1. Egyszerű deformációk, nyújtás, haránt összehúzódás, összenyomás, nyírás

Lineárisan közelítünk, $F \sim \Delta l$, és $\Delta l \ll l$.

Nyújtás során azt tapasztaljuk: $\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$

$\uparrow$ anyagra jellemző állandó, Young-modulus

$\sigma := \frac{F}{A}$ feszültség

$\frac{\Delta l}{l} := \varepsilon$ deformáció $\qquad \sigma = E \cdot \varepsilon$, ez a Hooke-törvény.

Haránt összehúzódás során az anyagok elvékonyodnak nyújtás során.

d az anyag vastagsága, $\frac{\Delta d}{d} = -\eta \frac{\Delta l}{l}$ $\quad 0 < \eta < 0{,}5 \quad$ η: Poisson-szám

Összenyomásnál hasonlóak elmondhatók.

$$V = l d^2 \qquad V' = (l + \Delta l)(d + \Delta d)^2 = V + \Delta V$$

$$\Delta V = (l + \Delta l)\left(d^2 + 2d\,\Delta d + \cancel{(\Delta d)^2}\right) - l d^2$$

$$\Delta V = d^2 \Delta l + 2 d l \Delta d$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} \qquad \frac{\Delta d}{d} = -\eta \frac{\Delta l}{l}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l}\overbrace{(1 - 2\eta)}^{\text{térfogati tágulási együttható}} = (1 - 2\eta)\frac{\sigma}{E}$$

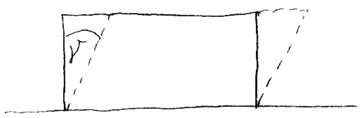
$\sigma = -3P$ $\quad$ P az összenyomás-feszültség

P mind 3 irányú erőt számolja

$$\frac{\Delta V}{V} = -\underbrace{\frac{3(1 - 2\eta)}{E}}_{1/K \text{ kompressziómodulus}} P$$

$P > 0$ ha összenyomjuk

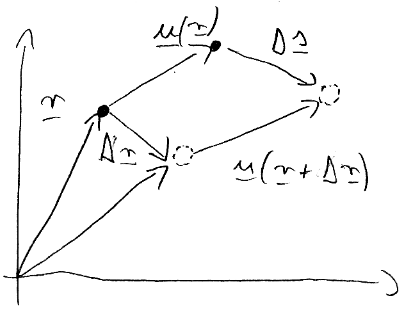
Nyírás



$\frac{F}{A} = \mu \cdot \gamma = \tau \leftarrow$ nyírási feszültség

$\uparrow$ nyírási modulus, ált. nem független E-től és η-tól

2. deformációs tenzor bevezetése



$$\Delta\underline{s} = \underline{r} + \Delta\underline{r} + \underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) - \underline{r} = \Delta\underline{r} + \underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r})$$

$$\Delta\underline{u} = \underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) = \Delta\underline{s} - \Delta\underline{r}$$

!!!

$$\Delta\underline{u} = \frac{\partial\underline{u}}{\partial\underline{r}}\Delta\underline{r} \qquad \frac{\partial\underline{u}}{\partial\underline{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\beta}} \qquad \beta_{ij} = \partial_j u_i$$

$$\Delta\underline{u} = \underline{\underline{\beta}}\,\Delta\underline{r}$$

↑

disztorzió

Mi nagyon szeretnénk tudni $\frac{|\Delta\underline{s}| - |\Delta\underline{r}|}{|\Delta\underline{r}|}$-t.

$$\Delta\underline{s} = \Delta\underline{u} + \Delta\underline{r} = (\underline{\underline{\beta}} + \underline{\underline{E}})\Delta\underline{r}$$

$$ds_i = (\delta_{ij} + \beta_{ij})\,dr_j \qquad \frac{|d\underline{s}| - |d\underline{r}|}{|d\underline{r}|} = \frac{\sqrt{(\delta_{ij}+\beta_{ij})\,dr_j\,(\delta_{ik}+\beta_{ik})\,dr_k} - |d\underline{r}|}{|d\underline{r}|} =$$

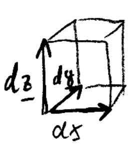
$\beta_{ik}, \beta_{ij} \ll 1 \Rightarrow \beta_{ik}\beta_{ij} \approx 0$

$$= \frac{\sqrt{(\delta_{jk} + \beta_{kj} + \beta_{jk} + \beta_{ik}\beta_{ij})\,dr_j\,dr_k} - |d\underline{r}|}{|d\underline{r}|} = \sqrt{(\delta_{jk} + \beta_{kj} + \beta_{jk})\frac{dr_j\,dr_k}{|d\underline{r}|^2}} - 1 =$$

$$= \sqrt{(\beta_{kj} + \beta_{jk})\frac{dr_j\,dr_k}{|d\underline{r}|^2} + \underbrace{\frac{dr_k\,dr_k}{|d\underline{r}|^2}}_{1}} - 1 = \overbrace{\frac{\beta_{kj} + \beta_{jk}}{2}}^{\varepsilon_{jk}}\,\frac{dr_j\,dr_k}{|d\underline{r}|^2}$$

ε_{jk} szimmetrikus mátrix, így $\frac{|d\underline{s}| - |d\underline{r}|}{d\underline{r}} = \underline{n}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{n}$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$: deformációs tenzor



$$d\underline{x}' = (1+\beta)\,d\underline{x} = (1+\beta_{11},\ \beta_{21},\ \beta_{31})\,dx \qquad d\underline{x} = (dx, 0, 0)$$

$$d\underline{y}' = (1+\beta)\,d\underline{y} = (\beta_{12},\ 1+\beta_{22},\ \beta_{32})\,dy$$

$$d\underline{z}' = (1+\beta)\,d\underline{z} = (\beta_{13},\ \beta_{23},\ 1+\beta_{33})\,dz$$

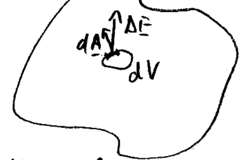
$$dV' = \begin{vmatrix} 1+\beta_{11}, & \beta_{21}, & \beta_{31} \\ \beta_{12}, & 1+\beta_{22}, & \beta_{32} \\ \beta_{13}, & \beta_{23}, & 1+\beta_{33} \end{vmatrix} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} \approx (1 + \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33})\,dV = dV + \mathrm{Sp}\,\beta\,dV$$

$$\mathrm{Sp}\,\beta = \mathrm{Sp}\,\varepsilon$$

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \mathrm{Sp}\,\varepsilon$$

3. Feszültségtenzor, kontinuumok mozgásegyenlete

$\Delta \underline{F} = \sigma \Delta \underline{A}$



$\underline{f}(\underline{r})$ külsőhatású erők

$$\underline{F} = \underbrace{\int_V \underline{f}\, dV}_{\text{külső, térfogati erők}} + \underbrace{\oint_A \sigma\, d\underline{A}}_{\text{belső erők}}$$

