Folytonos közegek mechanikája videópótló jegyzetke
Emelt (előadó: dr. Groma István)

2016. 04. 15.

(Kiindulás: Bernoulli-törvény, anyagmegmaradás, adiabatikus állapotváltozás, Pascal-törvény (hidro*sztatikai*) (lásd: előző órák videói!)

$$\varrho v A = konst.$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\varrho}\frac{v^2}{2} = konst.$$

$$\frac{p}{\varrho^\kappa} = konst.$$

Ezekből számolva:

$$\mathrm{d}\rho v A = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho v A}{\rho v A} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\varrho} + \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}A}{A} = 0$$

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\varrho} - \frac{v^2}{2}\Big) = 0$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\Big(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} - \frac{p}{\varrho}\Big) + v\mathrm{d}v = 0$$

Kicsit bővítsünk!

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}\mathrm{d}\rho$$

Ezt visszahelyettesítve:

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{1}{\varrho}\Big(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} - \frac{p}{\varrho}\Big)\mathrm{d}\varrho + v\mathrm{d}v = 0$$

Vajon mi ez a $\frac{p}{\varrho}$?

Mi ennek a mértékegysége?

$$\left[\frac{p}{\varrho}\right] = 1\,\frac{\mathrm{Pa}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}$$

$$\frac{\mathrm{Pa}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = \frac{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = \frac{\frac{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = \cancel{kg}\frac{\cancel{m}}{\mathrm{s}^2}\frac{1}{\cancel{m^2}}\frac{\mathrm{m}^{\cancel{3}2}}{\mathrm{kg}} = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2$$

Tehát $\frac{p}{\varrho}$ sebesség^2 dimenziójú.

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}\right|_{\varrho_0} := c^2$$

Keressük a $\frac{p}{\varrho} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}$ összefüggést (adiabatikus körülmények között).

$$\frac{p}{\varrho^\kappa} = \text{konst.} = \alpha$$

$$p = \alpha\varrho^\kappa$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} = \kappa\alpha\varrho^{\kappa-1} = \frac{\kappa}{\varrho}\alpha\varrho^\kappa = \frac{p}{\varrho}p$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{p}{\varrho}p$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} = \kappa\frac{p}{\varrho} = c^2$$

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{c^2}{\kappa}$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} - \frac{p}{\varrho}\right) + v\mathrm{d}v = \frac{\cancel{\kappa}}{\cancel{\kappa-1}}c^2\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)}_{\frac{\cancel{\kappa-1}}{\cancel{\kappa}}}\frac{\mathrm{d}p}{\varrho} + v\mathrm{d}v = 0$$

$$\underline{c^2 \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + v\mathrm{d}v = 0} \quad ☺$$

Figyelembe véve, hogy $\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -\frac{\mathrm{d}v}{v} - \frac{\mathrm{d}A}{A}$:

$$-c^2\left(\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}A}{A}\right) = -v\mathrm{d}v$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}A}{A} = \frac{v}{c^2}\mathrm{d}v$$

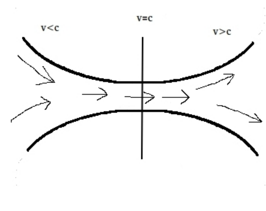
$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = \left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{v}\right)\mathrm{d}v$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = \left(\underbrace{\frac{v^2}{c^2}}_{?!} - 1\right)\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

A $\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)$ kifejezés ismerős lehet a speciális relativitáselméletből. Nos, ennek sajnos semmi köze a specrelhez.

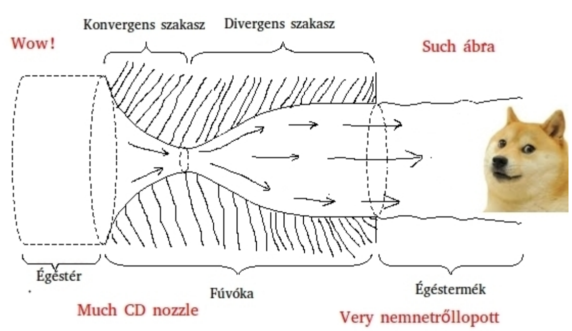
A fenti egyenletből látható, hogy az áramlási csövet szűkíteni kell, ha az áramlási sebességet növelni szeretnénk. (c :hangsebesség)

De mi van, ha $v \overset{!}{>} c$, azaz a (közegbeli) hangsebességnél gyorsabb áramlást szeretnénk elérni?
Látható, hogy ilyenkor, $\frac{\mathrm{d}A}{A} \overset{!}{>} 0$, azaz a csövet szélesítenünk kell!



