Tételjegyzék
Folytonos közegek mechanikája
Fizika I. évfolyam

1.Egyszerű deformációk, nyújtás, haránt összehúzódás, összenyomás, nyírás

2 A deformációs tenzor bevezetése

3 Feszültségtenzor, kontinuumok mozgásegyenlete

4 Általános Hook törvény, izotrop közegek rugalmas tulajdonságai

5 Csavarás, lehajlás, kihajlás

6 Hidrosztatika, Pascal törvény, Arkhimédész törvény, forgó folyadék felszíne, barometrikus magasságformula

7 Felületi feszültség, görbületi nyomás, kapilláris emelkedés

8 Ideális folyadék áramlása, Bernoulli törvény és alkalmazása

9 Súrlódó folyadék, a feszültségtenzor alakja, áramlás csőben

10 Hang terjedése gázban, hullámegyenlet

11 Rugalmas hullámok terjedése

12 Leejtett rugó

Groma István
egyetemi tanár

Folytonos közegek mechanikája

Oktató: Groma István

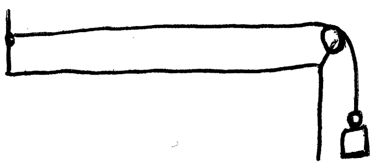
Aj. könyv: Bérces-Tasnádi mechanika (2. fejezet)

folytonos közeg:

- nem merevek a testek
- nem tekintünk az atomokra, folytonos ~~közeg~~ fgv.-ekkel írjuk le

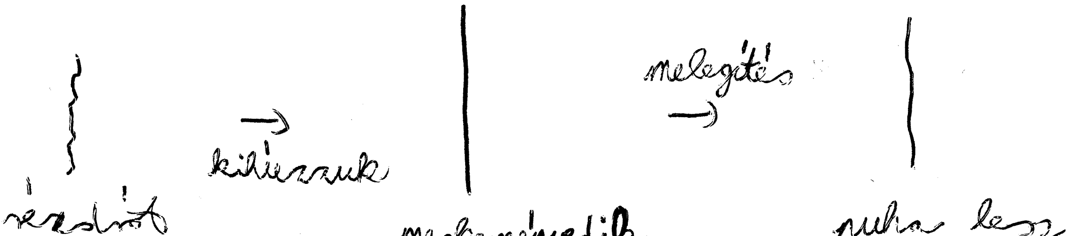
$\boxed{0{,}2\ \text{nm}}$ (2 angström) (±20%) az atomok távolsága a rácsban
(minden kristályos -||-)

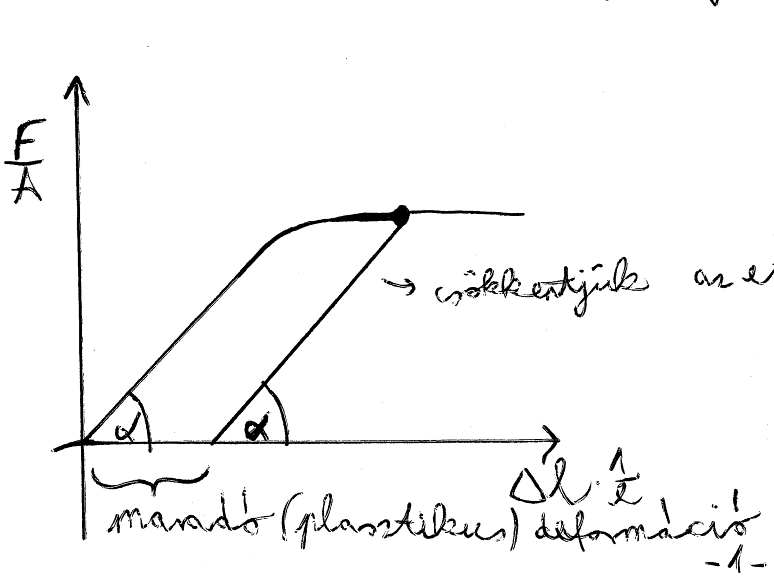
Kísérlet:

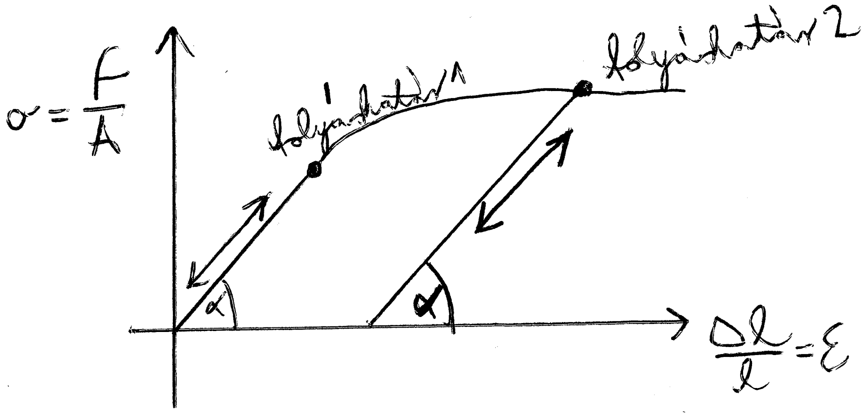


terheléssel egyenesen arányos a megnyúlás (lineárisan)

$F \sim \Delta l$







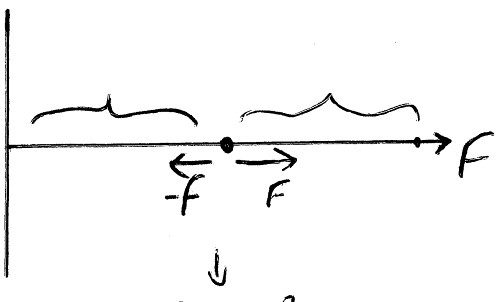
egy kritikus pont alatt rugalmasan viselkedik (reverzibilis a deformáció), felette deformálódik

folyáshatár: addig reverzibilisen el lehet menni

A deformáció hatására megnő a folyáshatár, ami alatti erővel rugalmasan deformálódik
(eltolódik az egyenes)

alakítási keményítés

amikor kihúzzák a fémhuzalt (vagy rezet), deformálják, és megnövelik a folyáshatárt



⇓

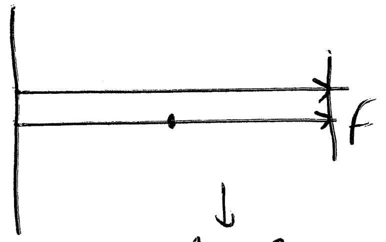
kell lennie egy F ellenerőnek, mert különben gyorsulna

2 ugyanakkora drótszakasz ugyanannyival nyúlik meg, egymás mögé rakva összeadódik a megnyúlás

⇓

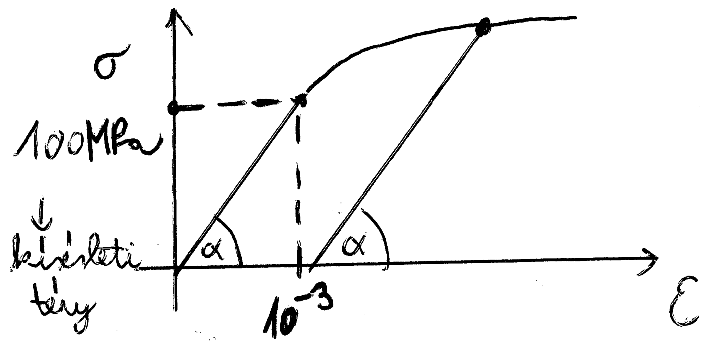
érdemes relatív megnyúlást használni:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$



ha 2-szer olyan vastag drótot húzunk meg, 2-szer akkora erő kell

érdemes bevezetni az $\frac{F}{A}$ mennyiséget (mech. feszültség) σ



$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

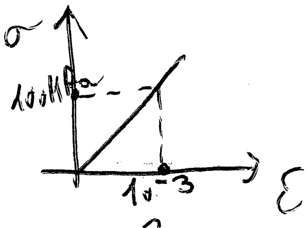
E: Young-modulus (az a folyáspont alatt lineáris összefüggés van a rel. megnyúlás és σ között)

$E \approx 100\ \text{GPa}$

$\varepsilon = \boxed{10^{-3}}$ deformáció az, amit el tudnak viselni az anyagok (relatív megny.)

ε kicsi, ezt később ki fogjuk használni
(látszólag lehet nagy is a deformáció, de a relatív megny. 2 pont között kicsi)

Mi mostantól csak a



tartományon fogunk dolgozni

A deformáció hatására nem csak a hossz csökken, de az átmérő is:

$$\frac{\Delta d}{d} \sim \frac{\Delta l}{l}$$

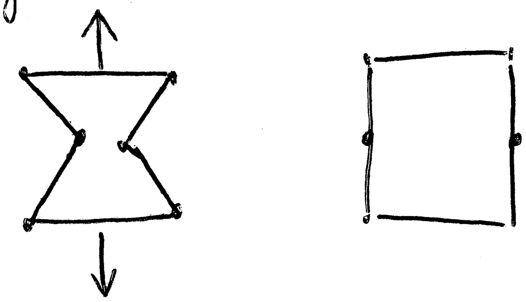
$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$$

ν: Poisson-szám (Poisson-ratio)

$\nu \approx 0,3$

negatív is lehet

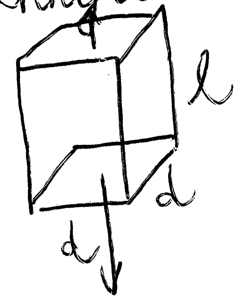
pl.



vannak ilyen krist. anyagok is, melyek bizonyos irányban így viselkednek

(pl. dugó)

Mennyivel változik a térfogat?



$$\frac{(l+\Delta l)(d+\Delta d)^2 - l d^2}{l d^2} = \frac{\Delta V}{V} =$$

$$= \frac{(l+\Delta l)(d^2+2d\Delta d+\cancel{\Delta d^2}) - l d^2}{l d^2} =$$

$$= \frac{\cancel{ld^2} + \Delta l\, d^2 + 2 l d \Delta d + \cancel{2\Delta l \Delta d\, d} - \cancel{ld^2}}{l d^2} =$$

elhanyagolható, mert a $d \cdot \Delta d$-hez képest $\approx 10^{-3}$-szorosa

$$= \frac{\Delta l\, \cancel{d^2}}{l \cancel{d^2}} + \frac{2\cancel{l}\cancel{d}\Delta d}{\cancel{l}d^{\cancel{2}}} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d}$$

ezt is elhanyagoljuk

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} = (1-2\nu)\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} \approx \varepsilon$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\overbrace{3\,\frac{1-2\nu}{E}}^{\frac{1}{K}}\,p$$

amikor mindhárom irányból összenyomjuk (pl. folyadékban)

$(p = \sigma)$ (bizonyítható a képlet, hasonló elhanyagolásokkal)

az előbb széthúztuk, most összenyomjuk

$$\left(\frac{1}{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)}\right)$$

$\frac{1}{K}$: kompresszibilitás

K: kompressziómodulus

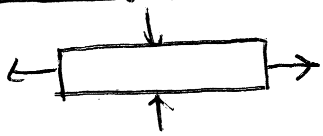
stabil rendszer, aminek a kompressziómodulusa negatív lenne, nem létezik
(ha összenyomjuk minden irányból, nem nőhet a térfogat)

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\nu < 0{,}5}}$$

2. óra

1) Ism.: Nyújtás:



felületre merőleges erő

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$\varepsilon \approx 10^{-3}$

harántösszehúzódás:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$$

kompresszibilitás

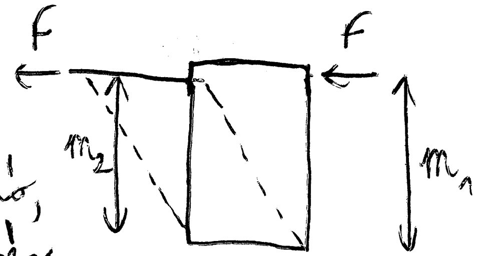
$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{3(1-2\nu)}{E} \cdot p$$

elhanyagolással

$\frac{E}{3(1-2\nu)}$: kompressziómodulus

2) Nyírás:

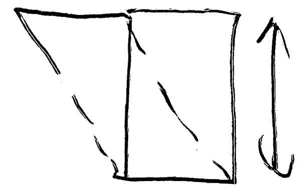
a felülettel ||-os az erővel



$$\tau = \frac{F}{A}$$ nyírási deformáció,

τ: nyírási feszültség

a) „tiszta nyírás": $\Delta V = 0$ →



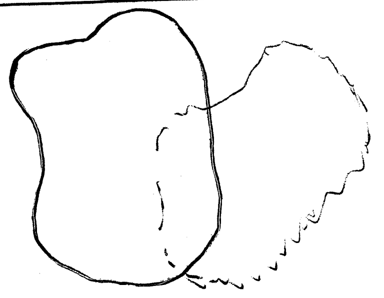
m → a mag. nem változik

ált. ban: nem csak nyírási, hanem nyújtási fesz. is kell

$$\boxed{\tau = \mu \gamma}$$

μ: nyírási modulus

Ált. deformáció:

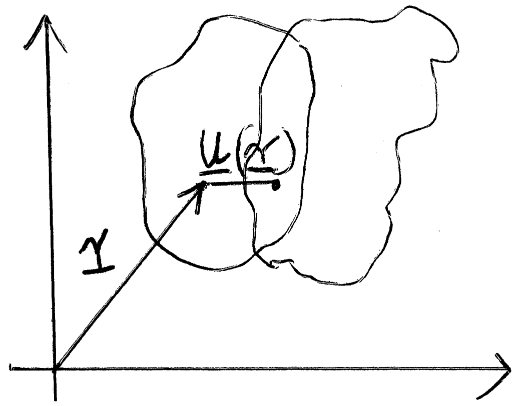


- Most nem akarunk a merev test-szerű mozgásával foglalkozni (transzláció + rotáció)

$$v = v_0 + \rho \times \omega$$

- Ekkor foglalkoznunk kell a belső erőkkel

Most csak a centrális belső erőkkel foglalkozunk (elképzelhető olyan eset is, amikor nem csak ~~belső~~ centrális belső erők vannak, pl. mágneses térben)

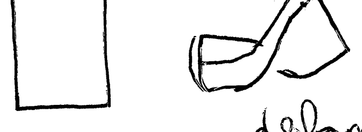


$\underline{u}(\underline{r}) \rightarrow$ mennyivel ment odébb az adott pont (mely $\underline{r}$-ről volt)

a szilárd testeknél vannak olyan referenciaállapotok, amikor nem hatnak belső erők

↓

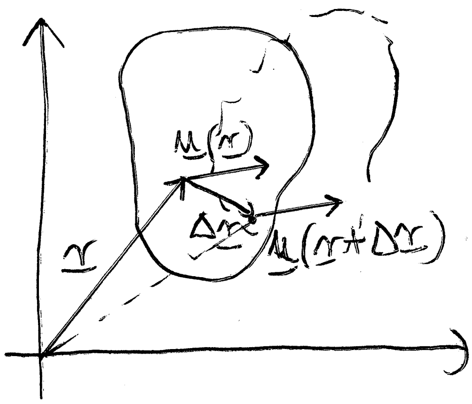
ha rugalmas a deformáció



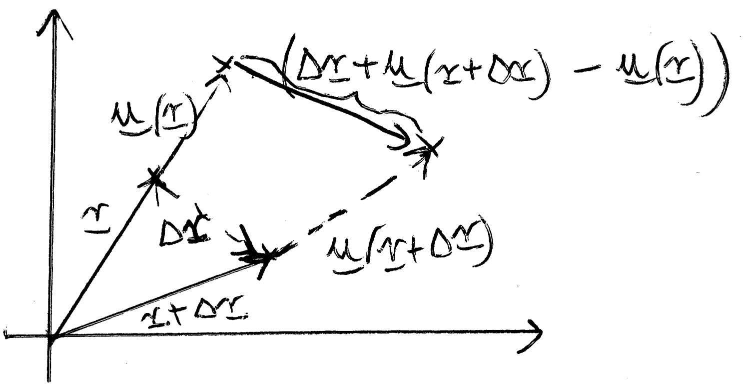
szivacs referenciaállapota

deformált áll.

ehhez a referenciaállapothoz rögzítjük a koordinátarendszert.



