\underline{j} = -K \cdot \underline{\nabla} T}$ Fourier tv.

$\left(\operatorname{div} \underline{j} = \operatorname{div}(-K \cdot \underline{\nabla} T) = -K \operatorname{div} \underline{\nabla} T = -K \Delta T\right.$

$c_p \cdot \varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -K \cdot \Delta T$

$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{c_p \cdot \varrho} \Delta T}$ (Hővezetési/diffúziós egyenlet)

Hővezetési e.h.: $[K] = \frac{J}{km \cdot s} = \frac{W}{m \cdot K}$

Scanned with CamScanner