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a} = \int_V \rho \frac{d^2 u}{dt^2}\, dV$$

$$\int_V \rho \frac{d^2 u}{dt^2}\, dV = \int_V \underline{f}\, dV + \oint_A \sigma\, d\underline{A}$$

$$\int_V \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \int_V \underline{f}\, dV + \int_V \operatorname{div} \sigma\, d\underline{A}$$

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \underline{f} + \operatorname{div} \sigma$$

kontinuumok mozgásegyenlete

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, hogy impulzusmomentum megmaradjon

$$\underline{L} = m(\underline{r} \times \underline{v})$$

$$(\operatorname{div} \sigma)_i := \partial_j \sigma_{ij}$$

kiterjedt anyagra $L_i = \int \rho\, \varepsilon_{ijk}\, r_j\, v_k\, dV$

$$d_t L_i = \int \rho\, \varepsilon_{ijk}\, d_t (r_j v_k)\, dV = \int \rho\, \varepsilon_{ijk}\, r_j\, d_t v_k\, dV + \underbrace{\int \rho\, \varepsilon_{ijk}\, v_k\, \underbrace{d_t r_j}_{v_j}\, dV}_{0}$$

$$\rho\, d_t v_k = \rho \frac{d^2 u}{dt^2}$$

egyensúlyban

$$0 = d_t L_i = \int \varepsilon_{ijk} (f_k + \partial_p \sigma_{kp})\, r_j\, dV = \int \varepsilon_{ijk} f_k r_j\, dV + \underbrace{\int \varepsilon_{ijk}\, \partial_p (\sigma_{kp} r_j)\, dV}_{\int \partial_p (\varepsilon_{ijk} \sigma_{kp} r_j)\, dV} - \int \varepsilon_{ijk}\, \underbrace{\sigma_{kp} \underbrace{\partial_p r_j}_{\delta_{pj}}}_{\sigma_{kj}}\, dV$$

$$\underbrace{\int \varepsilon_{ijk} f_k r_j\, dV}_{\text{külső erők forgatónyomatéka}} + \underbrace{\int \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kp}\, r_j\, dA_p}_{\underbrace{\int \varepsilon_{ijk}\, r_j\, dF_k}_{\text{belső erők forgatónyomatéka}}} = \int \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kj}$$

egyensúlyban

$$\Sigma M_i = \int \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kj} = 0 \Rightarrow \sigma \text{ szimmetrikus}$$

4. Általános Hooke-törvény, izotróp közegek rugalmas tulajdonságai

$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, t)$ egy közeg rugalmas, ha $\sigma(\varepsilon)$ lineáris, vagyis $\sigma_{ij}(\varepsilon) = \underbrace{\sigma_{ij}(0)}_{0} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\Big|_0 \cdot \varepsilon_{kl}$

$$C_{ijkl} := \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\Big|_0 \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} \quad (1)$$

így $\sigma_{ij}(\varepsilon) = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$, ez az általános Hooke-törvény

energia

$$F = EA\frac{\Delta l}{l} = \frac{EA}{l}\Delta l = D\,\Delta l \qquad \frac{EA}{l} := D$$

$$W = \frac{1}{2}D(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}EA\cdot l\cdot\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\varepsilon^2$$

$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$, általános esetben $w = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}$

$\frac{dw}{d\varepsilon} = E\varepsilon = \sigma$, általános esetben $\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}}$$

vagyis $C_{ijkl} = C_{klij}$ (2)

(1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ C-nek 21 független komponense van

Izotróp anyagra C-nek csak 2 szabad komponense van, és ε-ból gyárthatunk 2 koordinátarendszer-független mennyiséget. λ és μ legyenek olyanok (Lamé-állandók) hogy $w = \mu(\mathrm{Sp}\,\varepsilon^2) + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{Sp}\,\varepsilon)^2$. $\lambda(C)$ és $\mu(C)$ függvényeket nem adtam meg.

$$w = \mu\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii} \Rightarrow \sigma_{kl} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{kl}} = 2\mu\,\varepsilon_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} + \lambda\,\varepsilon_{ii}\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial \varepsilon_{kl}}$$

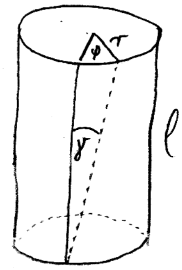
Mivel $\frac{\partial \varepsilon_{mp}}{\partial \varepsilon_{qs}} = \delta_{mq}\delta_{ps}$, ezért $\sigma_{kl} = 2\mu\,\varepsilon_{kl} + \lambda\,\varepsilon_{ii}\,\delta_{kl} \Rightarrow \sigma_{ll} = (2\mu+\lambda)\,\varepsilon_{ll}$

$$\sigma_{kl} = 2\mu\,\varepsilon_{kl} + \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\sigma_{ii}\,\delta_{kl} \Rightarrow \varepsilon_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\sigma_{ii}\,\delta_{kl}}{2\mu+\lambda}$$

$\sigma := \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vagyis egyirányú nyújtás. $\varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\sigma}{2\mu+\lambda} = \overbrace{\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{1}{2\mu+\lambda}\right)}^{1/E}\sigma$

$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\sigma}{2\mu+\lambda}$, így pl η Poisson-szám: $\eta = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}}{1 - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}}$