Minket az érdekel, hogy a relatív távolság a pontok között mennyit változott:



$\frac{\Delta s}{\Delta r}$: a relatív távolság változása

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{\sqrt{|\Delta \underline{r} + \underline{u}(\underline{r}+\Delta \underline{r}) - u(\underline{r})|^2} - |\Delta \underline{r}|}{|\Delta \underline{r}|}$$

$$u_1(\underline{r}+\Delta \underline{r}) - u_1(\underline{r}) \approx (\text{grad}\, u_1)\cdot \Delta \underline{r}$$

$$\underbrace{\text{grad}\, u_1}_{\text{vektor}} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}\right)$$

$$\text{grad}\, u_2 = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}, \dots\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x}, & \frac{\partial u_1}{\partial y}, & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}, & \frac{\partial u_2}{\partial y}, & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x}, & \frac{\partial u_3}{\partial y}, & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\beta:} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u_1}{\partial z}\Delta z \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{vektor}} \approx \underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r})$$

β: disztorzió tenzor $\xrightarrow{}$ mátrix

$$\beta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial r_j}$$

$$\boxed{\underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) = \hat{\beta}\Delta\underline{r}}$$

$$u_i(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - u_i(\underline{r}) \approx \beta_{ij}\underbrace{\Delta r_j}$$

Einstein-féle néma index konvenció

$$\hat{\beta}\cdot\Delta\underline{r}$$

másik jelölés: $\hat{\beta} = \frac{d\underline{u}}{d\underline{r}}$ → vektor – vektor fv. megváltozása

↓

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{\sqrt{(\Delta r_i + \beta_{ij}\Delta r_j)(\Delta r_i + \beta_{ik}\Delta r_k)} - \Delta r_i}{\Delta r_i}$$

mo2.:

$$(\Delta r_i + \beta_{ij}\Delta r_j)(\Delta r_i + \beta_{ik}\Delta r_k) = \Delta r_i \Delta r_i + \overbrace{2\Delta r_i \beta_{ij}\Delta r_j}^{\text{korrekció}} + \underbrace{\cancel{\beta_{ij}\beta_{ik}\Delta r_j \Delta r_k}}_{\Delta r\,\tilde{\beta}\cdot\beta\cdot\Delta r}$$

mivel $\beta \approx 10^{-3}$ általában nagyságrendű →

$\Delta r_i \beta_{ij} \Delta r_j = \Delta r \, \beta \cdot \Delta r$

$\downarrow$

β antiszimmetrikus ~~komponensei~~ nem adnak járulékot (i és j felcserélhető!)

↘ β-nak csak a szimm. része jelenik meg (az antiszimm. 3x3-as mátrix ~~egy~~ forgatás)

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\beta_{ij} + \beta_{ji}\right)}$$

$\downarrow$ deformációs tenzor

$\uparrow$ transzponált

$\Downarrow$

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{\sqrt{\left|\Delta \underline{r} + \underline{u}(\underline{r}+\Delta \underline{r}) - \underline{u}(\underline{r})\right|^2} - |\Delta r|}{|\Delta \underline{r}|} = \frac{\sqrt{\Delta r_i \Delta r_i + 2\Delta r_i \varepsilon_{ij} \Delta r_j} - |\Delta r|}{|\Delta \underline{r}|} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{1 + 2 n_i \varepsilon_{ij} n_j}}_{1 + \frac{2 n_i \varepsilon_{ij} n_j}{2}} - 1 \qquad \underline{n} = \frac{\Delta r}{|\Delta \underline{r}|}$$

(sorfejtés) $\sqrt{1+2x} \approx 1 + x$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta r} \approx n_i \varepsilon_{ij} n_j}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \underline{n}\, \hat{\varepsilon}\, \underline{n}$$

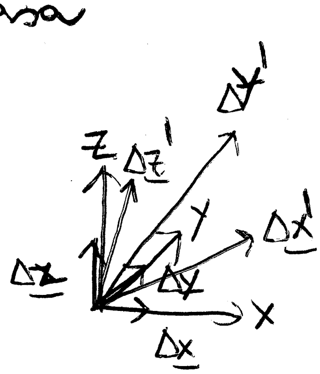
→ nem tartalmazza a merev test szerű elmozdulásokat → transzláció

ha $\underline{u}$ ugyanaz, ~~grad u~~ $\beta = 0$

↓ rotáció antiszimmetrikus

$\hat{E}$ → koordinátarendszertől függ a felírása

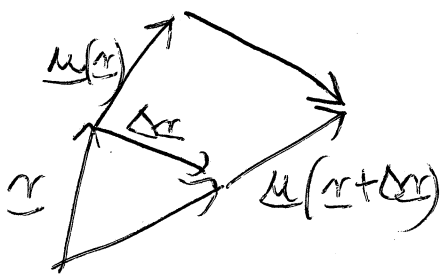
↳ vannak sajáttengelyei



Mennyi a relatív térfogatnövekedés?

$$\Delta\underline{x} = (\Delta x, 0, 0), \quad \Delta\underline{y} = (0, \Delta y, 0), \quad \Delta\underline{z} = (0, 0, \Delta z)$$

$$\Delta\underline{r} \to \Delta\underline{r} + \hat{\beta}\,\Delta\underline{r}$$



$$\Delta\underline{x}' = \Delta\underline{x} + \hat{\beta}\cdot\underbrace{\Delta\underline{x}}_{\begin{pmatrix}\Delta x\\0\\0\end{pmatrix}} = (\beta_{11}+1, \beta_{21}, \beta_{31})\cdot\Delta x$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \hat{\beta} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_{11}\Delta x\\ \beta_{21}\Delta x\\ \beta_{31}\Delta x\end{pmatrix}$$

$$\Delta\underline{y}' = (\beta_{12}, 1+\beta_{22}, \beta_{32})\Delta y$$

$$\Delta\underline{z}' = (\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}+1)\Delta z$$

$$\Delta V' = \begin{vmatrix} 1+\beta_{11}, & \beta_{21}, & \beta_{31} \\ \beta_{12}, & 1+\beta_{22}, & \beta_{32} \\ \beta_{13}, & \beta_{23}, & 1+\beta_{33} \end{vmatrix}\Delta x\Delta y\Delta z$$

Jacobi-determináns

$$\Delta V' = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix}$$

a β^2-es és β^3-ös ~~tagokat~~ elhanyagolhatjuk

$$\Downarrow$$

$$\Delta V' \approx (1+\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33})\Delta V$$

↑ elhanyagoljuk a többit (β^2, β^3)

$$(1+\beta_{11})(1+\beta_{22})(1+\beta_{33})$$

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = Sp\,\hat{\beta} = \underline{\underline{Sp\,\hat{\varepsilon}}}$$

relatív térfogatváltozás = deformációs tenzor spurja

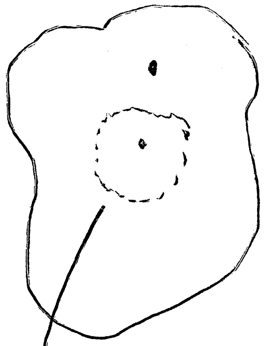
$\Downarrow$

- a deformációs tenzor nem diagonális elemei nem tudják megváltoztatni a térfogatot

  $\Downarrow$

  ezek biztos, hogy a tiszta nyírást fejeznek ki

- ~~a~~ mivel a spur nem tud megváltozni a koord. rendszerekben $\Rightarrow$ a térfogat is ugyanannyit változik a koord. rendszertől függetlenül



szivacs → pontrendszer, ami tud deformálódni

$$\sum F_k = M\ddot{\underline{r}}_0$$

$$\sum M_k = M\ddot{\underline{r}}_0 \times r_0$$

– de a szivacs egy része is pontrendszernek tekinthető

↳ ehhez képest viszont egy külső szivacsponttól ható erő is külső erő

↓

a tömegk.p.-ra belső erők is hatnak

″ (↳ az eredeti szivacshoz képest)

– az atomok ~ 2 angström távolságban még k.h.-nak

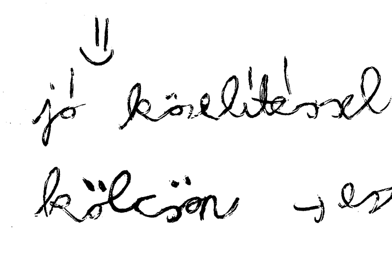
de 4 –″– –″– már nem

⇓

! jó közelítéssel csak a szomszédokkal hatnak kölcsön → ezt ki fogjuk használni

⇓

(a volt belső erő) külső erőkben lényeges járulékot csak a felületen lévő atomok adnak



→ + a felület nagyságával lesz arányos az az erő, ami járulékot ad (mert n atom a felületen ~ $A_{felület}$)

$\underline{\Delta f} \sim \Delta \underline{A}$

$$\boxed{\Delta \underline{F} = \hat{\sigma}\, \Delta \underline{A}} \qquad [\hat{\sigma}] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

↓

feszültségtenzor (Pa)

3. óra

Em.:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

↓

derivált: nem felelős a transzlációért

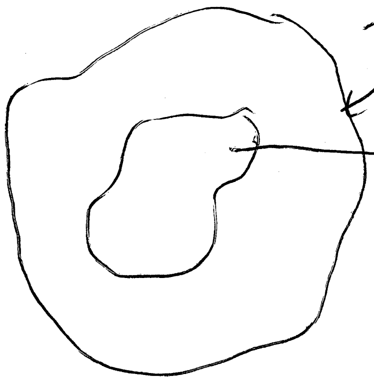
szimm.: —||— a rotációért

= vhogy a belső erőkért felelős

↓

cél: vmilyen mozgásegy. folyt. közegre

szilárd test (ezt ki fogjuk használni)



az alrendszere 2 féle külső erő hathat:

- tényleges külső erők
- „térfogati erők", pl. gravitációs erők, elektrosztat.

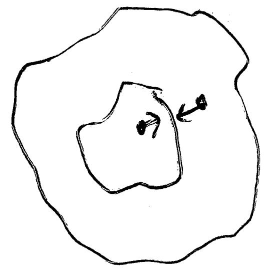
$$\boxed{\Delta \underset{\sim}{f} = \underline{f}\, \Delta \underset{\sim}{V}}$$

az egész testre ható erő

a test térfogata

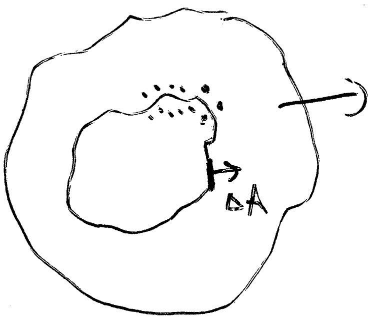
egységnyi térfogatra von. erő

- „belső erők": az alrendszer szempontjából ez egy külső erő



„szerencse": az atomi erők „rövidtávúak"
ezért „elsőszomszéd k.h.-t" veszünk csak figyelembe
(mert „exponenciálisan", gyorsan esik le a k.h.)

⇓ (felületen)
ezért csak a felszínen lévő erők számítanak



→ úgy összegezzük, hogy egy kis felületdarabkára ható erőt integráljuk a felületre.

- észrevétel: ez a kis felületre ható erő a felület nagyságával arányos, mert az arányos a felületen lévő atomok számával

$$\boxed{\Delta \underline{F}_b = \underbrace{\hat{\sigma}}_{} \; \Delta \underline{A}}$$ $[\sigma] = Pa$

feszültségtenzor - egyelőre még nem tudunk róla semmit

- helyről helyre változhat ő értéke

Tehát az alrendszerre ható erők összege:

$$\underline{F} = \int_V \underline{f}(\underline{r})\, dV + \oint \hat{\sigma}\, d\underline{A} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, \underline{v}\, dV$$

helyről helyre változhat

az alrendszert záró felület határolja

a részecskék sebessége

az összimp. megváltozása

$$\boxed{\int_V \underline{f}(\underline{r})\, dV + \oint \hat{\sigma}\, d\underline{A} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, \underline{v}\, dV}$$

(tenzor felületi integrálja: a tenzor sorait, mint vektorokat integráljuk)

msz.: Gauss-tétel:

$\underline{E}(\underline{r})$ vektortér

$$\oint \underline{E}\, d\underline{A} = \int_V (\mathrm{div}\, \underline{E})\, dV$$

a felület által határolt térfogat

msz.$_2$: Tenzor divergenciája:

$(\mathrm{div}\, \hat{\sigma}) \rightarrow$ vektor

$$(\mathrm{div}\, \hat{\sigma})_i = \frac{\partial}{\partial r_j}\sigma_{ji}$$

(az első sorának a divergenciáját szám. ki $\rightarrow$ 1. komp.)

$$\int_V \left[\underline{f}(\underline{r}) + \mathrm{div}\, \hat{\sigma} \right] dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, \underline{v}\, dV$$

mennyi a $\underline{v}$ az egyes részecskéknél?

$\underline{u}(\underline{r})$ adott → mennyit mozdul el az $\underline{r}$ helyen lévő rész.

↳ $\underline{v} = \frac{\partial \underline{u}(\underline{r})}{\partial t}$

$$\int_V \left[\underline{f}(\underline{r}) + \operatorname{div} \hat{\sigma}\right] dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

(pillanatnyi) térfogat

dV → referencia térfogat

$\frac{\partial u}{\partial t}$ → pillanatnyi seb.

a részecskék pillanatnyi impulzusa

= feltesszük, hogy nem tud olyan sokat változni a referencia térfogat (szilárd testeknél)

(pillanatnyi térfogat ≈ referencia térfogat) minden időpillanatban → a deriválás nem vonatkozik dV-re, mert áll

– azt se vesszük figyelembe, hogy a sűrűség is ~~változhat~~ időben → a deriválás ρ-ra sem von.

⇓

$$\int_V \left[\underline{f}(\underline{r}) + \operatorname{div} \hat{\sigma}\right] dV = \int_V \rho \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\ddot{\underline{u}}} dV$$

$$\int_V \left[\underline{f}(\underline{r}) + \operatorname{div} \hat{\sigma}\right] dV = \int_V \rho \ddot{\underline{u}} \, dV$$

minden alrendszerre igaznak kell lennie az állításnak (minden térfogatra)

megj.: (olyan eset is van, amikor nem hanyagoljuk el a második, ... számú kh.-at)

$\Downarrow$

I. $$\boxed{\rho\,\underline{\ddot{u}} = \underbrace{\underline{f}(\underline{r})}_{\text{külső erő}} + \underbrace{\mathrm{div}\,\hat{\sigma}}_{\text{belső erő}}}$$

$\downarrow$

ez anyagtól függő

- amennyiben $\hat{\sigma}$ szimmetrikus ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), akkor magától teljesül a perdületre vonatkozó állítás (automatikusan)
- ha $\hat{\sigma}$ nem szimmetrikus $\rightarrow$ külön meg kell vizsgálni

mi most ezt vizsgáljuk:

II. $$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$$

- a belső erőket most $\hat{\sigma}$ méri
- de eddig a belső változásokat $\hat{\varepsilon}$ mérte

$\Downarrow$

$$\hat{\sigma}(\hat{\varepsilon}) = ?$$

$\neq$

~~$\hat{\varepsilon}$-t könnyebb mérni, mint $\hat{\sigma}$-t, ezért inkább ezzel akarjuk $\hat{\sigma}$-t leírni~~

$\hat{\sigma}(0)=0$

↓

0 deformációra 0 a σ

lineáris kapcsolat van σ és ε között, és ha az ε-ok összeadódnak, a σ-k is

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}}$$

általánosított Hooke-törvény

$$\left(\hat{\sigma} = \hat{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}\right)$$

mérnöki jelölés

Milyen ilyen $\hat{\hat{C}}$-k léteznek?

- ε szimmetrikus mátrix

⇓

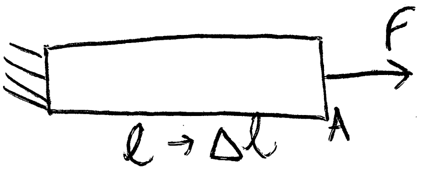
$C_{ijkl} = C_{ijlk}$

- σ is szimmetrikus (lsd. előző oldal)

⇓

$C_{ijkl} = C_{jikl}$

kis kitérés:



$$F = \underbrace{E\cdot\frac{A}{l}}_{D}\,\Delta l$$

↓

olyan, mintha ez egy rugó lenne

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{AE}{l}\,\Delta l^2 \underset{\frac{l}{l}}{=} \frac{1}{2}\,E\cdot\underbrace{A l}_{V}\cdot\underbrace{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,E\cdot\varepsilon^2\,V$$

rugalmas energiasűrűség:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\,E\cdot\varepsilon^2 = \left(\frac{1}{2}\,\sigma_{(\varepsilon)}\,\varepsilon\right) \longrightarrow \frac{dW}{d\varepsilon} = \sigma$$

ε-tól függ σ

- egy potenciális energiából (W) általában minden jellemzőt ki lehet számolni → ezt akarjuk most **is** kiszámolni
- áll.: az atomok közötti kh. konzervatív

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{lk}$$

és $$\frac{dW}{d\varepsilon} = \sigma$$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\, C_{jikl}\, \varepsilon_{lk}$$

$$\frac{dW}{d\varepsilon_{mn}} = \sigma_{mn}$$

- ha a C-nek lenne olyan része, amit ha megcserélnénk ij-t és kl-t, nem lenne szimmetrikus, akkor nem származtathatnánk w-t C-ből, ↳ nem lenne konzervatív a mező

↑ nem lenne igaz $w = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\, C_{jikl}\,\varepsilon_{lk}$

⇓

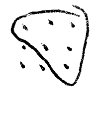
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{lk}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

σ-nak és ε-nak 6 különböző komponense van (mivel szimm.-ak, a nem diagonális elemekből 3-3 megegyezik)



↓

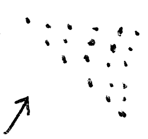
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}}_{\text{6D-ós vektor}}$$

→ definiáljuk ezt a vektort a 6 kül. komp. alapján

⇓ lényegében

átírtuk sima mátrix alakba

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \hat{C} \\ \\ \end{pmatrix}}_{\text{szimm. tenzor}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \end{pmatrix}$$



⇓

max. 21 független komponense lehet

létezik olyan anyag, aminek van is 21 függ. komponense (általános oldalhossz. paralelepipedon alakú primitív cella az elemi cella)

de ~~általában~~ néhány anyag „izotróp" (minden irányban ekvivalens) → ebből indulunk el, az ~~elemi~~ anyagban nem látunk különbségeket

- ha izotróp az anyag, az energia egy másik koordináta rendszerben is ugyanaz!