A gáz hangsebesség fölé gyorsítására szolgáló cső

Az elrendezést nagyon hatékonyan valósítja meg az elsősorban gőzturbinákban és rakétamotorokban használt, homokóraüveg-forműájú *Laval-fúvóka*(*Laval-cső*; *de Laval nozzle*; *convergent-divergent nozzle*; *con-di nozzle CD nozzle*), melyet feltalálójáról, *Gustaf de Laval* svéd mérnökről nevezték el. (A Concorde orra kicsit más*)



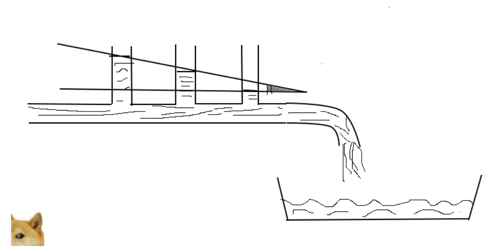
Laval-fúvóka

Kísérlet:

Vezessünk nyomás alatt lévő vizet egy állandó keresztmeteszetű vízszintes csövön keresztül egy edénybe, úgy, hogy a vízszintes csőből egyforma, állandó keresztmetszetű, felülről nyitott csövek ágazzanak ki függőlegesen

*egymillióért Párizsból Londonba...

felfelé, egymás mellett, az ábra szerint! Azt tapasztaljuk, hogy az egymást követő csövekben egyre csökken a vízszint, ahogy a víz áramlásának irányába haladunk.



Ez ellentmondani látszik a Bernoulli-törvénynek.Miért történik ez?

válasz: azért, mert nem ideális folyadék — nem igaz az, hogy $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}$ csak a p-től függ.

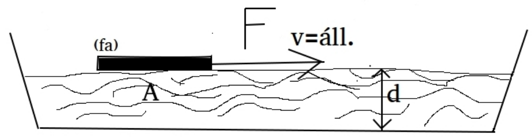
Az első ilyen jelenségekkel foglalkozó kísérleteket a görögök végezték (pl. mézbe ejtett testek mozgását is vizsgálták), akik úgy tartották, a test sebessége egyenesen arányos a rá ható erő nagyságával ($g \sim \lambda v$).

Ezzel szemben Newton törvényében azt állította, hogy az erő nagysága a test *gyorsulásának* nagyságával arányos ($F_g = ma$).

Newton kísérleteket végzett az ezen törvényével a látszó jeleségek vizsgálatára. Például sekély vízréteg felszínére helyezett fa deszkát húzott vízen, és úgy találta, hogy ahhoz, hogy egyenletes sebességgel mozgassa a deszkát, állandó erővel kell hatnia. (Hasonló dolog játszódik le, mint az ellenálló közegbe ejtett kis test esetében.)

$$F = \eta \frac{Av}{d},$$

ahol az F a mozgatáshoz szükséges erő, v a mozgás sebessége, A az érintkezési felület, d a folyadék mélysége, η pedig egy anyagra (folyadékra) jellemző állandó (*viszkozitás*).



Newton kísérlete

$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\text{nyírófeszültség}-\text{jellegű } (\tau=\eta\frac{\text{v}}{\text{d}})} = \eta\frac{v}{d}$$

feszültségtenzor a rugalmasságtanban: $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}};\ \dot{\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}})$, nem függ eltolástól, elforgatástól;
$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}$-től függ intelligens gyurma esetén, $\dot{\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}}$-től függ szilárd anyag esetén

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right) \text{ (rugalmasságtanban levezethető)}$$

$$\text{folyadékra vagy gázra: } \hat{\underline{\underline{\sigma}}} = -p\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \hat{\underline{\underline{\sigma}}}'(\dot{\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}})$$

Feltesszük, hogy a folyadék izotróp, ezért olyan $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}'$ kell, hogy izotróp legyen a folyadék.