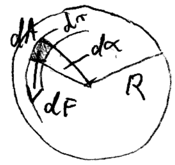
5. Csavarás, lehajlás, kihajlás



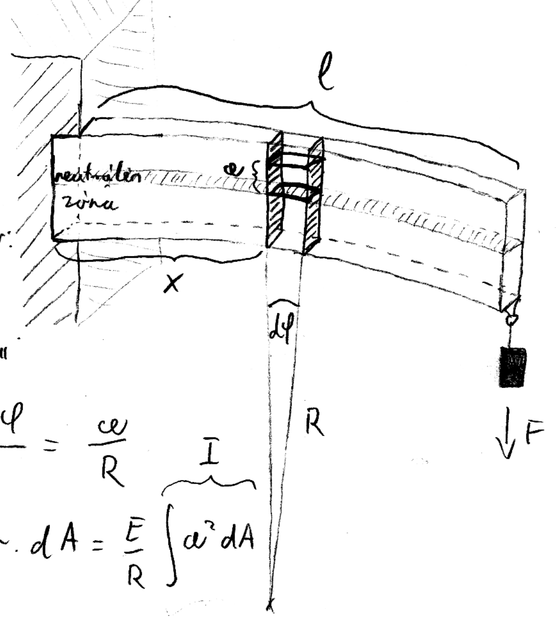
Csavarás: „periodikus határfeltételű nyírás". Kis csavarásra $r\varphi = \ell\gamma \Rightarrow \gamma = \varphi\frac{r}{\ell}$

Nyírásnál $\frac{F}{A} = \mu\gamma = \tau$, kis dA darabkára $dF = \mu\varphi\frac{r}{\ell}dA$ erő hat.

Ebből $dM = \mu\varphi\frac{r^2}{\ell}dA$, ezért $M = \int_{\circ} \mu\varphi\frac{r^2}{\ell}dA = \int_0^R\int_0^{2\pi}\mu\varphi\frac{r^2}{\ell}\, r\,d\alpha\,dr$



Az integrálást elvégezve: $M = 2\pi\varphi\mu\frac{R^4}{4\ell}$



Lehajlás: Egy homogén, állandó keresztmetszetű test saját súlya vagy – jelen esetünkben – végére akasztott súly miatt lehajlik. A görbületet jellemző görbületi sugár:

$R = \frac{(1+f'^2)^{3/2}}{f''}$. Ha lehajlás kicsi, $1 \gg f'^2$, így $R \approx \frac{1}{f''}$

A relatív megnyúlás: $\varepsilon(a) = \frac{(R+a)d\varphi - R\,d\varphi}{R\,d\varphi} = \frac{a}{R}$

$\sigma = \varepsilon\cdot E$ és $\int \sigma\, dA = F$. A jelzett felületre $M_b = \int a\cdot\sigma\cdot dA = \frac{E}{R}\overbrace{\int a^2 dA}^{I}$

A jelzett felületre az M_b belső forgatónyomatékon kívül M_k „külső" forgatónyomaték is hat: $M_k = F(\ell - x)$. Így, mivel statikáról van szó, $F(\ell-x) = \frac{EI}{R} = EIf''$. Ennek megoldása:

$f(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{2}\ell x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)$, így $f(\ell) = \frac{F}{EI}\frac{\ell^3}{3}$ (peremfeltételek: $f(0)=0$ és $f'(0)=0$).

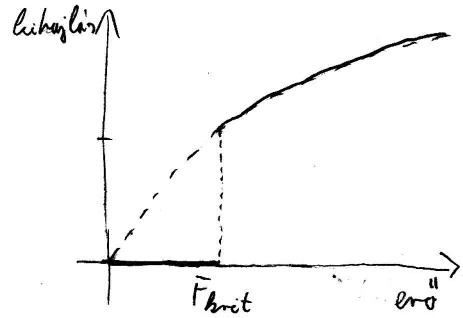
Spec eset: a test téglatest, a satírozott rész: a  ← neutrális szál $I = \int_T a^2 dA =$

$= \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} x^2\, dy\, dx = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 a\, dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = ab^3/12$

Kihajlás: $\frac{EI}{R} = -F\cdot y$ $\quad R = 1/\frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\overbrace{\frac{F}{EI}}^{k}y$ megoldása: $y(x) = A\sin(kx)$,

határfeltételek: $y(0)=0$ ✓ $\quad y(\ell)=0 \Rightarrow A\sin(k\ell)=0 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\ell} = \sqrt{\frac{F}{EI}}$ Ebből

$F_n = EI\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $F_{min} = EI\frac{\pi^2}{\ell^2}$. Ekkora erő hatására kezd el először kihajlani, ezért nevezik kritikus erőnek is.



6. Hidrosztatika, Pascal törvény, Archimedes-törvény, forgó folyadék felszíne, barometrikus magasságformula

Sztatika, vagyis $\frac{d^2u}{dt^2} = 0 = \operatorname{div}\sigma + f$ De mi σ?

Folyadékoknál ε értelmét veszti: nem tudható, ki honnan jött, és nem nyújtható a folyadék

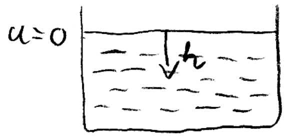
$dF = \sigma \cdot dA$ továbbra is, $\sigma = -p\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ feltételezzük, vagyis $|dF|$ független $\frac{dA}{dA}$-tól.

Ezt mondja Pascal, népiesen: az erő gyengítetlenül tovaterjed (?).

Nehézségi erőtérben $f = \rho \cdot g = -\rho \operatorname{grad} u$. $\sigma = -pE \Rightarrow \operatorname{div}\sigma = -\operatorname{grad} p$, előző egyenletből:

$\operatorname{div}\sigma + f = 0 = -\operatorname{grad}p - \rho\operatorname{grad}u$ és ρ = áll $\Rightarrow \operatorname{grad}(p + \rho u) = 0 \Rightarrow p + \rho u = 0$,

vagyis a víz felülete vízszintes. Ebből $p = \rho g h$.



Testre ható felhajtóerő: $F = \oint \sigma\, dA = \int_V \operatorname{div}\sigma\, dV = -\int_V f\, dV = -\rho g V$,

vagyis $F = -\rho g V$, Archimedes-törvény. Népiesen: minden test annyit veszít súlyából, amennyi az általa elfoglalt folyadék súlya (ha az körülöleli a testet.)