$\Downarrow$

egy tenzor esetében csak a spur lehet

pl. $\underbrace{Sp\,\hat{\varepsilon},\ Sp\left(\hat{\varepsilon}^2\right),\ Sp\left(\hat{\varepsilon}^3\right)}$

ezek az értékek koordinátarendszertől függetlenek

mi az energiát ezekből úgy akarjuk felépíteni, hogy ε-tól négyzetesen függjön

$\Downarrow$

izotróp anyag esetén:

$$\boxed{w = \mu\left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_{ii}\right)^2}$$

μ, λ : Lamé-állandók

$\downarrow$

$Spur\,\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow$ a 2. tag a relatív térfogatváltozással van kapcsolatban

4. óra

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \qquad \sigma_{ij} = \frac{dw}{d\varepsilon_{ij}}$$

- valamilyen potenciálból akarjuk származtatni az energiát (mint a termodin.-ból) és az erőt
- olyan potenciált szeretnénk, ami tükrözi azt a tul.-ot, hogy ha ugyanolyan (izotróp) az anyag, akkor koord. r.-től függetlenül ugyanaz legyen w

pl. polikristályos anyag → sok-sok kisebb kristályból áll

⇓

a $Sp\,\varepsilon$-ból származtatjuk, mert ez invariáns

⇓

$$w = \mu \cdot \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \underbrace{(\varepsilon_{ii})^2}_{\varepsilon_{ii} \cdot \varepsilon_{jj}} \to \text{izotróp anyagokra}$$

$$\frac{dw}{d\varepsilon_{kl}} = 2\mu \cdot \delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{\cancel{2}} \cancel{2} \delta_{ik} \delta_{il} \varepsilon_{jj} =$$

$$= 2\mu\, \varepsilon_{kl} + \lambda \delta_{kl} \varepsilon_{jj} = \sigma_{kl} \quad \text{(speciálisan izotróp anyagra)}$$

más alak

$$\boxed{\sigma_{kl} = 2\mu \left(\varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \varepsilon_{jj}\right) + \underbrace{\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)}_{K} \delta_{kl} \varepsilon_{jj}}$$

ha $k = l$ (a spurja σ-nak) ez a tag 0
↓
ebben nincs térfogatváltozás (mert nem spur → nem invariáns)

ebben van térfogatváltozás

$(\cancel{\sigma - 1})$

Hogyan adjuk meg a deformációt σ ismeretében?

$$\sigma_{ii} = 2\mu\, \varepsilon_{jj} + 3\lambda \varepsilon_{jj} = (2\mu + 3\lambda)\varepsilon_{jj}$$

$\sum_k \delta_{kk} = 3$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{kl} - \lambda \delta_{kl}\varepsilon_{jj}\right]$$

$$\boxed{\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{kl} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\delta_{kl}\cdot \underbrace{\sigma_{jj}}_{\delta_p\sigma}\right]}$$

<u>Tengely irányú nyújtás:</u>

a σ-nak csak σ_{11} komponense különbözőn 0-tól

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_0 - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\sigma_0\right], & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2\mu}\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\sigma_0, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{2\mu}\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\sigma_0 \end{pmatrix}$$

nem lehet nem diagonális eleme, mert akkor $k \neq l$

$\delta_{kl} = 0 \qquad \sigma_{kl} = 0$, $k \neq l$

központi ~~lineáris (hossz.)~~ nyújtás

$\Downarrow$

$$\frac{1}{E} = \frac{\varepsilon_{11}}{\sigma_{11}}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2\mu}\left[1 - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\right] \to \text{nem tud negatív lenni}$$

$$-\nu = \frac{\Delta d}{d} \Big/ \frac{\Delta l}{\Delta l} = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \begin{array}{l} \to \text{haránt irányú nyújtás} \\ \to \text{hosszanti nyújtás} \end{array}$$

$$\nu = \frac{\dfrac{\lambda}{2\mu+3\lambda}}{1-\dfrac{\lambda}{2\mu+3\lambda}}$$

= K-t, E-t és ν-t ki lehet fejezni 2 független megalmas változóval (λ, μ)

Összefoglalva:

I) $\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$ (4. óra)

II) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right]$ (2. óra)

$\downarrow$

$\mathrm{Sp}\,\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \mathrm{div}\,\underline{u} = \frac{\Delta V}{V}$ $\left(\leftarrow \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial r_k} = \mathrm{div}\,u\right)$

III) $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \cancel{\mathrm{div}\,\hat{\sigma}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j} \sigma_{ij}}_{\mathrm{div}\,\hat{\sigma}}$ (3. óra)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial}{\partial r_j}\left[\underbrace{\mu \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)}_{2\mu \cdot \varepsilon_{ij}} + \lambda \cdot \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k}\right]$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \mu \cdot \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_j}}_{\Delta} \cdot u_i + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial u_j}{\partial r_j} + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial u_j}{\partial r_j} =$$

$$= f_i + \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial r_i} \operatorname{div} \underline{u}$$

$$\boxed{\rho \, \underline{\ddot{u}} = \underline{f} + \mu \cdot \Delta \underline{u} + (\lambda+\mu) \operatorname{grad} \underbrace{(\operatorname{div} \underline{u})}_{\frac{\Delta V}{V}}}$$

Ha $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ (nincs térfogatváltozás),

és $\underline{\ddot{u}} = 0$ (statika)

$$\boxed{-\underline{f} = \mu \cdot \Delta \underline{u}} \qquad \sim \text{ elektrodin.: } -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \Delta \phi$$

Speciális esetek

1) – $\rho \, \underline{\ddot{u}} = 0$ (statika)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{\varepsilon_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{\varepsilon_{33}} \end{pmatrix}$$

csak x-től függ az elmozdulás

– $\underline{u} = (u(x), 0, 0)$ $\quad \downarrow x$ (lefelé mutat) $\quad$ ezeket elhanyagoljuk

– a harántösszehúzódástól eltekintünk $\rightarrow \nu \approx 0$

~~$\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} = 0$ (nincs térfogatváltozás)~~

} ~~Mennyit~~ Hogyan nyúlik a rugó saját súlya alatt?

$u(x) = ?$

$$0 = \rho g + E \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\rho g = -E \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$u(x) = a + bx + cx^2 \rightarrow \ddot{u}(x) = 2c$$

$$\rho g = -2Ec$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c = -\frac{\rho g}{2E}}$$

$\Downarrow$

- még nem egyértelmű a mozgás
- a-t és b-t az anyag tulajdonságaiból még nem tudjuk meghat.

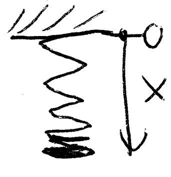
$\downarrow$

<u>peremfeltételek</u> kellenek: meg kell adni, hogy mi történik a rugó 2 végén

- pl. $u(0) = 0 \rightarrow$ oda tesszük a koord. kezdőpontját

$\Downarrow$

$a = 0$

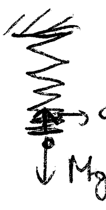


- $Mg = A \cdot \sigma(r) \rightarrow$ ha külső erővel hatunk rá, (súlyt akasztunk rá), akkor a külső erővel a belső erő tart egyensúlyt

és $\sigma = E \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\varepsilon}$

$\Downarrow$

$$\frac{Mg}{A} = E \cdot \frac{du}{dx}\Big|_L$$



$$\frac{Mg}{A} = E\left(b - \frac{\rho g}{E} L\right) \qquad \cancel{u()}$$

$$b = \frac{Mg}{EA} + \frac{\rho g}{E} L$$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{E}\left(\frac{Mg}{A} + \rho g L\right)x - \frac{\rho g}{2E}x^2}$$

↓

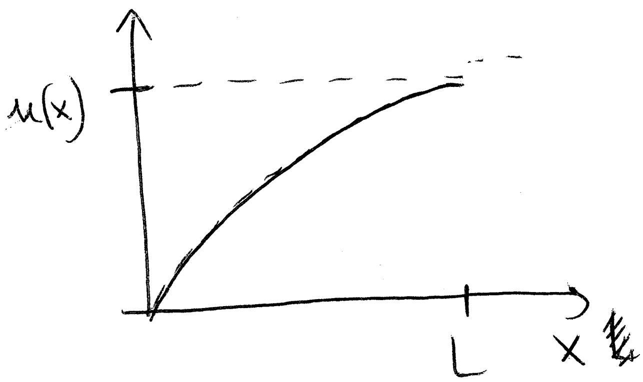
- ha $g = 0$ → $u(x) = \frac{1}{E}\cdot\frac{\overbrace{Mg}^{F_{külső}}}{A}x$ → lineárisan nyúlik meg

- ha $Mg = 0$ (nem akasztunk rá semmit)

$$u(x) = \frac{\rho g L}{E}x - \frac{\rho g}{2E}x^2$$

$x = L$ helyen (a végén)

$$u(L) = \frac{\rho g}{2E}\cdot L^2$$



$$u(L) = \frac{1}{2}\frac{L}{EA}\underbrace{\rho g \underbrace{LA}_{V_{rugó}}}_{mg} = \frac{1}{2}\frac{mg}{EA}L$$

↓

saját súlya alatt feleannyira nyúlik meg, mintha még ugyanannyit ráakasztanánk

2 szabad paraméteres diff. egyenleteket kapunk:

- ε-t $\left(\cancel{\;}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ meg kell adni
- div σ → a külső erők által meghat. -ott felületi feszültség

(Lehet olyan, hogy vannak magasabb rendű deriváltak, ha ~~a~~ nem csak az első szomszéd k.h.-kat vesszük figyelembe)

elektrodin. → konzervatív mező.

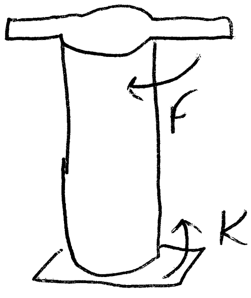
folyt. köz. → nem feltétlenül konz. mező

5. óra

rugalmasságtani problémák → a határfeltételek megadása fonto[s]

sokszor nincsen analitikus megoldás, csak közelíteni lehet

Csavarás

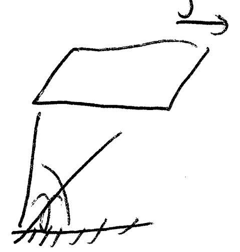


K (itt is forgatni kell

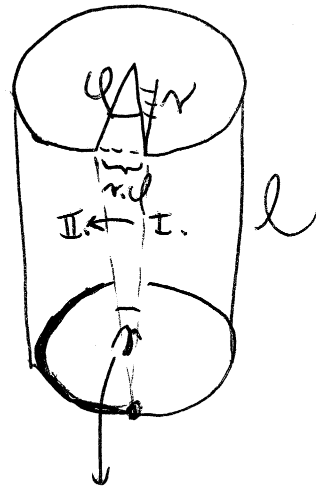
eltekintünk a térfogatváltozástól (tiszta nyírás)

div $u = 0$

van egy nyírási feszültség



–



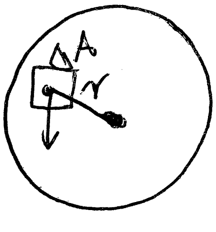
bedől ez az egyenes a nyírás hatására

$\gamma l = r\varphi$ = (ívhossz)

$\tau = \mu \gamma = \mu \frac{r}{l} \varphi$ → nyírás

kifelé nő a nyírási feszültség

– <u>felülnézet</u>



nyírási erő

$\Delta F = \tau \cdot \Delta A$

Mekkora ennek a forgatónyomatéka?

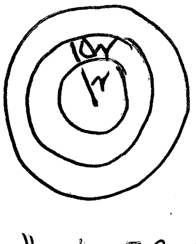
$\Delta M = \tau \cdot r \cdot \Delta A$

ezt kell összegezni az egész felületre

– egy körgyűrű mentén: r (és τ nem ~~τ is nem~~) változik

↓

$$\Delta M = \underbrace{\mu \cdot \frac{r}{l}\varphi}_{\tau} \cdot r \cdot \underbrace{2\pi r \Delta r}_{\Delta A}$$



(körgyűrű területe)

Σ az egész felületre

↓

$$\boxed{\Delta M} = 2\pi \mu \cdot \frac{\varphi}{l} \int_0^R r^3 \underbrace{\Delta r}_{dr} = \boxed{\frac{\pi}{2} \mu \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot R^4}$$

↓

torziós inga → érzékeny eszköz

↳ vékony torziós szál

R kicsi → φ nagyon nagy

$$\Delta M \sim \frac{1}{l}$$

↓

ha ugyanakkora

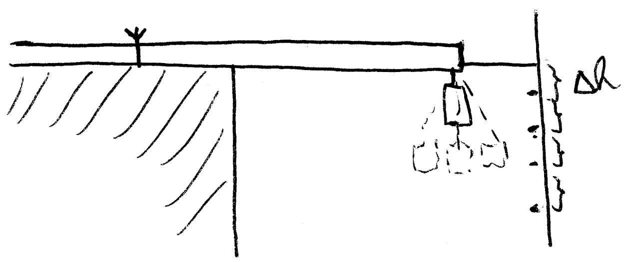
forgatónyomatékkal hatunk,

a teteje 2-szer annyit fordul el

~~Rud~~

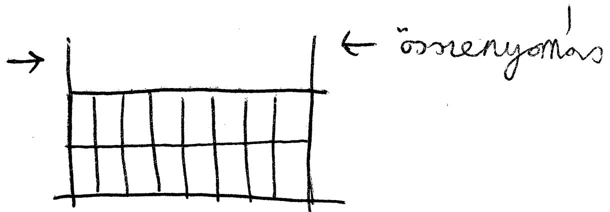
Rudak lehajlása

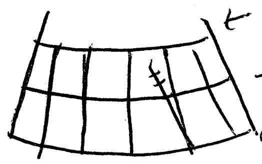
Kísérlet



$F \sim \Delta h$

Kísérlet 2:





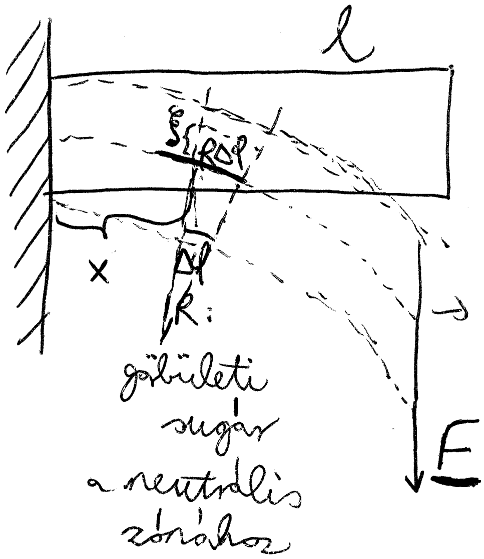
← itt közelebb kerülnek

→ ~~neutrális „zóna"~~ : ennek a vonalnak a hossza nem változik

← itt távolabb kerülnek

↓

a vonalak nem maradnak ∥-ak



R-et még nem ismerjük

→ neutrális zóna: feltesszük, hogy ennek a hossza nem változik ~~és nem~~

ξ -vel a neutrális zóna fölött a megnyúlás:

eredeti hossz ← neutrális zónából tudjuk: eredetileg ez is ekkora volt

$$\varepsilon = \frac{\Delta\varphi(R+\xi) - R\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{\xi}{R}$$

$$\sigma_{11} = E \cdot \underbrace{\frac{\xi}{R}}_{\varepsilon}$$

↓

azt gondoljuk, hogy csak egy ilyen nyújtási feszültség lép fel mindenhol

a rendszer nyugalomban van

⇓

$\Sigma F = 0$ $\Sigma M = 0$ (pontrendszer)