Izotróp rugalmasságtanban:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ll}$$

ennek analógiájára izotróp viszkózus folyadékokban:

$$\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + \eta'\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ll}$$

$$\mathrm{Sp}(\dot{\varepsilon}) = \underbrace{\mathrm{div}(\underline{v})}_{\text{összenyomhatatlan folyadákokban nem lép fel}}$$

az $\eta'\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ll}$ tag az összenyomhatóságot jellemzi

$$\underline{\mathrm{div}(\underline{v}) = ?}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j}+\frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right)+\eta'\delta_{ij}\mathrm{div}(\underline{v})\right]=\eta\frac{\partial}{\partial r_j}\mathrm{div}(\underline{v})+\eta\Delta^{*}\ v_j+\eta'\frac{\partial}{\partial r_j}\mathrm{div}(\underline{v})$$

$$\mathrm{div}(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}')=\eta\Delta\underline{v}+(\eta+\eta')\mathrm{grad}\big(\mathrm{div}(\underline{v})\big)$$

$$\mathrm{div}(\underline{\underline{\hat{\sigma}}})=\underbrace{-\mathrm{grad}(p)+\eta\Delta\underline{v}}_{\text{összenyomhatatlan folyadékban csak ez van}}+(\eta+\eta')\mathrm{grad}\big(\mathrm{div}(\underline{v})\big)$$

egységnyi térfogat impulzusa: $\varrho(\underline{vr};\ t)$

de: nekünk a részecskék mozgását kell nyomon követnünk, nem a sebességet nézegetjük egy adott helyen!

$$\underline{a}_i=\frac{d}{dt}v_i(\underline{r}(t);t)=\frac{\partial v_i}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial v_i}{\partial r_j}v_j+\frac{v_i}{\partial t}=(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v}+\frac{\partial v_i}{\partial t}$$

(i-edik részecske gyorsulása(?)**)

$$\boxed{\underbrace{\varrho\left[(\underline{v}\ \underline{\nabla})\underline{v}+\frac{\partial v}{\partial t}\right]=-\mathrm{grad}(p)+\eta\Delta\underline{v}+(\eta+\eta')\mathrm{grad}\big(\mathrm{div}(\underline{v})\big)}_{\text{Navier}-\text{Stokes egyenlet}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho+\mathrm{div}(\varrho\underline{v})=0$$

amiben megjelenik egy új ismeretlen: ϱ

$p(\varrho)$ összefüggés az anyagra jellemző (állapotegyenletből)

pl.:

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{R}{M}T\quad\text{(ideális gáz)}$$

itt T új ismeretlenként jön be

*ez a Laplace-operátor! a továbbiakban is az lesz a Δ - összehasonlításképpen a „ változás ” legyen $\vartriangle$!

**ebben nem vagyok egészen biztos

nicolaus

Itt új feltevéseket, közelítéseket használhatunk, pl feltehetjük, hogy $T =$ áll., vagy ha nem, akkor ide kell írnunk pl. a hővezetést leíró tagot.

Összenyomhatatlan folyadékra: $\mathrm{div}(\underline{v}) = 0$

$$\boxed{\varrho\left[\left(\underline{v}\ \underline{\nabla}\right)\underline{v} + \frac{\partial v}{\partial t}\right] = -\mathrm{grad}\left(p\right) + \eta\Delta\underline{v}}$$

A rugalmasságtanban látottakkal szemben ez az egyenlet nem lineáris, stacionárius esetre sem (turbulens áramlások léphetnek fel). Az egyenlet linearizálásával kapott lineáris alapmegoldások lamináris áramlást írnak le. Ezek nem maradnak stabilak, turbulens áramlások alakulnak ki. Mindig a $\left[\left(\underline{v}\ \underline{\nabla}\right)\underline{v} + \frac{\partial v}{\partial t}\right]$ tag okozza a gubancot, ami azért jött be, mert részecskék mozgását írjuk le.

Az egyenlet megoldható, ha ismert a $p(\underline{r};\ t)$ összefüggés (ez egy *kényszerfeltétel*, a ϱ emiatt nem változik meg), és ebből a $v(\underline{r};\ t)$.

Olyan $p(\underline{r};\ t)$ kell, hogy $\mathrm{div}\big(\underline{v}(\underline{r};\ t)\big) = 0$ teljesüljön!

I ♥ LaTeX