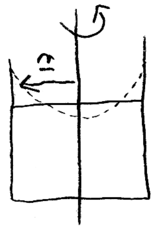
Forgó folyadék felszíne:

$$f = \rho g + r\omega^2\rho = -\rho \operatorname{grad}\underbrace{\left[gz - \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right)\right]}_{u}$$

p = áll $\Leftrightarrow$ u = áll

$u = -p/\rho$

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\left(x^2+y\right) - \frac{p}{\rho g}$$



barometrikus magasságformula (gázokban)

$\operatorname{grad}p + \rho\operatorname{grad}u = 0$, vízszintes irányokban p és u állandó

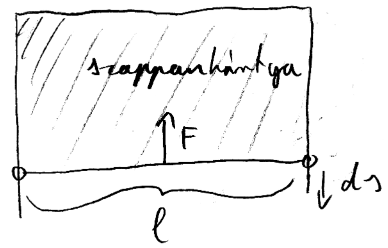
$$\frac{dp}{dz} + \rho\frac{du}{dz} = 0 \qquad u = gz,\ \rho = \frac{Mp}{RT}$$

$$dp + \frac{Mp}{RT}du = 0$$

$$\ln p + \frac{Mp}{RT} = \ln p_0 \Rightarrow p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mu}{RT}} = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgz}{RT}},$$

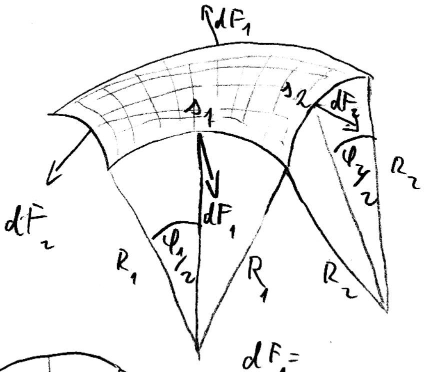
7. felületi feszültség, görbületi nyomás, kapilláris emelkedés

Kísérleti tapasztalat azt mondja, $F \sim l$, ekkor $F := 2\alpha l$.



$dW = F\,ds = 2\alpha l\,dl$ $\qquad 2l \cdot dl = A$ (mindkét oldali felszín)

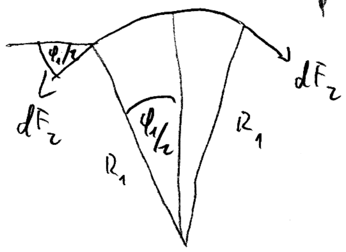
$\dfrac{dW}{dl} = \alpha$. $\quad \alpha$: felületi feszültség.



Görbületi nyomás: az ábra szerinti elrendezésben $dF_{1,2} = \alpha s_{1,2}$

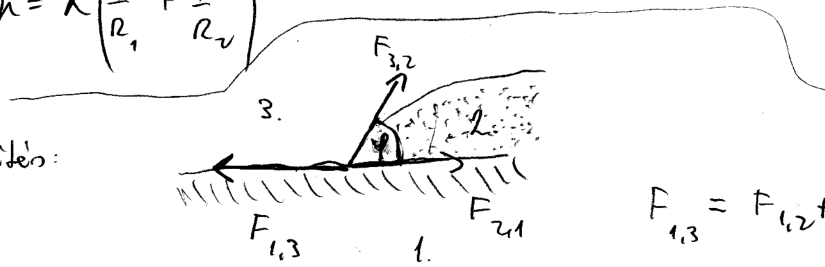
$dF_{er} = 2\,dF_2 \sin(\varphi_1/2) + 2\,dF_1 \sin(\varphi_2/2)$ $\qquad \sin\varphi_{1,2} \approx \varphi_{1,2}$

$dF_{er} = \alpha(\varphi_1 s_2 + \varphi_2 s_1) = \alpha\left(\dfrac{\varphi_1}{s_1} + \dfrac{\varphi_2}{s_2}\right)\underbrace{s_1 s_2}_{dA}$



$\dfrac{dF}{dA} = p = \alpha\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$

Nedvesítés:



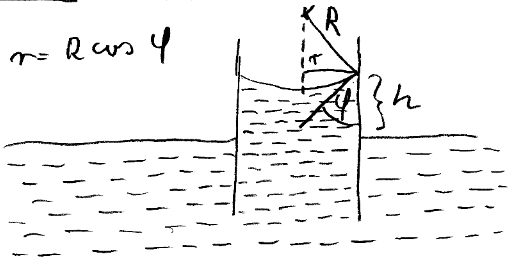
$F_{1,3} = F_{1,2} + \cos(\varphi)\,F_{2,3} \Rightarrow F_{1,3} - F_{1,2} = (\cos\varphi)\cdot F_{2,3}$

$\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2} = (\cos\varphi)\,\alpha_{2,3}$

$\alpha(T)$, így nem biztos, hogy $\forall\ \exists$ megoldás.

Kapilláris emelkedés magyarázata

$r = R\cos\varphi$



- energiaminimum alapján

$E(h) = r^2\pi h \rho g \dfrac{h}{2}$ helyzeti energia

$E(\alpha) = F \cdot s = (\alpha_{f,ü} - \alpha_{ü,l})\,2r\pi h$ felületi-feszültség energia

$E_{össz} = E(h) + E(\alpha)$ legyen minimális!

$\dfrac{dE_{össz}}{dh} = r^2\pi h \rho g + 2r\pi(\alpha_{fü} - \alpha_{ül}) = 0$

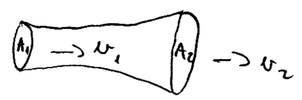
$$h = 2\,\frac{\alpha_{ül} - \alpha_{fü}}{\rho g r} = 2\,\frac{\alpha_{fl}\cos\varphi}{\rho g r} = 2\,\frac{\alpha_{fl}}{\rho g R}$$

- görbületi nyomás segítségével

$p_g = 2\dfrac{\alpha_{fl}}{R}$, ez tart egyensúlyt a hidrosztatikai $p_h = \rho h g$ nyomással: $\rho h g = 2\dfrac{\alpha_{fl}}{R}$,

melyből $h = 2\dfrac{\alpha_{fl}}{R\rho g}$.