- $\Sigma F = 0$

$$\underline{F} = \underbrace{\int_{\square} \sigma_{11}\, d\underline{A}}_{\text{felületi feszültségek}}$$

↓

külső erő

↓

ezt így nem lehet kiszámolni

↳ csak az erő vízszintes komponensével foglalkozunk

$$\int_{\square} \sigma_{11}\, dA \approx 0$$

↵ azt mondjuk, ezek a feszültségi erők nagyjából vízszintesek

↓

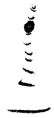
úgy kell megválasztani a ~~Koo~~rendszert, hogy ez teljesüljön → súlyponti rendszer

↓

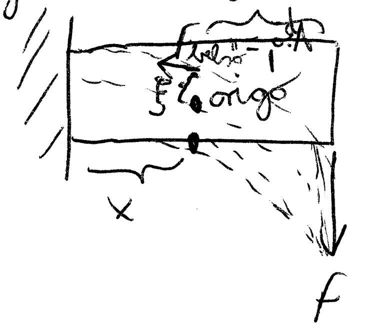
a neutrális zóna közelítőleg a súlypontban van

↑

a neutrális zónának a súlypontban kell lennie, hogy ξ-k előjelesen kiejtsék egymást



• $\Sigma M = 0$ egy a faltól x távolságra lévő pontra nézve



$$F(l-x) - \int_{\square} \xi \cdot \sigma \cdot dA = 0$$

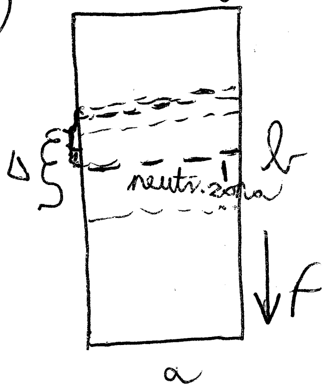
$$\downarrow \quad \sigma_{(x)} = E \cdot \frac{\xi}{R(x)}$$

$$F(l-x) - \frac{E}{R} \overbrace{\int_{\square} \xi^2 \, dA}^{I} = 0$$

I : hajlítási nyomaték

$$\boxed{F(l-x) - \frac{E \cdot I}{R(x)} = 0}$$

I) I=? (hogyan függ az alaktól)



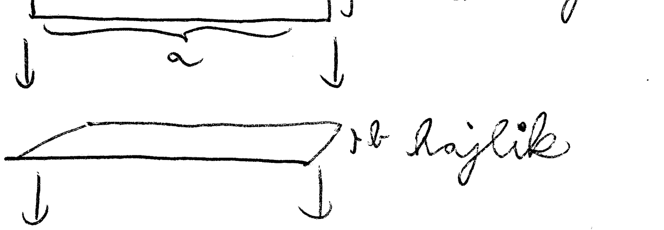
$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi^2 a \cdot d\xi = a \frac{\xi^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 2a \cdot \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3} = \frac{ab^3}{12}$$

↓ Hf köne

↓

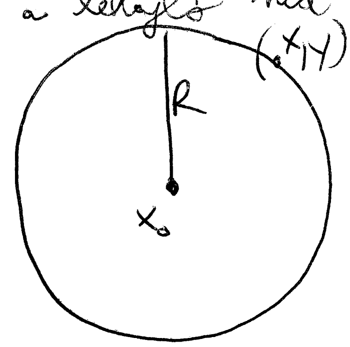
a hajlítási nyomaték nem független a hajlítás irányától

vonalzó



b-től köbösen függ

II) a lehajló rúd alakja:



$$\left(\frac{x-x_0}{\cancel{x-x_0}}\right)^2 + y^2 = R^2 \qquad y = \pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{-\cancel{2}(x-x_0)}{\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-\cancel{(x-x_0)}^2}} + \cancel{(x-x_0)}\dots\right)$$

ha $x \to x_0$

$$\frac{1}{R} \approx \pm\frac{d^2y}{dx^2}$$

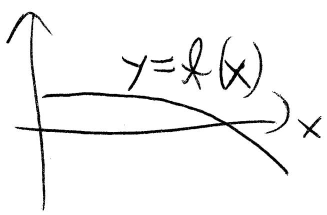
⇓

a görbületi sugár ≈ a fv. 2. deriváltja

- most a ⊖ előjel kell, mert lefelé görbül a vonalzó

$$F(l-x) = -E\cdot I\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

→ $y(x)$ a vonalzó alakját leíró fv.



$$y := a+bx+cx^2+Dx^3$$

$$\frac{dy}{dx} = b+2cx+3Dx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c+6Dx$$

$$\underbrace{F(l-x)}_{Fl-Fx} = -E\cdot I\,(2c+6Dx)$$

⇓

$$Fl = -2EI\cdot c \;\rightarrow\; c = -\frac{Fl}{2EI}$$

$$-F = -EI \cdot 6D$$

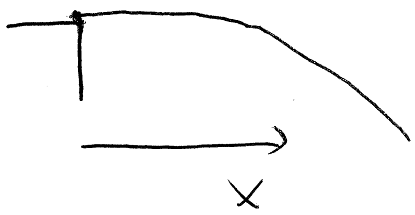
$$D = \frac{F}{6EI}$$

$$\Downarrow$$

$$y = a + bx - \frac{Fl}{2EI}x^2 + \frac{F}{6EI}x^3$$

peremfeltételek:

- a végén fogjuk be:



$$y(0) = 0 \rightarrow a = 0$$

- azt is mi döntjük el, milyen szögben fogjuk be

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{Fl}{2EI}x^2 + \frac{F}{6EI}x^3$$

$$\underline{\underline{y = \frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - lx^2\right)}}$$

$y \sim F \rightarrow$ minden pont lehajlása arányos az erővel

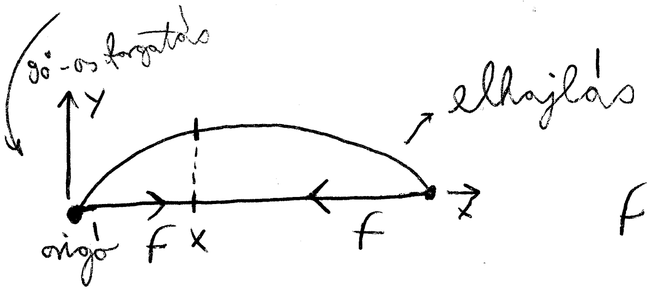
$$y(l) = -F\cdot\frac{1}{\cancel{2}EI}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}l^3 = -F\cdot\frac{l^3}{3E\cdot I}$$

↓

ha 2-szer akkora rudat hajlítunk, 8-szor akkora a lehajlás

Oszlop terhelése felülről

most a rúdtól eltérően $F \perp$ rúd, hanem $F \parallel$ oszlop



az előzőhöz képest annyiban módosul a probléma:

$$F\cdot y = -E\cdot I\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

$y = A\sin(kx+\varphi)$ alakú

$$F = EIk^2$$

$$\boxed{k^2 = \frac{F}{EI}}$$

peremfeltételek:

- $y(0)=0 \Rightarrow \varphi = 0 \to \sin 0 = 0$
- $y(l)=0 \longrightarrow 0 = A\sin(kl) \to \boxed{kl = n\pi}$

közelítőleg → ha csak kicsit hajlítjuk

– ha $n=1$

$$k = \frac{\pi}{l} \qquad \cancel{n=1}$$

↓

$$\boxed{F_{krit} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI}$$

ha $F < F_{krit}$ → nem valósul meg ez a megoldás, hanem simán összenyomódik az oszlop

ha $F \geq F_{krit}$

↳ kihajlik az oszlop

↓

építészek nem szeretik, mert kis terheléseknél is nagyon ki fog térni y irányban

$n=2, \dots$ is lehetséges megoldások

= lineáris stabilitási analízis → F_{krit}-nál szétválnak a megoldások

(a rugalmasságtani problémákat manapság számítógéppel oldják meg véges elemes analízis)

6. óra

Folyadékok és gázok sztatikája

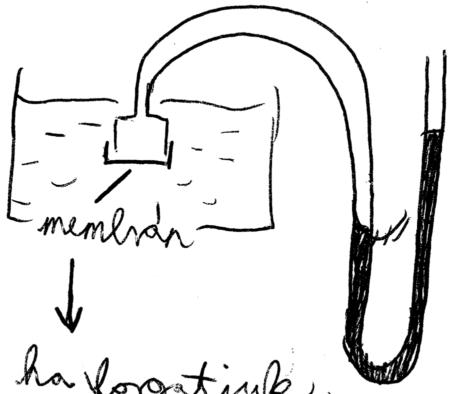
1) sztatika miatt : $\operatorname{div} \hat{\sigma} + \underline{f} = 0$
(lsd. előbb)

most nem lehet $\sigma = E \cdot \varepsilon$ alakban felírni, mint szilárd testeknél
↑

baj: mi kerüljön folyadékok és gázok esetében σ helyére

$\Delta \underline{F} = \hat{\sigma} \Delta A$

Pascal-törvénye



↓

ha forgatjuk, akkor nem változik $\to \sigma$ nem függ $\underline{A}$ irányától

$\underline{F}$

$\Downarrow$

$$\Delta \underline{F} = -\underbrace{p}_{\text{nyomás (pressure)}} \overbrace{\hat{I}}^{\text{egységmátrix}} \Delta \underline{A} \qquad [p] = \mathrm{Pa}$$

vagyis $\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$

↳ egyetlen dolog mondja meg, hogy mi folyadék, vagy gáz-e → ha $\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & & \\ & -p & \\ & & -p \end{pmatrix}$ alakú, akkor foly. vagy gáz, egyébként szilárd anyag

labilis, ⊥
mégse
billen el
maga az edény, → „egyenletesen terjed" a nyomás
csak a mérleg karja

2)

$$\underline{\underline{\mathrm{div}\,\hat{\sigma} = -\,\mathrm{grad}\,p}}$$ (a többi elem 0)

3) ha $\underline{\underline{f}} = \rho \cdot \underline{g} =$ (egységnyi térfogatra ható gravitációs erő)

$$= \underline{\underline{-\rho\,\mathrm{grad}\,\phi}}$$

↓ gravitációs potenciál

$\mathrm{div}\,\sigma + \underline{f} = 0$

↳ $\boxed{\mathrm{grad}\,p + \rho\,\mathrm{grad}\,\phi = 0}$

– „őrült nagy" a kompresszibilitása a folyadéknak

↓

összenyomás hatására V nem tud változni

↓

$\rho = \text{áll} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$

Ekkor: $\mathrm{grad}\,(p + \rho\phi) = 0$ (mindenhol)

$$\boxed{p + \rho \cdot \phi = \text{áll}}$$

vagyis (a gravitációs) ekvipotenciális felületen p is konstans

↓

az ekvipotenciális felület megegyezik az azonos nyomású felületekkel

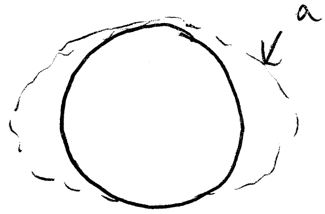
↓

~~pl.~~ primitíven: a víz vízszintesen van

→ ekvipotenciális felület

↓

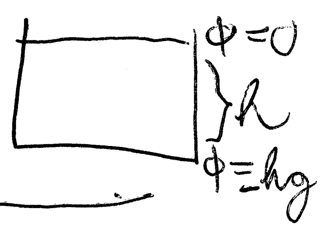
hasonlóan a tenger is követi a Föld ekvipotenciális felületeit



a Föld ~~Föld~~ és a Hold ~~(és a)~~ grav. potenciálja
+ a gyors. koord. rendszer

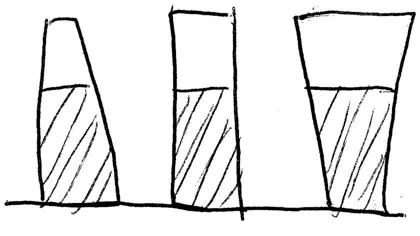
$p + \rho \cdot \phi = 0$

$$\boxed{p = \rho \cdot g \cdot h}$$



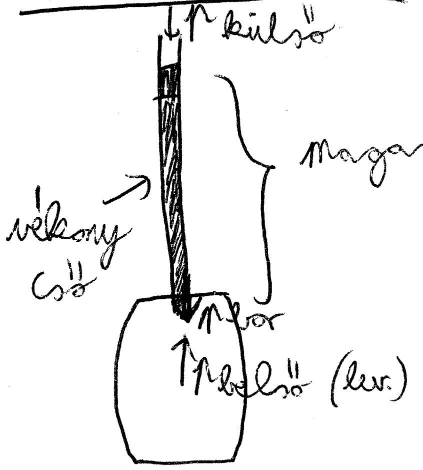
↓
hidrosztatikai paradoxon

→ a nyomás független az edény alakjától



↓
pedig más mennyiségű vizet töltünk bele

Pascal-kísérlete

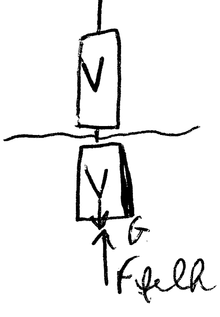


1 korsó bortól szétrobban a hordó

↓

mert a folyadékoszlop nyomása csak a magasságától függ

Arkhimédesz-törvénye



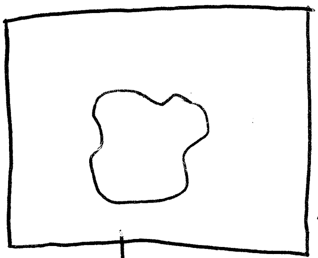
mennyivel csökken a test súlya?
ha a felső edénybe vizet öntünk,
akkor kiegyenlítjük a „súlyveszteséget"

↓

$F_{felh} = m_{víz} \cdot g = \rho_{foly} V_{bem} \cdot g$

↓
koronás mese
(Arkhimédesz → integrálás, hajítógépek)

a törvény levezetése:



$$\boxed{F_{fel} = \underbrace{\oint \hat{\sigma}\, dA}_{\text{a test felületére ható erő}}} = \int_V \overbrace{(\text{div}\,\hat{\sigma})}^{*}\, dV = -\int_V \underset{\text{konst.}}{\rho} \cdot \underset{\text{konst.}}{g}\, dV = \boxed{-\rho \cdot g \cdot V_{(test)}}$$

$*$ → a folyadékra ható erő

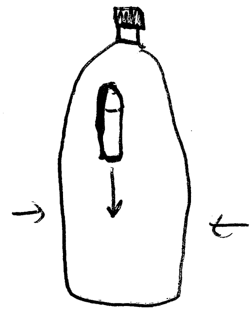
ρ: a folyadék sűrűsége ↑ id. foly. ↙ csak a rész.-től

indoklás: $F_{fel} = G_{folyadék}$ → ha az adott térfogatban foly. van, a rendszer egyensúlyban van.

(~~↳ F_{fel}~~) Ha a térfogatban lévő ~~testet~~ foly.-ot kicseréljük egy testre, a felületre ható erő nem változik → F_{fel} ugyanannyi marad, mint előbb csak G változik, viszont már nincs is egyensúly.

Kísérletek:

1) Cartesius-búvár

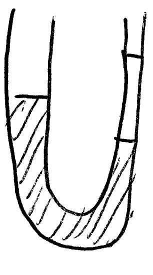


→ Hogyan működik?

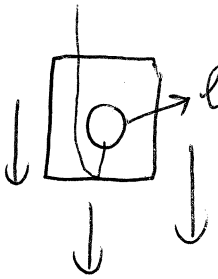
↓

vizsga beugró!

2) rel. sűrűségmérés:

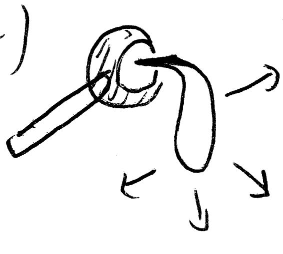


3)



→ lent marad a labda

4)



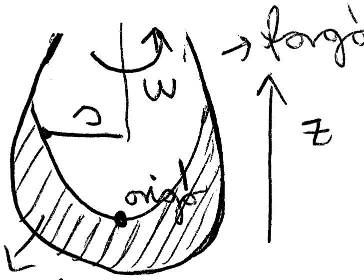
→ óriási feszültségek vannak benne

(szétpattan)

5) a rohamra vezérelt katonáknak nem adtak enni, mert tele has esetén nagy belső feszültségek vannak

↓

a haslövés halálos



$$-\text{grad}\, p + \rho \cdot \underline{g} + \overbrace{\rho \cdot \omega^2 \cdot \underline{r}}^{\text{forgó koord. rendszerben a centrifugális erő}} = 0$$

msz.: $\rho \cdot g = -\text{grad}(\rho \cdot g \cdot z)$

$$\rho \cdot \omega^2 \underline{r} = -\text{grad}\left[\frac{1}{2}\omega^2 \rho (x^2+y^2)\right] \leftarrow r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{grad}\Big[\underbrace{p + \rho \cdot g \cdot z - \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \rho (x^2+y^2)}_{\text{konstans}}\Big] = 0$$

szabad felületnél ez a külső légnyomás ~~(felületen) (p_1)~~

$$p_0 + \rho \cdot g \cdot z - \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \rho \cdot (x^2+y^2) = \text{áll}$$

$x = 0$, $y = 0$ -nál $z = 0$

(egyébként $p + \rho g z - \frac{1}{2}\omega^2 \rho (x^2+y^2) = p_0$)

↓

$p_0 = \text{áll}$

a víz felületen $p = p_0$

$$\cancel{\rho} \cdot g\, z = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \cancel{\rho}\, (x^2+y^2)$$

$$\underline{\underline{z = \frac{1}{2g}\omega^2 (x^2+y^2)}} \quad \text{(parabola)}$$

↓

a folyadék most is az ekvipotenciális felületen van, csak most a centrifugális erőnek is van járuléka

Gázok

$\boxed{\rho \neq \text{áll}}$

$$\text{grad}\, p + \rho(p)\, \text{grad}\, \phi = 0$$

állandó hőmérsékleten, ideális gázra

1.) $pV = \frac{m}{M} RT$ ← a gáz tömege

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

2.) izoterm esetben $T = \text{áll}$ az egész rendszerben

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\underbrace{\rho_0}_{\text{egy adott helyen a } p \text{ és } \rho \text{ értéke}}} = \text{áll}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot \text{grad}\, p = -\text{grad}\, \phi$$

Tegyük fel, hogy $p(z)$-től függ csak,

és $\phi = g \cdot h \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = g$

$$\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p$$

$$p(z) = p_0 \cdot e^{-g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot z} \rightarrow \rho(z) = \rho_0 \cdot e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} \cdot z}$$

barometrikus magasságformula

a nyomás fölfele exponenciálisan csökken)

ha a Föld légkörét izotermnek tekintjük

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{R}{M} T$$

$M = m_0 \cdot A$

m_0 ↓ 1 atom tömege

A ↓ Avogadro szám

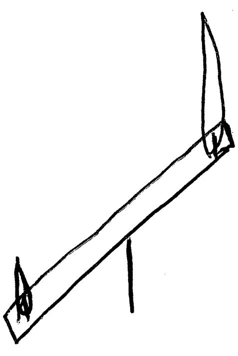
$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{R}{A} \frac{T}{m_0}$$

$\frac{R}{A}$: k (Boltzmann-áll)

$$\frac{p_0}{\rho_0} = k \cdot \frac{T}{m_0}$$

$$p(z) = p_0 \cdot e^{-\frac{g \cdot m_0}{kT} \cdot z} = p_0 \cdot e^{-\frac{E}{kT}}$$

ahol E 1 részecske helyzeti energiája



→ egy csövön kiáramló anyag mennyisége arányos a nyomáskülönbséggel magyarázat

↓ a csövön belül és kívül más anyag van

↓ bután ↓ levegő

↓ máshogy változik a nyomásuk a cső magasságán

↓ a nyomáskülönbség alul és felül eltérő

$$p_{k_2}-p_{k_1} \neq p_{b_2}-p_{b_1}$$

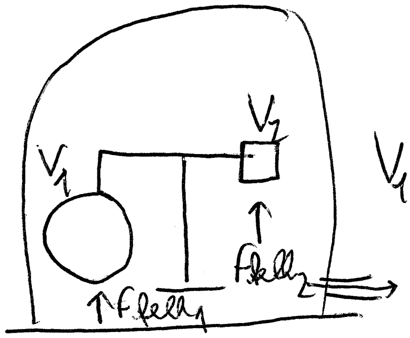
(a butánnál jobban csökken, mert n_0 nagyobb)

= folyadékoknál és gázoknál egy új mennyiséget kellett bevezetnünk: p ← n-ből nem hat.-ó meg

– ehhez egy új összefüggés kell (kényszerfeltétel)

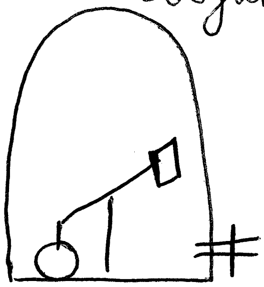
- folyadékoknál: a nyomás <u>kényszererő</u>, mert ahhoz kell, hogy ρ = áll maradjon
- gázoknál: már nem kényszerfeltétel p, hanem p és ρ között konkrét összefüggés van

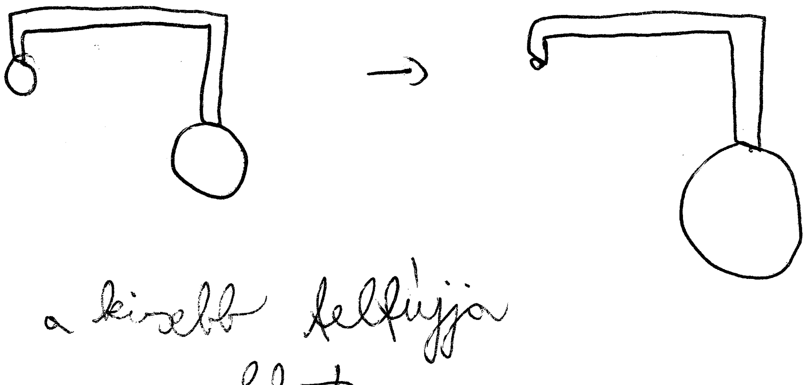
7. óra



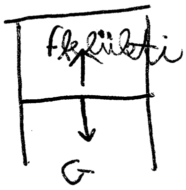
$V_1 > V_2$

- levegőben ki van egyenlítve
- kiszívjuk a levegőt

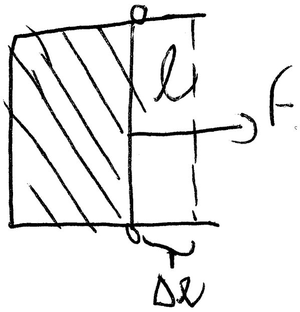




a kisebb felfújja
a nagyobbat



1)



akkor, hogy a hártyát egyensúlyban tartsam, erőt kell kifejteni

$F = 2\alpha l$

↳ ez csak a mostani hártyára kell

α: felületi feszültség

↓

de ez nem feszültség

$[\alpha] = \frac{N}{m}$ $\quad [\sigma] = \frac{N}{m^2}$

$$\Delta W = F \cdot \Delta l = \alpha \cdot \underbrace{2 \cdot l \cdot \Delta l}_{\text{az a felszín, amennyivel megnőtt a felülete a hártyának (2, mert 2 oldala van)}} = \alpha \Delta A$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta A}}$$

= ha 2 közeg határfelületének nagyságát meg akarjuk változtatni, akkor munkát kell végezni

↓

α: az egységnyi felületen végzett munka

↓

Mi az oka?

↓

~~megváltoztatom~~ a felület nagyságát

↓

-||- a felületen lévő atomok számát

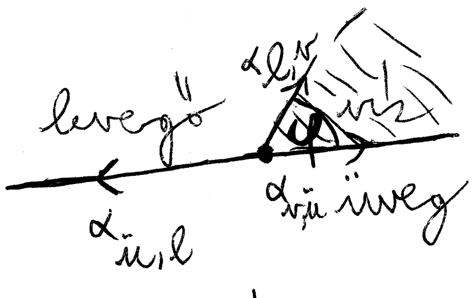
↳ ezekre erő hat (ellentétben az anyag belsejében lévőkkel)

↓

(minél nagyobb a dipólmomentuma, annál nagyobb erő hat az atomokra)

nagy felületi feszültség → nem habzik
(intelligens mosópor)

2)



↓

feltétel: a három erő vízszintes komponense 0 legyen.

$$\alpha_{ül} - \alpha_{vü} - \alpha_{lv} \cos\varphi = 0$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\alpha_{ül} - \alpha_{vü}}{\alpha_{lv}}}$$

ha nem teljesül ez a feltétel ($\cos\varphi > 1$)

" akkor nem nedvesíti folyadék ezt a felszínt!

↓ összeáll cseppé

↓ de ezek függetlenek a hőmérséklettől

pl. forró vaslapon a vízcseppek is összeállnak

pl. golyóstollban

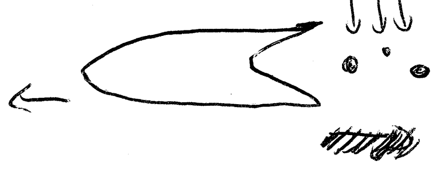
tinta, levegő, golyóstoll → nem nedvesít

—"—, papír, —"— → nedvesít

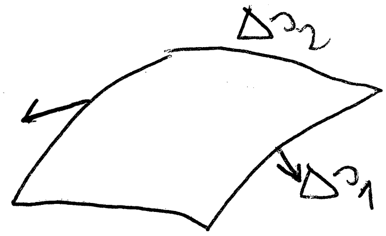
felületi feszültség fog hatni a pénzre

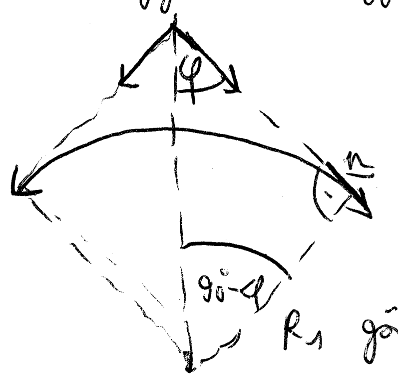
hasonlóan:

kámfor → kis felületi feszültség



3) a kisebb buborék felfújja a nagyobbat: görbületi nyomás





R_1 görbületi sugár

$\Delta \underline{F} = \alpha \Delta S_1 \cdot \underline{n}$

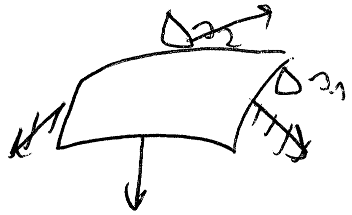
↓ érintő irányú egységvektor

$\Delta s_2 = 2R_1(90° - \varphi)$ → a ~~(ka)~~ felület nagysága ($\frown$)

$F_f = 2 \cdot \alpha \cdot \Delta s_1 \cdot \cos\varphi = 2\alpha \Delta s_1 \cdot \underbrace{\sin(90° - \varphi)}_{\sim 90° - \varphi} \approx$

$\approx \cancel{2}\alpha \Delta s_1 \cdot \Delta s_2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}R_1}$

A másik irányban: analóg, csak most a másik görbületet kell nézni



$F_{f_{össz}} = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\underbrace{\Delta s_1 \Delta s_2}_{\text{a felület nagysága}}$

$$\boxed{p_g = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$ görbületi nyomás

(milyen irányban kell ezeket felvenni? ↳ ha a felületet egy kvadr. alak írja le)

nagyobb sugárhoz kisebb nyomás tartozik

görbült felületen a nyomás ugrást szenved (nem folytonos), mert kívül és belül más anyag van

⇓

a kis buborékoknak nagyobb a görbületi nyomása

! lufi felfújása:

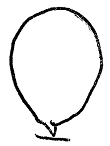
kis görbületi sugár

↓ ~~nagy nyom~~

nagy nyomás

↓

nehéz fújni



nagy görbületi sugár

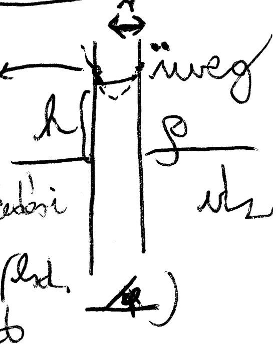
↓

kisebb nyomás

↓

könnyebb fújni

4) Kapilláris effektus:



itt is van vmi illeszkedési erő, pl. (...) de ezt elhanyagolhatjuk

$$E(h) = \overbrace{\rho \cdot h \cdot r^2\pi}^{m} \cdot \frac{h}{2} \cdot g + 2\pi r \cdot h \cdot (\alpha_{üv} - \alpha_{ül})$$

$E(h)$: h magasságig felemelkedett víz

$\frac{h}{2}$: a súlypont helyzeti energiáját kell nézni

$\alpha_{üv}$: nő az üveg, víz felület

$\alpha_{ül}$: lecsökken az üveg levegő felület

E minimális (minimuma van)

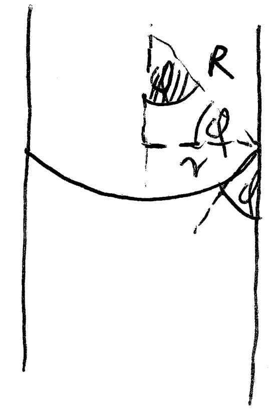
$$\frac{dE}{dh} = 0 \; (\cancel{\text{minimális}}) = \rho \cdot r^2\pi g \cdot h + 2\pi r(\alpha_{üv} - \alpha_{ül}) = 0$$

$$h = \frac{(\alpha_{ül} - \alpha_{üv}) \cdot 2}{\rho r \cdot g}$$

ez a h negatív is lehet, ha $\alpha_{üv} > \alpha_{ül}$

↳ csökken a vízszint a kapillárisban

$$h = \frac{(\alpha_{sl} - \alpha_{sv})}{\rho \cdot r \cdot g}\, 2 = 2 \cdot \frac{\alpha_{lv} \cos\varphi}{\rho g \cdot r} \quad \leftarrow \cos\varphi = \frac{\alpha_{sl} - \alpha_{sv}}{\alpha_{lv}}$$



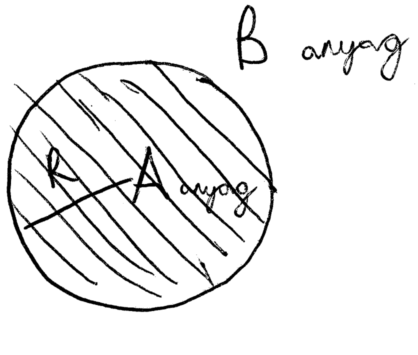
$$r = R \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$h = 2 \cdot \frac{\alpha_{lv}}{\rho \cdot g R}$$

---

5) Egy kis gömb egy idegen közegben



$$u_A = \frac{A \text{ belső energiája}}{V}$$

$$u_B = \frac{B \text{ belső en.}}{V}$$

ha A keletkezik B-n belül

$$\Delta E = (u_A - u_B)\frac{4\pi}{3}R^3 + \overbrace{\alpha_{AB} \cdot 4\pi R^2}^{\text{felületi energia}}$$

↓

előfordulhat, hogy egy anyagban vmi magától kezd nőni, vagy összemenni

↳ ez R aktuális értékétől, és az állandóktól is függ ha pl. $u_A - u_B < 0$

$\downarrow$

nagy R esetén kisebb a felületi energiából adódó veszteség, mint a nyereség az első tagból

ha $u_A < u_B$

$\Delta E(R_c) = 0$ nukleációs sugár

$\downarrow$

kritikus

$\downarrow$

pl. kondenzáció → sejpülőgép szárnyán megindul a kicsapódás

= mindig el kell érni egy kritikus méretet ahhoz, hogy egy változás bekövetkezzen

pl. buborékképződés

$\downarrow$

ez az $\dfrac{\alpha_{AB}}{u_A - u_B}$ behoz egy hosszúságméretet, amit el kell érnie a rendszernek, hogy meginduljon a változás

8. óra

Folyadékok és gázok áramlása

0) **Ism.**

$\underline{u}(\underline{r},t)$ → rugalmas szilárd testek

↓ deformálatlan állapothoz tartozó ref. állapot

↕

1) $\underline{v}(\underline{r},t)$ → most célszerűbb a folyadékot a rész. sebességével leírni

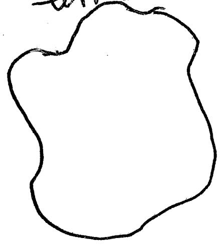
↓ megfigyelés helyén vizsgáljuk ~~látott~~ sebességet

(kátrány: viszkoz? -elasztikus anyag → gyors deformációnál ~~-ként~~ rug. testként, lassú def.-nál foly.-ként viselkedik)

= $\underline{v}(\underline{r},t)$, $\rho(\underline{r},t)$, $p(\underline{r},t)$, $T(\underline{r},t)$ mennyiségekkel írjuk le az anyagot