8. Ideális folyadék áramlása, Bernoulli-törvény és alkalmazásai



$dm_1 = dm_2$

$A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$ kontinuitási egyenlet

Egyetemista nyelven: $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} V + \int_A \underline{v}\rho\, d\underline{A} = 0 = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_V \mathrm{div}(\rho \underline{v})\, dV$ $\forall$ V-re

Bernoulli törvény id. gázra és folyadékra $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho\underline{v} = 0 \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = |\mathrm{grad}\,\rho| = 0$ mert folyadék

$\mathrm{div}\,\underline{v} = 0$

Munkatétel alapján

$\frac12 \Delta m_1 v_2^2 - \frac12 \Delta m v_1^2 = \Delta E_{kin} = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t + \Delta m U_1 - \Delta m U_2 + \Delta W_k$

$\frac12 \Delta m v_1^2 + \Delta m U_1 + p_1 A_1 v_1 dt - \Delta E_k = \frac12 \Delta m v_2^2 + \Delta m_2 U_2 + p_2 A_2 v_2 dt$ $\quad Q = \Delta E_k + \Delta W$

$A v dt = \frac{m}{\rho}$ $\quad$ legyen 0, adiabatikus

$\frac12 \Delta m v_1^2 + \Delta m U_1 + p_1 \frac{\Delta m}{\rho_1} + \Delta m e_1 = \frac12 \Delta m v_2^2 + \Delta m U_2 + \frac{\Delta m}{\rho_2} p_2 + \Delta m e_2$

$\frac{\Delta E_k}{\Delta m} = e_2 - e_1$

$\frac12 v_1^2 + U_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 = \frac12 v_1^2 + U_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + e_2$

ha ideális folyadék, $e_1 = e_2 \Rightarrow \frac12 v^2 + U + \frac{p}{\rho} =$ áll

ideális gázra $e = \frac{f}{2}\frac{1}{M} RT$

$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{f+2}{2} nRT}{\frac f2 nRT} \Rightarrow \frac f2 = \frac{1}{\kappa-1}$

$e = \frac{1}{\kappa-1}\frac{n}{m} RT = \frac{1}{\kappa-1}\frac{pV}{m} = \frac{1}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}$

továbbá $pV^\kappa =$ áll $= p\left(\frac{m}{\rho}\right)^\kappa =$ áll mivel $m =$ áll $p\rho^{-\kappa} =$ áll

tehát gázra $\frac12 v^2 + U + \frac p\rho\left(1 + \frac{1}{\kappa-1}\right) =$ áll és $p\rho^{-\kappa} =$ áll.

(1)

Legyen a cső kicsi! Ekkor $dU = 0$, a kontinuitás miatt $d(A\rho v) = 0 \Rightarrow \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0$

$d\left(\frac12 v^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac p\rho\right) = 0 = v\,dv + \frac{\kappa}{\kappa-1}\left(\frac1\rho \frac{dp}{d\rho} + p\frac{-1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\rho}\right) d\rho \quad \frac{dp}{d\rho} := c^2 \quad p =$ áll $\cdot \rho^\kappa$

$0 = v\,dv + \frac{\kappa}{\kappa-1}\underbrace{\left(c^2 - \frac p\rho\right)}_{c^2\left(1-\frac1\kappa\right)} \frac{d\rho}{\rho} = v\,dv + c^2\frac{d\rho}{\rho} \overset{(1)}{=} v\,dv - c^2\left(\frac{dA}{A} + \frac{dv}{v}\right)$

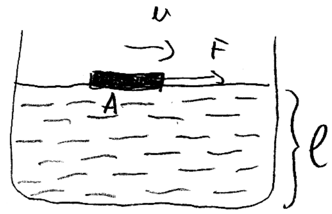
$\frac{dp}{d\rho} =$ áll $\cdot\, \kappa \cdot \rho^{\kappa-1}$

$\frac{dp}{d\rho} = \frac{p\kappa}{\rho}$

$\frac{dA}{A} = \frac{v}{c^2}dv - \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \quad dv = \frac{\frac{dA}{A} v}{\frac{v^2}{c^2}-1}$

$dv > 0$ ha $\begin{cases} dA > 0 \wedge v > c \\ dA < 0 \wedge v < c \end{cases}$

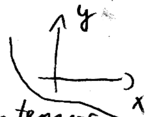
9. Súrlódó folyadék, feszültségtenzor alakja, áramlás csőben



ideális folyadékra $\sigma = -p \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, amikor nincs súrlódás.

Ha van: $F \sim v$ úgy, hogy $F = \eta \frac{Av}{\ell} \Rightarrow \frac{F}{A} = \eta \frac{v}{\ell}$, a teljes ℓ-re.

Vékony rétegekre felbontva a folyadékot, $\frac{F}{A} = \tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$



Mostmár σ függvénye $\dot\varepsilon$-nak, de csak lineárisan: $\sigma = \sigma_0 + \underbrace{C\dot\varepsilon}_{\sigma'}$ C négyindexes tenzor

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_i} + \frac{\partial u_j}{\partial r_j}\right)$ ebből deriválással: $\dot\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_i} + \frac{\partial v_j}{\partial r_j}\right)$

$\sigma_0 = -pE$

σ' szimmetrikus (impulzus-nyomaték tétel)

rugalmasságtanban $\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ij}$

analógiával $\sigma'_{ij} := 2\eta\,\dot\varepsilon_{ij} + \eta'\,\dot\varepsilon_{ll}\,\delta_{ij} \Rightarrow \sigma'_{ll} = \dot\varepsilon_{ij}\underbrace{(2\eta + 3\eta')}_{3\zeta} := -3p'$

p': súrlódási nyomás. $p' = -\zeta\,\dot\varepsilon_{ll} = -\zeta \operatorname{div} \underline{v}$

$p = 0$ ha a folyadék összenyomhatatlan, de sok összenyomhatóra is $\Rightarrow \zeta \approx 0$ tapasztalat

$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\eta\left(\dot\varepsilon_{ij} - \dot\varepsilon_{ll}\frac{\delta_{ij}}{3}\right)$

Eredetileg $\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \underline{f} + \operatorname{div}\sigma \approx \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \operatorname{div}\sigma \equiv \rho\frac{\partial v}{\partial t} = \underline{f} + \operatorname{div}\sigma$ mert $\frac{du}{d\underline{r}} \approx 0$,

az elmozdulás igen kicsi

mostmár ezt a közelítést nem tehetjük.