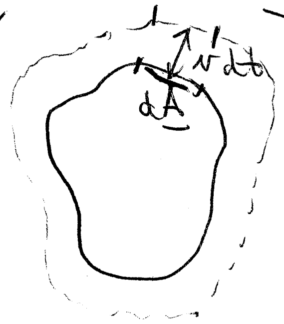
2) Az anyagmegmaradás törvénye:

térrész



$$m = \int_V \rho(\underline{r},t)\cdot \underbrace{d^3r}_{dV}$$ → a térrészben lévő anyag mennyisége

$$\Delta m = \underbrace{\underline{v} \cdot \Delta \underline{A}\, \Delta t}_{\Delta V} \cdot \rho$$



ennyi anyag megy be egy kis dA felületen

→ azok a részecskék áramolhatnak be, melyek v dt távolságra vannak a felülettől

$$\Delta m = \oint \underline{v}\, \Delta t\, \rho\, d\underline{A} = \oint \underbrace{\rho \cdot \underline{v}}_{\underline{j}}\, d\underline{A} \cdot \Delta t$$

$\underline{j}$: „anyag áramsűrűsége"

$$\Delta \int_V \rho(\underline{r}, t)\, dV = -\oint \rho\, \underline{v}\, d\underline{A}\, \Delta t$$

a felület normálisa kifele mutat, de a sebességet befelé irányítottuk, mert akkor nő az anyagmennyiség → ⊖ előjel

⇓

$$\frac{d}{dt} \int \rho\, dV + \oint \rho\, \underline{v}\, d\underline{A} = 0$$

ennek minden ~~deriváltnak~~ térfogatra igaznak kell lennie

⇓

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, (\rho \underline{v}) \right] dV = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, (\rho \underline{v}) = 0}$$ kontinuitási egyenlet

(3) **Folyadékokra:** $\rho = \text{áll}$

$\Downarrow$

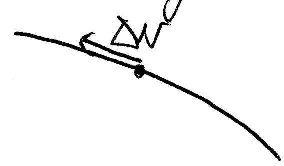
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{és} \quad \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = \rho \cdot \mathrm{div}\,\underline{v}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{v} = 0} \quad \sim \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \ \text{(mágnesség)}$$

$\Downarrow$

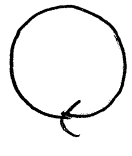
1) def: sebességvonal: az a görbe, melynek érintője mindig a sebesség irányába mutat

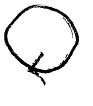


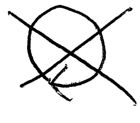
a) stacionárius áramlás (lamináris áramlás)

$\underline{v}(\underline{r})$ → a sebességtér nem függ az időtől

b) turbulens (örvényes áramlás) → (hosszú időn) stacionáriusnak tűnik, de az örvények pillanatról pillanatra váltakoznak

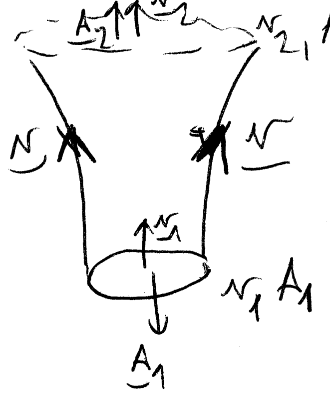
2) ebből még elképzelhetőek zárt görbék (örvények) , amikor zárt sebességvonalak alakulnak ki

↙ örvényes áramlás  ✓

↘ örvénymentes áramlás 

3) $\oint \underline{v}\, d\underline{A} = 0$

≠ vegyünk egy „áramlási csövet", melynek palástján vannak áramlási vonalak:



$\oint \underline{v}\, d\underline{A} \approx -v_1 A_1 + v_2 A_2 + 0$

$\Downarrow$

$\boxed{v_1 A_1 = v_2 A_2}$

$\downarrow$ a paláston (mert ott nem lép ki anyag ≠

$\Updownarrow$

$\underline{v} \perp \underline{A}$

$\downarrow$

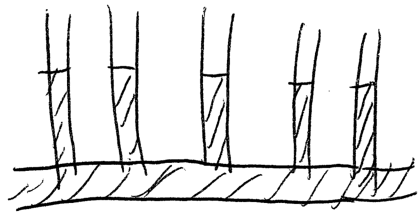
ha a folyadék összenyomható, de stacionárius a tér $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$

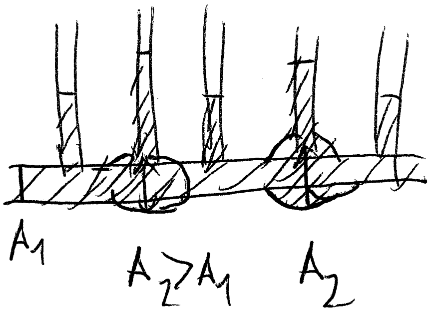
$\text{div}(\rho \cdot v) = 0$

$\boxed{\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2}$

(≠ sűrűségvonalak)

= az erővonalak sűrűsége arányos a térerősséggel ≠

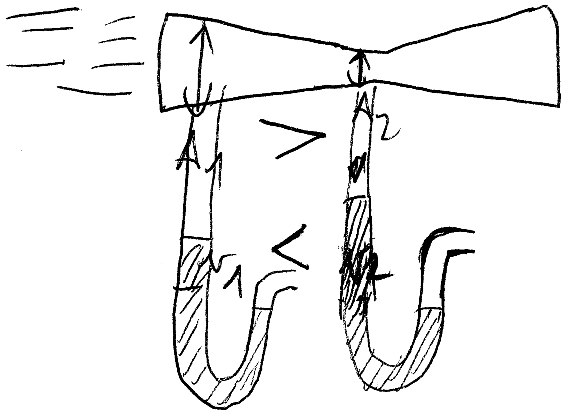




↓

~~nagyobb~~

$v_2 < v_1$



Ideális folyadék (szuperfolyékony)

(száraz víz ← Neumann János)

- súrlódás nem lép fel a mozgás során
- ha a határfelülettől messze nézzük a folyadékot, tényleg elhanyagolható ez a hatás

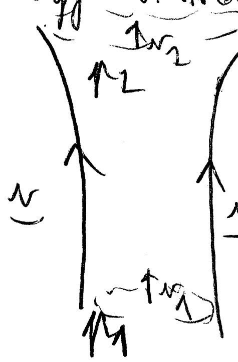
⇓

- nagyon alacsony hőmérsékleten bizonyos gázok tényleg így viselkednek (← kvantummech. effektus) (pl. He)

⇓

az energiamegmaradás mindig felírható

1) egy áramlási csőben az energiamegmar.



Δt, Δm

↓

alul ugyanannyi megy be, mint felül ki

$$\Delta m \frac{v_2^2}{2} - \Delta m \frac{v_1^2}{2} + \Delta m\, \phi_2 - \Delta m\, \phi_1 = \overbrace{- p_2 A_2 v_2 \Delta t + p_1 A_1 v_1 \Delta t}^{\text{a végzett munka}} + \Delta(\Delta W_b)$$

Δ: a 2 hely (1,2) különbsége

ΔW_b: a belső erők megváltozása

⇓

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \phi_2 - \phi_1 = -p_2 \cdot \frac{A_2 v_2 \Delta t}{\Delta m} + p_1 \frac{A_1 v_1 \Delta t}{\Delta m} + \frac{\Delta(\Delta W_b)}{\Delta m}$$

$$-\|- \qquad = -\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\Delta(dU)}{\Delta m}$$

↑

termodinamika: $dU = \cancel{\delta Q} + \delta W_b$

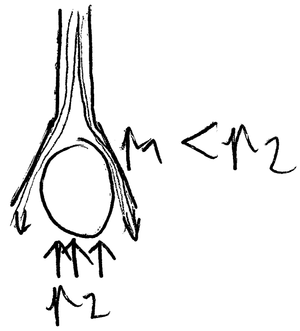
gondolat: azt gondoljuk, hogy a folyamatok olyan gyorsan zajlanak, hogy nincs idő hőcserére

a) összenyomhatatlan folya~~matra~~dékra

az atomok távolsága nem változhat meg $\rightarrow dU = 0$

$$\boxed{\frac{v^2}{2}+\phi+\frac{p}{\rho}=\text{áll}}$$ egy áramlási cső mentén

Bernoulli-törvény



b) id. gázokra: $U = c_v T$ $\qquad pV = \frac{m}{M} RT$

$$U = c_v \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{p}{\rho} \quad \leftarrow \quad \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}$$

$$\overbrace{\frac{c_p}{c_v}}^{\kappa} - 1 = \frac{R}{M c_v} = \kappa - 1$$

$$U = \frac{1}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho}$$

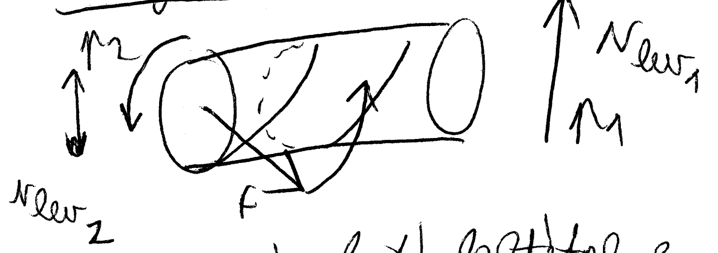
$$\frac{v^2}{2} + \phi + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\kappa - 1}\right)}_{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \frac{p}{\rho} = \text{áll}$$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \phi + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p}{\rho} = \text{áll}}$$ Bernoulli egyenlet id. gázra

↓

Jelleg szintén nem sokat változtat a dolgon, hogy foly. vagy gáz

Magnus-hatás



mozgó határfeltétele a Ber.-tv. nem igaz

$v_{lev_2} < v_{lev_1}$

$p_2 > p_1$

~ focilabda csavarása

- $\frac{v^2}{2} + (\phi) + \frac{K}{K-1}\frac{p}{\rho} = \text{áll}$, $\rho v \cdot A = \text{áll}$

↳ 2 egyenlet, 3 ismeretlen

- $d(\rho v A) = vA\,d\rho + \rho A\,dv + \rho v\,dA = 0$ (cső mentén) $/ : \rho \cdot v \cdot A = \text{áll}$

$$\frac{d(\rho v A)}{\rho v A} = \boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0}$$

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \frac{K}{K-1}\cdot\frac{p}{\rho}\right) = v\cdot dv + \frac{K}{K-1}\frac{1}{\rho}\cdot dp - \frac{K}{K-1}\frac{p}{\rho^2}\,d\rho = 0$$

Msz.:

- $p \cdot V^K = \text{áll}$ adiabatikus esetben

$\Downarrow$

$$\frac{p}{\rho^K} = \text{áll} = \alpha$$

$$p = \alpha \cdot \rho^K$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \alpha \cdot K \cdot \rho^{K-1} = K \cdot \frac{\alpha \cdot \rho^K}{\rho} = \frac{K \cdot p}{\rho}$$

$$\frac{1}{K}\cdot\frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho}$$

$$v\cdot dv + \frac{K}{K-1}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{d\rho}\cdot d\rho - \frac{\cancel{K}}{K-1}\cdot\frac{1}{\cancel{K}}\cdot\frac{dp}{d\rho}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot d\rho = 0$$

$$v\,dv + \underbrace{\left(\frac{K}{K-1} - \frac{1}{K-1}\right)}_{\frac{\cancel{K-1}\,1}{\cancel{K-1}\,1}} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{d\rho} \cdot d\rho\right) = 0$$

nyomás / sűrűség $\rightarrow \cancel{(Nm^2)}\ \frac{N}{\cancel{m^2}} \cdot \frac{m^3}{kg} = \cancel{kg}\frac{m^2}{s^2}\frac{1}{\cancel{kg}} = \left(\frac{m}{s}\right)^2$

$$v\,dv + \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2$$

ez a hang terjedési sebessége lesz!! (biz. később)

$$-v\,dv \underbrace{\frac{d\rho}{dp}}_{\frac{1}{c^2}} = \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$-\frac{v\,dv}{c^2} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{v}\right)dv = \frac{1}{v}\cdot\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)dv$$

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\frac{1}{v}\,dv$$

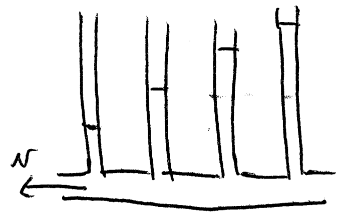
ha $v < c \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\dots\frac{1}{v}\,dv$ → ha nő a keresztmetszet, csökken a sebesség

de ha $\underbrace{v > c}_{\text{túllépjük a hang terjedési sebességet}}$ → ha nő a keresztmetszet, nő a ~~nyomás~~ sebesség is

9. óra

Közegellenállás

Kísérlet



a víz áramlik, de a vízszint (p) csökken a cső mentén

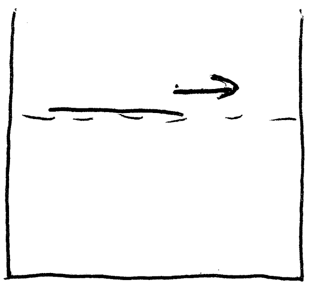
$\hat{\sigma} = -p \hat{I}$ ideális folyadék

↓

de az erre felírt összefüggések nem teljesülnek a kísérletben

$\hat{\sigma} = -p \cdot \hat{I} + \hat{\sigma}'$

valamilyen korrekciós tag kell még

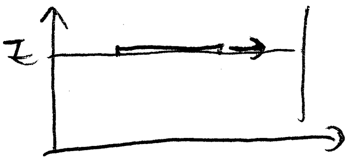


↓

nyírófesz. szerű hatás

Newton vizsgálta ezt:
ha a közeg tetején, vagy a közegben mozgatjuk, állandó sebességgel való mozgatáshoz állandó erő kell

$$\boxed{\frac{f}{A} = \tau = \frac{dv}{dz} \cdot \underbrace{\eta}_{}}$$



anyagi jellemző (viszkozitás)

azt tudjuk, hogy maga a v nem jelentett meg, mert egyébként ha az egész folyadékot áll. v-vel mozgatjuk, akkor kellene erő

Értelmezés:

a teteje gyorsabban mozog, mint az alja → van valamilyen súrlódás, ha a rétegek elmozdulnak egymáson

$$\frac{du_x}{dz} \cong \varepsilon_{13}$$

idő szerinti derivált

$$\frac{dv}{dz} = \frac{d\frac{\partial u_x}{\partial t}}{dz} \cong \dot{\varepsilon}_{13}$$

$$\hat{\sigma}'(\hat{\varepsilon}, \hat{\dot{\varepsilon}})$$

→ most megjelenik egy súrlódási tag, ami a sebesség~~megvál~~tól függ $\hat{\dot{\varepsilon}}$

közönséges szilárd anyag: $\hat{\sigma}'(\hat{\varepsilon}, \cancel{\hat{\dot{\varepsilon}}})$

-"- folyadék: $\hat{\sigma}'(\cancel{\hat{\varepsilon}}, \hat{\dot{\varepsilon}})$

de van olyan anyag is, ami mindkettőtől függ (pl. kátrány)

$\hat{\sigma} = -p\hat{I} + \hat{\sigma}'(\hat{\dot{\varepsilon}})$ → közönséges folyadék

– a korrekciós tag:

$\hat{\sigma}' = \hat{A} \cdot \dot{\varepsilon}$ → $\dot{\varepsilon}$-tól lineárisan függ, mert ha $\dot{\varepsilon} = 0$, akkor $\hat{\sigma}'$ is 0 (elvárás)

$\sigma'_{ij} = \hat{A}_{ijkl} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl}$

– egy folyadék általában izotróp

de van, ami nem (pl. LCD)

– $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}$ → ezt kaptuk általánosan izotróp ~~anyag~~ szilárd anyagra

$\left(w \to \frac{dw}{d\varepsilon} = \sigma = \right)$

↓

most ~~analóg~~ az egyenletünk folyadékra:

⇓

$$\boxed{\sigma'_{ij} = 2\eta \cdot \dot{\varepsilon}_{ij} + \eta' \cdot \dot{\varepsilon}_{kk} \cdot \delta_{ij}}$$ → ált. alak

$\varepsilon_{kk} = Sp\,\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$

összenyomhatatlan folyadéknál: $\varepsilon_{kk} = 0$

⇓

$\dot{\varepsilon}_{kk} = 0$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \text{div}\,\underline{v}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial r_k} + \frac{\partial v_k}{\partial r_k}\right) = \frac{\partial v_k}{\partial r_k}$$

kontinuitási egyenlet: (ebből is kijön ez az áll., hogy $(\text{Sp}\,\dot{\varepsilon}) = 0$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

ha $\rho = \text{áll} \Rightarrow \text{div}\,\underline{v} = 0$ → összenyomhatatlan a foly.

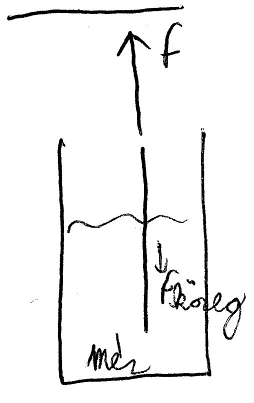
$$\Downarrow$$

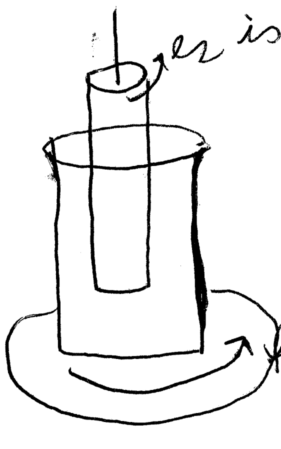
$$\dot{\varepsilon}_{kk} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{Sp}\,\varepsilon = 0$$

Kísérlet:





$$\rho \cdot \underline{\ddot{u}} = \underline{f} + \text{div}\,\hat{\sigma}$$

általában ~~most~~ nem lehet bevenni a deriválást, mert nem tehetjük fel, hogy $V \cong$ áll a ref. térfogathoz képest

(de most összenyomhatatlan a foly.)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int \rho \cdot \dot{u} \cdot dV}_{\text{imp.}}$$

$\rho \frac{d}{dt} \underline{v} \quad (\underline{r}, t)$ → most a sebességet a megfigyelés helyétől nézzük

részecske

↑ a sebessége nem csak időben, hanem helyben is változhat → adott helyen időben is változhat v

$$\frac{d}{dt} \underline{v}(\underline{r}(t), t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \dot{z} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} v_x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot v_z}$$

msz.: az egyenlet első komponense

$$\frac{d v_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underbrace{\text{grad}\, v_1}_{\nabla v_1}$$

$(\underline{v} \nabla) v_1$ → ezt szokták zárójelezni, most ezeknek az indexei esnek össze

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}$$

$$\boxed{\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\underline{v}\, \underline{\nabla}) \underline{v} \right] = \underline{f} \overbrace{- \text{grad}\, p + \eta \Delta \underline{v} + \cancel{(\eta + \eta') \,\text{grad}\, (\text{div}\, \underline{v})}}^{+ \text{div}\, \hat{\sigma}}}$$

$\underbrace{}_{\rho \cdot \frac{dv}{dt}}$ Navier-Stokes-egyenlet

Ess nem jelenik meg, ha összenyomhatatlan a folyadék

~~stacionárius~~

a $\boxed{(\underline{v} \nabla) \underline{v}}$ tag, ami v-ben négyzetes, felelős a turbulens áramlásért

$\rho(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} = \eta \Delta \underline{v}$ ← $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (stacionárius áramlás)

$f = 0$ (nincs külső erő)

$p = 0$ (elhanyagoljuk a nyomást)

Tfh. ilyen alakú a mo.

$\underline{v}(\underline{r}) = \underbrace{v_0}_{\text{karakterisztikus sebesség}} \cdot f\left(\frac{\underline{r}}{l}\right)$ milyen $\underline{r}$-től is függő fv.

egy fv. nem adhat dimenziót → $\frac{r}{l}$-től függ

az egyenlet megoldása dimenzionális megfontolásokból ilyen alakú

$$\underbrace{\rho v_0^2 \frac{1}{l} (f \cdot f')}_{\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}} = \eta \cdot \underbrace{v_0 \cdot \frac{1}{l^2} f''}_{\Delta \underline{v}}$$

$$\rho \cdot v_0 (f \cdot f') = \eta \cdot \frac{1}{l} f''$$

$$\boxed{f \cdot f' = \frac{\eta}{\rho \cdot v_0 \cdot l} \cdot f''}$$

Fontos dolog: <u>hasonlósági áramlás:</u>

ha a $\frac{\eta}{\rho \cdot v_0 \cdot l}$ paraméter ugyanakkora, akkor

a 2 áramlást ugyanaz a fv. fogja leírni

⇒ tudjuk vizsgálni pl. egy autó vagy repülő áramlását ha egy kis modellt folyadékban áramoltatunk

$$\underbrace{\frac{\rho v_0 l}{\eta}}_{\text{Reynolds-szám}}$$

↳ ennek az értéke meghatározó az áramlás szempontjából

(megj.:
néha $\eta \Delta \underline{v}$ elhanyagolható $v \operatorname{grad} v$ mellett,
néha $\operatorname{grad} p$ mellett... → ideálisként viselkedik a foly.)

~~← grad~~

Csőben való áramlás:

- stacionárius áramlás

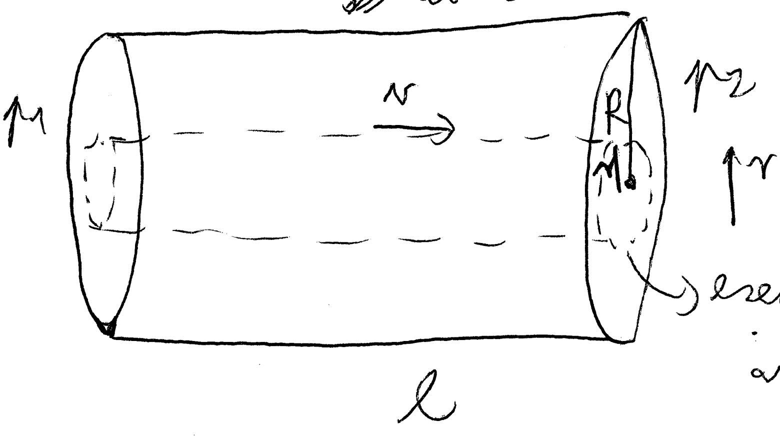
$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$$

- ~~$v \operatorname{grad} v$ elhanyagolható~~
- külső erő nincs

$$\underbrace{-\operatorname{grad} p + \eta \Delta \underline{v}}_{\operatorname{div} \sigma} = 0$$

→ másik felírása: (ugyanazt fejezi ki)

$$\oint \sigma \, d\underline{A} = 0$$



→ ezen a felületen nézzük az áramlást

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dr}$$ → amikor a henger 2 végén vagyunk, nincs nyírófeszültség

$$\oint \hat{\sigma}\, d\underline{A} = \underbrace{2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot l \cdot \eta \frac{dv}{dr}}_{\text{palást}} - (p_2 - p_1)\,\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} = 0$$

$$2l \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} - (p_2 - p_1) \cdot r = 0$$

$$2l\eta \frac{dv}{dr} = (p_2 - p_1) \cdot r$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \cdot r$$

mo.:

$$v = \frac{A}{2} \cdot r^2 + B$$

$$\frac{dv}{dr} = Ar$$

$$A = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta}$$

$$\boxed{v = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \cdot r^2 + B}$$

ezt sajnos nem tudjuk ebből meghatározni

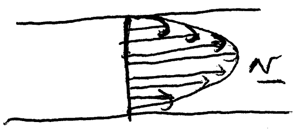
<u>határfeltételi probléma:</u>

meg kell mondani, hogy mi történik akkor, amikor a cső és a folyadék határán vagyunk

Ffh. $v(R)=0$ (a cső falánál nem áramlik a folyadék)
↳ érdes

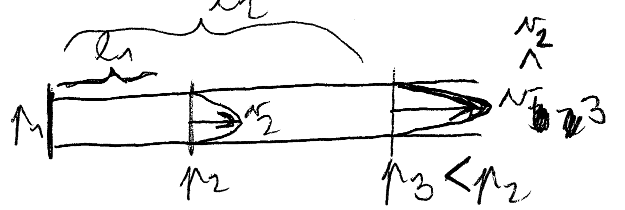
$$\boxed{v = \frac{p_1 - p_2}{4 l \eta}\left(R^2 - r^2\right)}$$

a sebességprofil a csőben parabola (egzaktul)



$\boxed{v(R)=0}$
↳ nem biztos, hogy ez teljesül
(pl. ma Cu csöveket csinálnak → ennek simára lehet csinálni a falát)

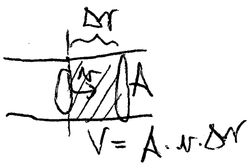
ha 2 kül. hosszúságú darabot nézünk, más lesz a nyomás a ~~két vége~~ végeken



$\left(\frac{\cancel{p_1 - p_2}}{l}\right)$ $\quad \frac{p_1 - p_2}{l_1} = \frac{p_1 - p_3}{l_2}$

Az időegység alatt átáramló anyagmennyiség:

$$\rho \cdot v(r) \cdot \overbrace{2\pi \cdot r \cdot \Delta r}^{A} = \Delta \phi = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$



$$\phi = \int_0^R \rho \cdot \cancel{2}\pi \cdot \frac{p_1 - p_2}{\cancel{4}2\, l \eta} \underbrace{\left(r R^2 - r^3\right) dr}_{\int = \left[\frac{r^2}{2} R^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^R} = \rho \cdot \pi \frac{p_1 - p_2}{2 l \eta} \underbrace{\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right]}_{\frac{R^4}{4}}$$

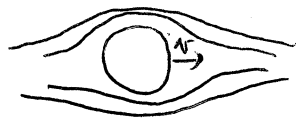
$$\boxed{\phi = \frac{\rho \cdot \pi}{8 \eta \cdot l} \cdot R^4 \left(p_1 - p_2\right)}$$

kifolyási törvény
→ minél hosszabb a cső, annál nagyobb nyomás kell
→ minél nagyobb a nyomáskül., annál több anyag áramlik át

- R-től 4. (!!) hatványon függ az áramló anyag mennyisége
  ↳ ez fontos

- golyóra ható közegellenállási erő

$F = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$



diffegy. gyak } szerdára
termo előadás }

10. óra

Lorentz: meteorológus
↳ kaotikus viselkedés felfedezése

1) Tm: nem ideális folyadék (van súrlódás) + nem összenyomh.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + (\underline{v}\nabla)\underline{v} = -\operatorname{grad} p(\rho) + \overbrace{\eta \Delta v + \ldots}^{\sigma}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{kontinuitási egyenlet}$$

---

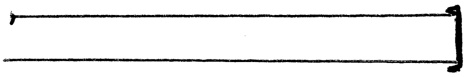
kell még egy egyenlet ahhoz, hogy kiszámítsuk az értékeket

tfh. ismerjük ez a $p(\rho)$ összefüggést

$\rho_0 = \text{áll}, v = 0$ → ez a megoldás kielégíti az egyenletet

↓ időben, helyben

$p_0 = \text{áll}$



→ ha egy picit megpöccöljük, $v \neq 0$ lesz egy kis ideig

↓

az egyensúlyi helyzet körül vizsgáljuk a problémát, ha egy kicsit kitérítjük onnan a rendszert

- de mivel v pici, a négyzetes $\left(\cancel{(v\nabla)v}\right)$ ~~tagokat~~ elhanyagoljuk
- mennyi lesz ρ

$v \approx$ kicsi

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

$$\underbrace{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}}\ + \cancel{\delta\rho \frac{\partial v}{\partial t}} \rightarrow \text{picik}$$

most a súrlódást is elhanyagoljuk

$$\text{I.}\quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \cancel{(\underline{v}\nabla)\underline{v}} = -\operatorname{grad} p(\rho) + \cancel{\eta \Delta v + \dots}$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

mz.: $\cancel{\frac{p(\rho_0+\delta\rho) - p(\rho_0)}{\delta\rho}}$ ρ_0 helyen ez a derivált állandó (nem függ r-től)

$$p(\rho_0+\delta\rho) \approx \cancel{p(\rho_0)} + \frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho_0} \delta\rho$$

$$\underbrace{\operatorname{grad} p(\rho_0)}_{\text{áll}(p_0)} = 0$$

lineáris közelítés

$$\text{I.} \rightarrow \rho_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho_0} \operatorname{grad} \delta\rho \quad / \operatorname{div}$$

$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ $\quad$ $\operatorname{div}(\delta\rho \cdot \underline{v})$ $\quad$ $\cancel{\delta\rho \cdot \operatorname{div} \underline{v}} \approx 0$ emiatt

$$\text{II.} \rightarrow \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad / \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} v = -\frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho_0} \underset{\text{Laplace}}{\Delta} \delta\rho$$

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{dp}{d\rho}\bigg|_{\rho_0}}_{\left(\frac{m}{s}\right)^2 \text{ dimenziója van}} \underbrace{\Delta}_{\text{Laplace}} \delta\rho$$

Legyen $c^2 := \frac{dp}{d\rho}$

$\Downarrow$

az állandó sebességgel haladó kis fluktuáció azt eredményezi, hogy:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = c^2 \Delta \delta\rho}$$ hullámegyenlet

$$\left(\Delta \delta\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = 0\right)$$

a zavar terjedése a közegben

$\delta\rho$ helyett v-t és δp-t is beírhatjuk, ugyanazt kapjuk

δp: a nyomásváltozás terjedését írja le az egyenlet $\rightarrow$ $\boxed{\text{hang}}$

nyomás-, vagy sűrűség-, vagy sebességhullám

~ elektronságnesség

de most skalármennyiségekről van szó

↓

csak longitudinális hullám van

DE egyenlőre nincs összefüggésünk p és ρ között (amit feltettünk)

2 ~~feltevés~~ esetet vizsgálunk:

1.) az állapotváltozás adiabatikus → gyors a folyamat
nagyfrekvenciás megoldás

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{áll} \quad / : m^{\kappa}$$

$$p \cdot \rho^{-\kappa} = \text{áll} = A$$

$$p(\rho) = p = A \cdot \rho^{\kappa}$$

$$\underline{\underline{\frac{dp}{d\rho}}} = \kappa \cdot A \cdot \underbrace{\rho^{\kappa-1}}_{\frac{A \cdot \rho^{\kappa}}{\rho} = \frac{p}{\rho}} = \kappa \cdot \frac{p}{\rho} =$$

politróp folyamatra ez mindig igaz

$$= \kappa \cdot \frac{1}{M} RT = \underline{\underline{\kappa \cdot \frac{R}{M} T_{\rho_0}}} = c^2$$

ρ_0 → az ehhez tartozó érték

izotermikus a változás → lassú a folyamat

2.) $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T \qquad \frac{dp}{d\rho} = \frac{R}{M} T$ alacsonyfrekvenciás megoldás

= a 2 határeset között nem nagy a különbség

$$\kappa \approx 1{,}3 \rightarrow 1{,}3 \cdot \frac{R}{M} T \approx 1 \frac{R}{M} T$$

⇓ igazán

nem számít, hogy alacsony vagy magas frekvencián vizsgáljuk a hang terjedését

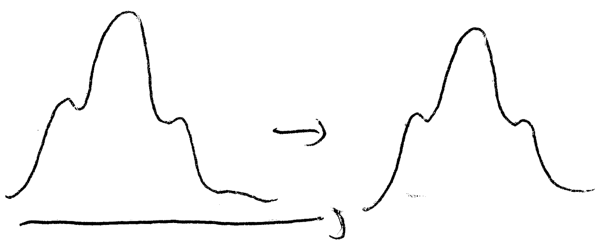
(de elvileg c_{hang} függ f-től)

<u>Egydimenziós változat:</u>

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2}$$

$\delta\rho = f(x \pm ct)$ → ez kielégíti az egyenletet

↓



a függvény egyszerűen odébbtolódik c sebességgel

$(ct - t)$

<u>3D-s eset:</u>

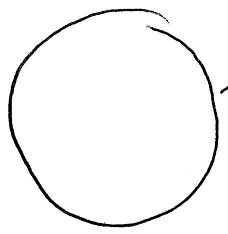
$\delta\rho = A \cdot \sin(\omega t \pm \underline{k}\,\underline{r} + \varphi)$ ha $\frac{\omega}{|\underline{k}|} = c$

akkor akármilyen ω-nál, A-nál, φ-nél mo.

↓

<u>síkhullám mo.:</u>

- az azonos fázisú felületek egy síkot határoznak meg, normálisuk a $\underline{k}$

 $\underline{k}$: hullámszámvektor

- az energia is $\underline{k}$ irányba terjed
- mivel $\underline{k}$ ~~kr~~ lineáris, ezek összege is megoldás

$$\delta_{\rho} = A \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\underline{k}\,\underline{r})$$ → ez is megoldás

$(+\varphi)$

↓

ez ugyanazt fejezi ki

$$\delta_{\rho} = A \sin(\omega t + \underline{k}\,\underline{r} + \varphi)$$ → minden pont harmonikus rezgőmozgást végez, de vmivel arrébb az ampl. ugyanakkora, ω azonos, de a fázisa eltér ($\underline{k}\,\underline{r}$ miatt)

$$\delta_{\rho} = A \sin(\omega t) \cdot \sin(\underline{k}\,\underline{r})$$

↓

itt most vmivel arrébb az amplitúdó változik, ω itt is ugyanannyi

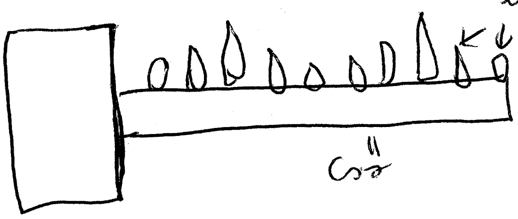
↓

<u>állóhullám</u>

– a hullámegyenlet egy parciális diff. egyenlet:
a megoldás függ a kezdeti és a peremfeltételektől is !!

kísérlet

lángok eltérő ampl.-val



$\delta\rho(t,0)=0$ $\delta\rho(t,L)=0$ → a cső 2 vége nem rezeghet

$\Downarrow$

$\sin(kL)=0 \to \underline{\underline{k\cdot L = n\pi}}$

$\downarrow$

~~ezek lesz~~
ezekre a k-kra akármilyen picit megrezegtetem a rendszert, nagy amplitúdóval rezeg

így válaszolódnak ki ezek az esetek ←

ha nem ezen a k-n vagyunk, akkor kisebb lesz az amplitúdó, de akkor is van rezgés

zárt síp: $kL=n\pi$

nyílt síp: $k=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

szilárd anyagban:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{(1D-ban)}$$

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

szilárd anyagban u-ra ugyanolyan hullámegyenlet jön ki!!