$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r_j}\frac{dr_j}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v_j \frac{\partial}{\partial t}\right) r_j \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + (\underline{v}\nabla)\underline{v}$ vagyis $\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\underline{v}\nabla)\underline{v}\right] = \underline{f} + \operatorname{div}\sigma$

$\sigma = -pE + \sigma'$ $\operatorname{div}\sigma = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div}\sigma'$ $\sigma'_{ij} = 2\eta\,\dot\varepsilon_{ij} + \eta'\,\dot\varepsilon_{ll}\,\delta_{ij}$

$(\operatorname{div}\sigma')_i = \frac{\partial}{\partial r_j}\sigma'_{ij} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial r_i \partial r_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial r_j \partial r_j}\right) + \eta' \frac{\partial^2 v_l}{\partial r_j \partial r_l}\delta_{ij} = \eta \underbrace{\frac{\partial^2 v_i}{\partial r_j \partial r_j}}_{\Delta v_i} + (\eta + \eta')\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_i}}_{\operatorname{grad}_i}\underbrace{\left(\frac{\partial v_l}{\partial r_l}\right)}_{\operatorname{div} \underline{v}}$

$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\underline{v}\nabla)\underline{v}\right] = \underline{f} - \operatorname{grad} p + \eta\,\Delta\underline{v} + (\eta + \eta')\,\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\,\underline{v})$ Navier–stokes egyenlet, $\underline{\nabla}\,\underline{v} = 0$ ha összenyomhatatlan

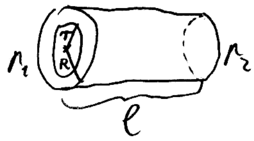
---

Csőben lineárisan áramló ideális folyadék

$\rho\left[\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{0 \text{ mert stacionárius}} + \underline{v}\underbrace{(\nabla \underline{v})}_{0 \text{ mert } \underline{v} \text{ állandó}}\right] = \overbrace{\underline{f}}^{0 \text{ mert nincsenek külső erők}} + \operatorname{div}\sigma \Rightarrow \operatorname{div}\sigma = 0$

$\int_V \operatorname{div}\sigma\, dV = 0$

$\oint \sigma\, d\underline{f} = 2\pi r \ell \eta \frac{dv}{dr} + p_1 r^2 \pi - p_2 r^2 \pi = 0$



$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\ell\eta}(p_2 - p_1)$

$v(r) = v_0 + \frac{r^2}{4\ell\eta}(p_2 - p_1)$ $v(R) = 0$ (pl Fe, de Cu nem jó)

$v(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\ell\eta}(R^2 - r^2)$

10. hang terjedése gázban, hullámegyenlet

$$\rho\Big[\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underbrace{(\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{v}}_{\approx 0 \,\Leftarrow\, v \ll 1}\Big] = \underbrace{\underline{f}}_{=0} - \text{grad}\, p + \underbrace{\eta \Delta \underline{v}}_{=0} + \underbrace{(\eta+\eta')}_{0} \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{v})$$

$$p = p_0 + \delta p, \qquad \rho = \rho_0 + \delta\rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v}) = 0$$

① $\rho_0 \dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\nabla p_0$

② $\dfrac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_0 \underline{\nabla}\,\underline{v} = 0$

③ $\delta p \approx \overbrace{\dfrac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho_0}}^{c^2} \delta\rho$

$$①\wedge③ \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -c^2 \nabla \delta\rho \overset{\cdot\nabla}{\Rightarrow} \rho_0 \underline{\nabla} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -c^2 \Delta \delta\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t}② \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho + \rho_0 \underline{\nabla} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho - c^2 \Delta \delta\rho = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta p - c^2 \Delta \delta p = 0}$$

$$\nabla② \qquad \nabla \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_0 \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}①\wedge③ \qquad \rho_0 \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2} = -c^2 \nabla \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho$$

$$\rho_0 \Delta \underline{v} - \frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2} = 0$$

$$\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{v}) = 0 = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{v}) - \Delta\underline{v}$$

mentörvénymentes

$$\boxed{c^2 \Delta \underline{v} - \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2} = 0}$$

Ezek megoldásai:

síkhullám: $\phi(\underline{r},t) = A\cos(\underline{k}\underline{r} - ckt + \varphi_0)$

gömbhullám: $\phi(|\underline{r}|,t) = A\cos(kr - ckt + \varphi_0)$

de egyébként bármilyen periodikus jó, ilyen alakban: $f(x \pm ct) = \phi(x,t)$

hanghullám terjedési sebessége

- adiabatikus: $pV^{\kappa} = \text{áll} \Rightarrow p\rho^{-\kappa} = \text{áll} = p_0 \rho_0^{-\kappa} \Rightarrow p = \dfrac{p_0}{\rho_0^{\kappa}}\rho^{\kappa}$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}}\kappa\rho^{\kappa-1}\Big|_{\rho_0} = \frac{p_0\kappa}{\rho_0} = \kappa\frac{RT}{M} \qquad \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}}\kappa\rho^{\kappa-1} \qquad p = \frac{\rho RT}{M}$$

jó közelítés, ha $\omega \to \infty$

- izoterm

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \qquad \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{M} \qquad c^2 = \frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho_0} = \frac{RT_0}{M}$$

jó közelítés, ha $\omega \to 0$

11. Rugalmas hullámok terjedése

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{\underline{f}}_{0} + \operatorname{div} \sigma \qquad \sigma_{kl} = 2\mu\, \varepsilon_{kl} + \lambda\, \varepsilon_{mm} \delta_{kl} = \mu \left(\partial_k u_l + \partial_l u_k \right) + \lambda\, \partial_m u_m \delta_{kl}$$

0 mert nincs külső erő

$$\partial_l \sigma_{kl} = \mu \left(\partial_k \partial_l u_l + \partial_l^2 u_k \right) + \lambda\, \partial_k \partial_m u_m$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \left[\underline{\nabla} (\underline{\nabla}\, \underline{u}) + \Delta \underline{u} \right] + \lambda\, \underline{\nabla} (\underline{\nabla}\, \underline{u}) = \mu \Delta \underline{u} + (\mu + \lambda)\, \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u})$$

Ez még nem hullámegyenlet

$\nabla \cdot$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\nabla}\, \underline{u} = (2\mu + \lambda)\, \Delta (\underline{\nabla}\, \underline{u})$$

hullámegyenlet $\underline{\nabla}\, \underline{u}$-ra

$\nabla \times$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underline{\nabla} \times \underline{u}) = \mu\, \Delta (\underline{\nabla} \times \underline{u})$$

hullámegyenlet $\underline{\nabla} \times \underline{u}$-ra

$\underline{u} = \underline{u}_{div} + \underline{u}_{rot}$, a kitérés terét rotáció és divergenciamentes terekre bonthatjuk fel

$\operatorname{div} \underline{u}_{rot} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \underline{u} = \operatorname{div} \underline{u}_{div}$

$\operatorname{rot} \underline{u}_{div} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \underline{u} = \operatorname{rot} \underline{u}_{rot}$

$$\frac{\partial^2 u_{rot}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{u}_{rot} = 0$$

$$\underline{u}_{rot} = \underline{A}_{rot}\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$

alakban keresem a megoldást

$$(-i\omega)^2 - \frac{\mu}{\rho} (i\underline{k})^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\mu}{\rho} k^2$$

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\underline{\nabla}\, \underline{u}_{rot} = 0$$

$$i\underline{k}\, \underline{A}_{rot} = 0$$

$$\underline{k} \perp \underline{A}_{rot}$$

transzverzális hullám

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\nabla}\, u_{div} = (2\mu + \lambda)\, \Delta (\underline{\nabla}\, \underline{u}_{div})$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\nabla} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{div} - (2\mu + \lambda)\, \Delta\, \underline{u}_{div} \right) &= 0 \\ \underline{\nabla} \times \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{div} - (2\mu + \lambda)\, \Delta\, \underline{u}_{div} \right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \rho \frac{\partial^2 \underline{u}_{div}}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda)\, \Delta\, \underline{u}_{div}$$

hasonlóan $\rho \dfrac{\partial^2 \underline{u}_{rot}}{\partial t^2} = \mu\, \Delta\, \underline{u}_{rot}$ Ezek már hullámegyenletek $\underline{u}$-ra

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{u}_{div} - \frac{\mu + 2\lambda}{\rho} \Delta\, u_{div} = 0 \qquad \underline{u}_{div} = \underline{A}_{div}\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$

$$(-i\omega)^2 - \frac{\mu + 2\lambda}{\rho} (i\underline{k})^2 = 0$$

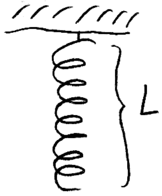
$$\omega^2 = \frac{\mu + 2\lambda}{\rho} \underline{k}^2 \qquad \underline{\nabla} \times \underline{u}_{div} = 0$$

$$i\underline{k} \times \underline{A}_{div} = 0$$

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

longitudinális hullám

12. Leejtett rugó



$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma}$ legyen most 1D, külső erővel

$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho g + \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ $\underline{\sigma} = E \cdot \underline{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = E \frac{du}{dx}$

$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho g + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u(x,t) = u_\infty(x) + u'(x,t)$

$u_\infty(x)$ partikuláris, t = áll megoldás $\rightarrow \rho g + E \frac{d^2 u_\infty}{dx^2}$ $u_\infty(x) = a + bx - \frac{\rho g}{2E} x^2$

$u_\infty(0) := 0 \Rightarrow a = 0$

$u'(x,t)$ homogén megoldás

$\sigma(L) = 0 = E \frac{du_\infty}{dx}\Big|_L = b - \frac{\rho g}{E} L$

$\Downarrow$

$\rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$ $\frac{\rho}{E} = 1/c^2$

$b = \frac{\rho g}{E} L$

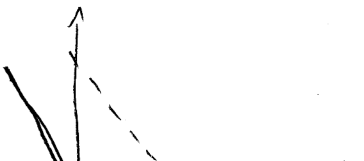
$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$ hullámegyenlet $u' = f(x - ct)$

$u_\infty = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$

$u'(x,t) \to u'(x,0) := 0 = f(x)$ $0 \le x \le L$

ha $t \ge 0 \Rightarrow \sigma(0,t) = 0$ $\frac{du}{dx}(0,t) = \underbrace{\frac{du_\infty}{dx}(0,t)}_{\frac{\rho g L}{E}} + \frac{du'}{dx}(0,t) = 0$

$\frac{du'}{dx}(0,t) = D f(0 - ct) = -\frac{\rho g L}{E}$



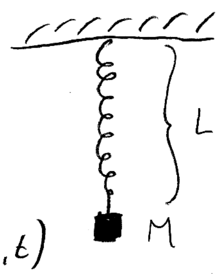
$D f(0 - ct) = -\frac{\rho g L}{E}$ $x \le 0$

$D f(x) = \frac{-\rho g L}{E}$ $x \le 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\rho g L}{E} x & x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le L \end{cases}$$

13. Véges tömegű rugóból és a végére kötött tömegből álló rendszer rezgései

$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma}$ legyen 1D -> probléma, gravitációban



$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho g + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\qquad u(0,t)=0$

határfeltételek $\rightarrow M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L,t) = Mg - A\sigma(L,t) = Mg - AE\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$

partikuláris: $\rho g + E \frac{d^2 u_\infty}{dx^2} = 0$

$u(x,t) = \underbrace{u_\infty(x,0)}_{\text{partikuláris}} + \underbrace{u'(x,t)}_{\text{homogén}}$

$u_\infty(x) = a + bx - \frac{\rho g}{2E}x^2$

homogén: $\rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$ (1)

$u_\infty(0)=0 \qquad a=0$

b-re: $0 = Mg - AE \frac{du_\infty}{dx}(L,0)$

$u'(0,t)=0 \Rightarrow \varphi'=0$

$M\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = -AE\frac{\partial u'}{\partial x}(L,t)$ (2)

$\frac{du_\infty}{dx}\Big|_{L,0} = \frac{Mg}{AE} = b - \frac{\rho g}{E}L$

keressük a megoldást ilyen alakban

$u' = B\sin(\omega t+\varphi)\sin(kx+\varphi')$

$u_\infty(x) = \left(\frac{Mg}{AE} + \frac{\rho g}{E}L\right)x - \frac{\rho g}{2E}x^2$

(1) $-\rho\omega^2 = -Ek^2 \qquad \omega^2 = \frac{E}{\rho}k^2 \qquad c^2 := \frac{E}{\rho}$

(2) $-M\omega^2 B \sin(\omega t+\varphi)\sin(k_1 L) = -AE\cos(k,L)$

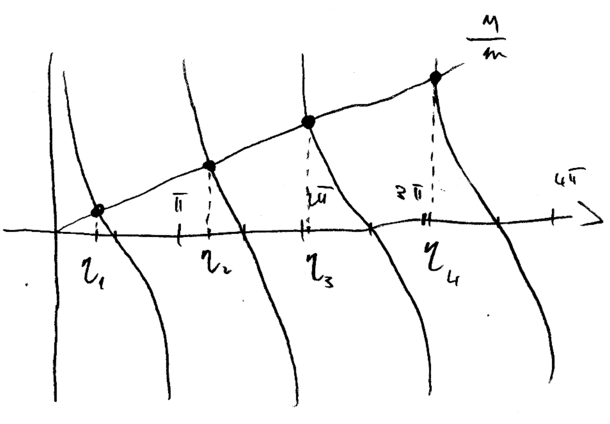
$$\boxed{\begin{gathered} m = \rho A L \\ \frac{\rho}{E}L^2\omega^2 = \frac{\rho A L}{M+\frac{m}{3}} \\ \omega^2 = \frac{EA/L}{M+\frac{m}{3}} \quad EA/L := D \quad \omega^2 = \frac{D}{M+\frac{m}{3}} \end{gathered}}$$