---

levegőben

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2}$$

$u \to E$

div

$\nabla \cdot E$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

vagy

$$\boxed{\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2}}$$

---

szilárd anyag

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}}$$

ugyanaz az egyenlet, csak a terjedési sebesség tér el

↳ a gáz és a szilárd anyag is egy sokrészecskés rendszer ↓

a 2 közeg határán a σ kénytelen folytonosan átmenni!!!

↓

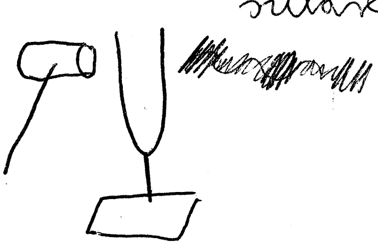
a fesz. (σ) folytonosan megy át

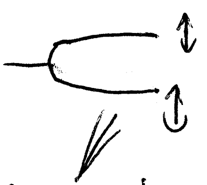
⇓

<u>a hang szilárd anyagokban is terjed</u>

⇓

szilárd anyagokban a rezgés átcsatolódik a levegőbe





stroboszkóp (villog)

– ha ugyanaz a villogás és a rezgés frekvenciája, akkor állni látszik a rezgő hangvilla

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \hat{\sigma} \quad \text{és} \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \delta_{ij} \underbrace{\varepsilon_{kk}}_{\operatorname{div} u}$$

$$\downarrow$$

3D-ős egyenlet

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}_i (\operatorname{div} \underline{u})$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \underline{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \underline{u}) \quad / \operatorname{rot}$$

rot

rot(grad...) = 0

$$\rho \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \underline{u} = \mu \cdot \Delta (\operatorname{rot} \underline{u}) + 0$$

$$\Downarrow$$

rot $\underline{u}$-ra ez egy <u>hullámegyenlet</u> !!

div

$$\boxed{c^2 = \frac{\mu}{\rho}}$$

div grad

$$\rho \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} u = \mu \Delta (\operatorname{div} \underline{u}) + (\lambda + \mu) \Delta (\operatorname{div} \underline{u}) =$$

$$- \text{"} - \quad = (\lambda + 2\mu) \cdot \Delta (\operatorname{div} \underline{u})$$

div $\underline{u}$-ra is egy hullámegyenlet

$$\boxed{c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

↳ szilárd anyagban kétféle sebességgel terjedhet a hang:

ha $\mathrm{div}\,\underline{u} = 0$ (nincs térfogatváltozás) $\rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\underline{u}$ -ra lesz hullámegy.

$\uparrow$

nyírás — transzverzális

nyírási hullám $\frac{\mu}{\rho}$-val terjed

ha $\mathrm{rot}\,\underline{u} = 0 \rightarrow \mathrm{div}\,\underline{u}$-ra hull. egy.

$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$-val longitudinális

= szilárd ~~(ex)~~ anyagokban 2 féle ~~~~ hangterjedés lehetséges

↳ (ha izotróp az anyag) $\rightarrow$ a nyírási és transzverzális terjedés sebessége eltérő

ha nem izotróp $\rightarrow$ 21 féle terjedési seb. van

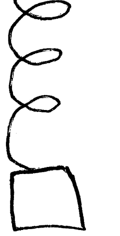
11. óra

összetett problémák

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \text{mozgásegyenlet}$$

1) Rugóra akasztott test rezgése (most nincs gravitáció)

L



M

I. $u(t, 0) = 0$

a felfüggesztésnél nem ~~~~ mozog

II. A másik oldalon a határfeltétel

a test szempontjából ez ellentétesen hat, mint az L pontban lévő rezgésben

$$M \frac{d^2}{dt^2} u(t, L) = -A\sigma(t, L) = -AE \frac{\partial u}{\partial x}(t, L)$$

$y = u(L)$ most

a felakasztott tömeg ~~a test~~ mozgása elmozd. ∂S a végén

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

keressük a megoldást:

$$u(x,t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(kx) \quad \text{alakban}$$

állóhullám

ide nem kell $+\varphi$, mert akkor $x=0$-ban nem lenne $u=0$.

$$-\omega^2 \cdot \rho \cdot u = -E \cdot k^2 \cdot u$$

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho} \cdot k^2$$

ha ez igaz

kielégíti a hullámegyenletet és az I. határfeltételt

II. h. felt.:

b. o. $\frac{M}{A} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cancel{u_0} - \omega^2 \frac{M}{\cancel{A}} \cdot u_0 \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(kx)$

j. o. $-A \cdot E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -AE \cdot u_0 \sin(\omega t + \varphi) \cdot k \cdot \cos(kx)$

$$\cancel{-}\omega^2 M \cdot \cancel{u_0} \cancel{\sin(\omega t + \varphi)} \cdot \sin(kx) = \cancel{-}AE\, \cancel{u_0} \cancel{\sin(\omega t + \varphi)} \cdot k \cdot \cos(kx)$$

$$\omega^2 M \cdot \sin(kL) = AE\, k \cdot \cos(kL) \quad \leftarrow \omega^2 = \frac{E}{\rho} k^2$$

ez csak az $x=L$ helyen igaz

$$\frac{\cancel{E}}{\rho} k^{\cancel{2}} M = A \cdot \cancel{E} \cancel{k} \cdot \mathrm{ctg}(kL)$$

$$\frac{M}{\rho A} \cdot k = \mathrm{ctg}(kL) \quad \sim \text{nyitott síp}$$

egyenlet k-ra

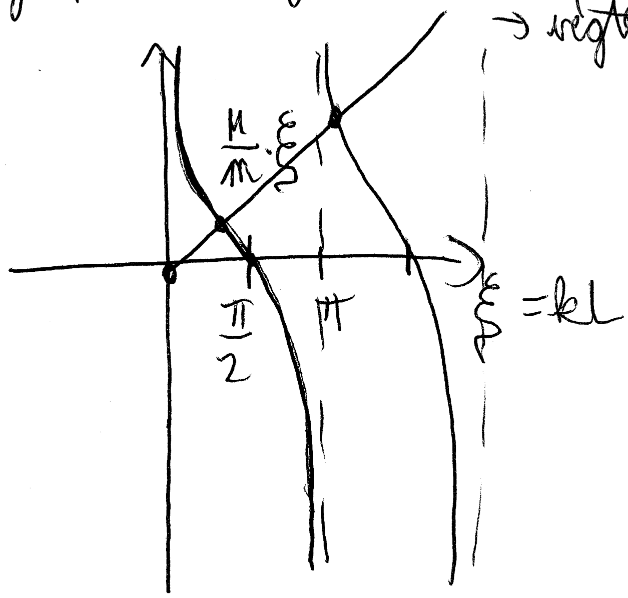
kiválasztotta a határfeltétel a megfelelő k-kat

$$\frac{M}{\underbrace{\rho \cdot \underbrace{A \cdot L}_{V_{rugó}}}_{m}} kL = ctg(kL)$$

m → a rugó tömege

$$\frac{M}{m}(kL) = ctg(kL)$$

↳ grafikus megoldás



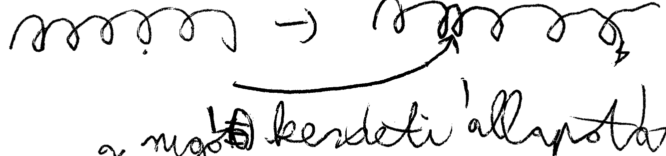
→ végtelen sok megoldás van

Elemzés:

- $M=0$ → vízszintes egyenes: megoldások: $(2n+1)\frac{\pi}{2}$
- $u(t=0, x) =$ adott

↓

új kezdeti feltétel:



a rugó kezdeti állapotát mi befolyásolhatjuk

↓

ezeknek k-s megoldásoknak a lineárkombinációja adja a megoldást

– de a minél nagyobb ω, annál nagyobb a súrlódás

↳ mivel súrlódás mindig van, a nagyobb frekvenciás módusok „hamar meghalnak”

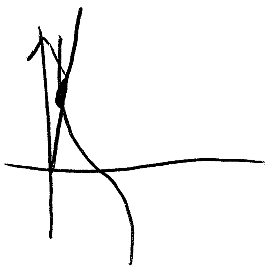
↓

a legkisebb ω-t mérjük le laborban !!!

– ha $M \gg m$

↓

a mo. az origóhoz közel kerül



↓

a ctg fv.-t közelíthetjük az origó körül

$$\mathrm{ctg}(x) \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$$

$$\frac{M}{m}\overbrace{(kL)}^{\xi} = \cancel{\mathrm{ctg}}\ \frac{1}{kL} - \frac{kL}{3}$$

$$\left(\frac{M}{m} + \frac{1}{3}\right) \xi^2 = 1$$

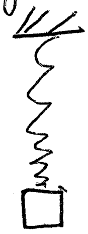
$$\left(\frac{M}{m} + \frac{1}{3}\right) k^2 L^2 = 1 \leftarrow k^2 = \frac{\rho}{E} \cdot \omega^2$$

$$k^2 = \frac{1}{\left(\frac{M}{m} + \frac{1}{3}\right) \cdot L^2}$$

$$\omega^2=\frac{E\cdot A}{\underbrace{\rho L\cdot A}_{m}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{M}{m}+\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{1}{L}$$

$$\omega^2=\frac{E\cdot A}{m\left(\frac{M}{m}+\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{1}{L}=\frac{E A}{L}\cdot\frac{1}{M+\frac{1}{3}m}=\frac{D}{M+\frac{m}{3}}$$

D: rugóállandó

(lsd. )

rugóra akasztott test

ha $M >> m$ $\quad \omega^2=\frac{D}{M+\frac{m}{3}}$

$\cancel{\omega^2=\frac{D}{M}}$

2) Ha gravitációs erőtérben van:

~~határfelt.~~ $\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho\cdot g+E\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ határfelt. II. $u(t,0)=0$

mozgásegy. →

I. határfelt. $M\cdot\frac{d^2 u}{dt^2}\Big|_L=M\cdot g-A\cdot E\frac{du}{dx}\Big|_L$

→ spec. mo.: statika $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ ← $0=\rho\cdot g+E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ határfelt. $0=Mg-AE\frac{du}{dx}\Big|_L$

→ $u_\infty(x)$ nem derivált

$u(x,t)=u_\infty(x)+u'(x,t)$

inhomogén hullámegyenlet:

↳ úgy oldjuk meg, hogy a stacionárius megoldást hozzáadjuk a homogén megoldáshoz

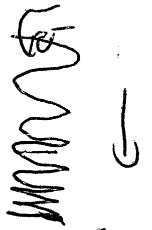
most $u_\infty(x)$ → stacionárius mo.

$u'(x,t)$ → homogén megoldás

↓

grav. térben is így látszik a mozgás

II) Rugó esése



$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho g + E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a másik határfelt. megváltozik!

határfeltételek: $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_L = 0$ (nincs a végére akasztva semmi)

→ a megoldást megint ilyen formában keressük:

$\boxed{u = u_0(x) + u'(x,t)}$ amikor még

↳ ez a statikus mo. (fogjuk)

a) Ezt már megoldottuk:

$$-\rho g = E \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

határfeltételek: $u_0(0) = 0$, $\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_L = 0$

$$u_0(x) = \cancel{a} + bx - \frac{\rho g}{2E}x^2 \qquad b - \frac{\rho g}{E}L = 0$$

$$u_0(x) = \frac{\rho g}{E}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

b) ~~partikul~~ homogén mo.:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$ → az u_0 deriváltja eltűnik

↓

hullámegyenlet

I. $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_L = 0$ → határfeltétel (lásd. előbb)

$$\frac{\partial (u_0+u')}{\partial x}\Big|_L = \cancel{\frac{\partial u_0}{\partial x}}\Big|_L + \boxed{\frac{\partial u'}{\partial x}\Big|_L = 0} \quad \text{I.}$$

II. a homogén mo.-a

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{\rho g}{E} L$$

$x=0$-ban

(lásd. előbb)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$$ → megszüntetjük

a fogást, megszűnik az erő (~~erő~~ feszültség)

($\sigma = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$)

⇓

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_0 + \frac{\partial u'}{\partial x}\Big|_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0 = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{\rho g}{E} L} \quad \text{II.}$$

~~...~~ kezdetben a felfügg.-nél ébred erő, de $u_0' \neq 0$

↓

a hullámegyenletet és a 2. határfeltételt ki kell elégítse

+III. $u'(x,0)=0$ $\quad 0 \le x \le L$

minden pontban kezdetben → az álló állapothoz képesti elmozdulás 0 $t=0$-val az elengedés után

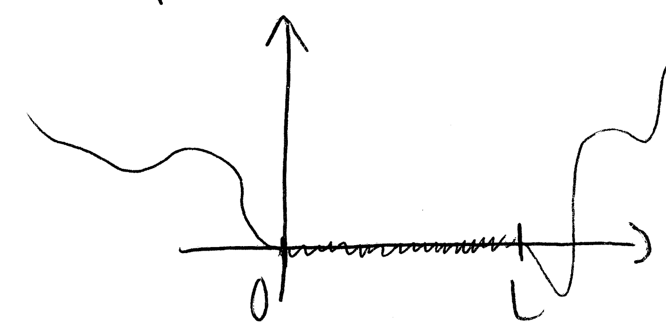
~~(nincs kezdősebesség)~~

$$u' = f(x-ct) \qquad c^2 = \frac{E}{\rho}$$

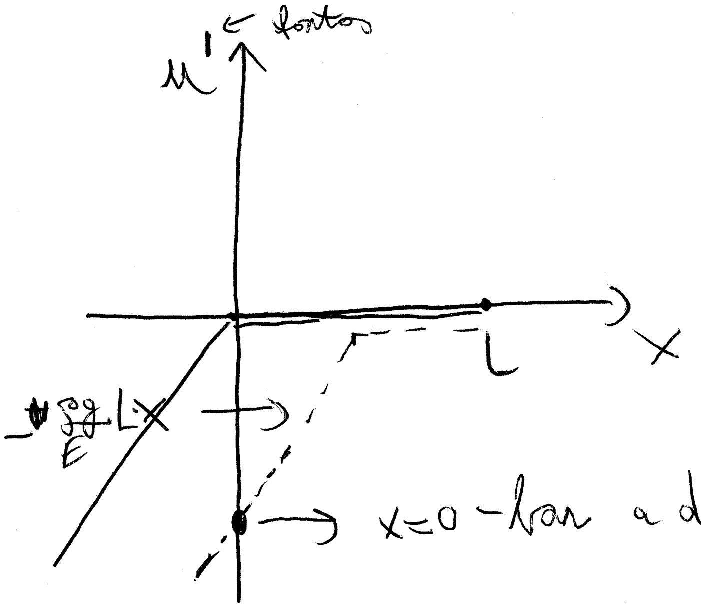
↓

a hullámegy. ált. megoldása

$t=0$-ban f-nek 0 és L között el kell tűnnie!!



a hullámegyenlet szempontjából ez egy ~~(jó)~~ jó megoldás



→ $x=0$-ban a derivált mindig $-\frac{Sg}{E} \cdot L$

↓ az álló állapothoz képest a felfüggesztésnél levő pontok egyre közelednek a nyújtatlan állapothoz, míg $x=L$-nél a vége áll

↓ ez egy jó spec. fv., kielégíti a határfeltételt

⇓

amíg a / szakasz el nem éri az L végpontot, addig ott a fv. deriváltja x-szerint 0.

↳ nem mozdul a vége!!

↓

1. (u_0) ← áll
2. ← áll
3. ← áll
4. ↓ esik

lökéshullám:

melyik karakterisztikus mennyiség ugrik

↳ most a feszültség ugrik (kezdetben 0 pontban véges, utána elengedésnél 0 lesz)

= a hullámegyenletnek tetszőleges megoldása lehet, de a határfeltételek meghatároznak bizonyos dolgokat