$M\omega^2 = AE\, k\, \mathrm{ctg}(kL)$

$M\frac{\cancel{E}}{\rho}k^{\cancel{2}} = \cancel{E}A\cancel{k}\,\mathrm{ctg}(kL) \qquad \mathrm{ctg}(kL) = \frac{Mk}{\rho A L}L \qquad \rho A L = m_{\text{rugó}}$

$kL := \eta$

$\frac{M}{m}\eta = \mathrm{ctg}(\eta) \Rightarrow \eta_n \Rightarrow k_n \Rightarrow \omega_n$



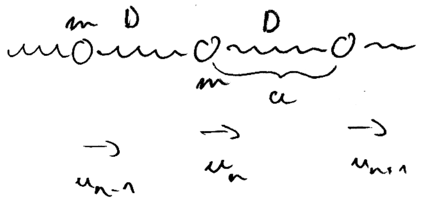
$u'_n = B_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)\sin(k_n x+\varphi'_n)$

$u' = \sum_n u'_n \qquad n=1$ a legdominánsabb a súrlódás miatt

ha: $\frac{M}{m} \gg 1 \Rightarrow \eta \ll 1 \qquad \mathrm{ctg}\,\eta \approx \frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{3}$

$\frac{M}{m}\eta = \frac{1}{\eta}-\frac{\eta}{3} \Rightarrow \eta^2 = \frac{m}{M+\frac{m}{3}} = k^2L^2 = \frac{\rho}{E}\omega^2L^2$

14. A kontinuum elmélet határai, deformáció terjedése diszkrét rendszerekben



$$m\ddot{u}_n = -D(u_n - u_{n-1}) - D(u_n - u_{n+1})$$

$$m\ddot{u}_n = D\left(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n\right) \qquad \omega_0^2 := \frac{D}{m}$$

$$\ddot{u}_n = \omega_0^2 a \frac{\frac{u_{n+1}-u_n}{a} - \frac{u_n - u_{n-1}}{a}}{a} \simeq \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

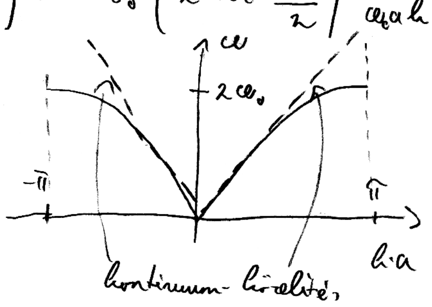
$c := \omega_0 a$

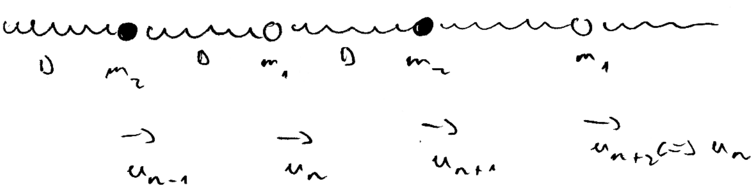
$\ddot{u}_n = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ hullámegyenlet $\rightarrow \omega = \pm ck$

Ha a közelítést nem tesszük meg, de keressük a megoldást $u_n = A e^{i(kna - \omega t)}$ alakban,

$$-\omega^2 = \omega_0^2\left(e^{-ika} + e^{ika} - 2\right) \Rightarrow -\omega^2 = 2\omega_0^2\left(\cos(ka) - 1\right) = 2\omega_0^2\left(-2\sin^2\frac{ka}{2}\right) \text{ azaz}$$

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

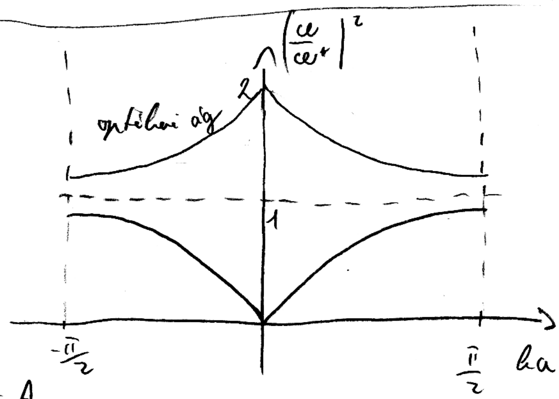




$$m_\alpha \ddot{u}_n = D(u_{n-1} - u_n) + D(u_{n+1} - u_n) \qquad \alpha = n \bmod 2$$

$$\ddot{u}_n = \omega_\alpha^2\left(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n\right) \qquad \omega_\alpha^2 = \frac{D}{m_\alpha}$$

keressük a megoldást $u_n = A_\alpha e^{i(kna - \omega t)}$ alakban



$$-\omega^2 A_\alpha = \omega_\alpha^2\left(\underbrace{A_{\alpha-1} e^{-ika} + A_{\alpha+1} e^{ika}}_{2A_{\alpha+1}\cos ka} - 2A_\alpha\right) \qquad A_{\alpha-1} = A_{\alpha+1}$$

$$0 = \left(\omega^2 - 2\omega_\alpha^2\right) A_\alpha + 2\omega_\alpha^2 A_{\alpha+1} \cos(ka) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \left(\omega^2 - 2\omega_1^2\right) A_1 + 2\omega_1^2 A_2 \cos(ka) \\ 0 = \left(\omega^2 - 2\omega_2^2\right) A_2 + 2\omega_2^2 A_1 \cos(ka) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2\omega_1^2 & 2\omega_1^2\cos(ka) \\ 2\omega_2^2\cos(ka) & \omega^2 - 2\omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 = \omega^4 - 2\omega^2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + 4\omega_1^2\omega_2^2\sin^2(ka)$$

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2\sin^2(ka)} \qquad \omega^{*2} := \omega_1^2 + \omega_2^2$$

$$\omega^2 = \omega^{*2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \eta\sin^2(ka)}\right) \qquad \eta := \frac{4\omega_1^2\omega_2^2}{\omega^{*2}} \le 1$$

ha $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \eta = 1$

$$\omega^2 = 2\omega_1^2\left(1 \pm \cos ka\right)$$

A kontinuum-közelítés nem beszél az optikai ágról.