1) Vezesse le a pontrendszer impulzustételét!

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i I_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_i m_i v_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t}(\sum_i m_i r_i) = \sum F = F_k$$

2) Vezesse le a pontrendszer impulzusmomentum tételét!

$$\dot{N} = M$$

$$N = r \times I \quad / \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = M = r \times \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r \times I)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \sum \frac{\mathrm{d}(r \times I)}{\mathrm{d}} = \sum_i r_i \times F_i + \sum_i \sum_i r_i \times F_i$$

3) Vezesse le a pontrendszer tömegközéppontja mozgásának a tételét!

$$r_s = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i r_i}{M} \qquad / \cdot M$$

$$M \cdot r_s = \sum_i m_i r_i \qquad / \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(M \cdot r_s)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\sum_i m_i r_i) = F$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2 r_s}{\mathrm{d}t^2} = F$$

4) Vezesse le a tökéletesen rugalmasan ütköző testek ütközés utáni sebességét!

Impulzusmegmaradás:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Mozgási energia megmaradása:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

rendezés után:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2 u_2$$
$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2 u_2^2$$

a két egyenletet elosztjuk egymással:

$$\frac{\cancel{m_1}\cancel{(v_1 - u_1)}(v_1 + u_1)}{\cancel{m_1}\cancel{(v_1 - u_1)}} = \frac{\cancel{m_2} u_2^{\cancel{2}}}{\cancel{m_2}\cancel{u_2}} \quad \Rightarrow \quad u_2 = u_1 + v_1$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 - u_1 &= \tfrac{m_2}{m_1}u_2 \\ v_1 + u_1 &= u_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2v_1 = u_2(1 + \frac{m_2}{m_1}) = u_2\frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

innen:

$$u_2 = \frac{2v_1 m_1}{m_1 + m_2}$$

majd u_1 kifejezése:

$$u_1 = u_2 - v_1 = \frac{2v_1 m_1}{m_1 + m_2} - v_1 = v_1(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} - 1)$$

5) Vezesse le a merev test forgásának alapegyenletét és egyensúlyi feltételeket a tömegközépponti rendszerben!

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = M$$

A vektorszorzatban szereplő vektorok merőlegesek egymásra, tehát:

$$N_i = r_i \times m_i v_i = r_i m_i v_i$$

$$R_i = r_i \cos\vartheta_i$$

$$N_i z = N_i \cos\vartheta_i = r_i m_i v_i \cos\vartheta_i = R_i m_i v_i = m_i R_i \omega_z^2$$

$$N_z = \sum_i N_z i = \sum_i m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_i m_i R_i^2$$

$$\Theta_z = \sum_i m_i R_i^2$$

$$N_z = \Theta_z \omega_z$$

Ezek alapján a mozgásegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}N_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\Theta_z \omega_z)}{\mathrm{d}t} = M_z$$

Az egyensúlyi feltételek:
A testre ható külső erők eredője nulla:

$$\sum F_k = 0$$

A külső erők bármely pontra vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla:

$$\sum M = 0$$

6) Vezesse le egy tengely körül forgó merev test forgási energiáját!

$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i l_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i l_i^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

7) Vezesse le egy tengely körül forgó merev test impulzusmomentumát!

r_i kifejezése:

$$r_i = l_i + \vec{OO'}$$

Forgómozgás alapegyenlete:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = M$$

csak z irányban:

$$\frac{\mathrm{d}N_z}{\mathrm{d}t} = M_z$$

$$v_i = \omega \times l_i$$
$$v_i = \omega \cdot l_i$$

$$N_i = r \times I = (l_i + \vec{OO'}) \times m_i v_i = \vec{OO'} \times m_i v_i + l_i \times m_i v_i$$
$$N_z = (\vec{OO'} \times m_i v_i)_z + (l_i \times m_i v_i)_z$$
$$N_z = \sum_{i=1}^{N} (N_i)_z = \sum_i m_i l_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i l_i^2 = \Theta\omega$$

8) Ismertesse és értelmezze az egyik forgózsámoly kísérletet!

- Ha forgózsámolyt rajta mozdulatlanul ülő személlyel együtt forgásba hozunk, a rendszer ω szögsebessége jó közelítéssel állandó. Mihelyt azonban a zsámolyon ülő és kezében néhány kg tömegű testeket tartó személy karjait kinyújtja, a szögsebesség feltűnően csökken.
Magyarázat: $M_z = 0$ így $\Theta\omega = const$, szóval ha Θ növekszik, ω-nak csökkennie kell.
- Forgózsámolyon ülő személy függőleges tengelyű biciklikereket tart. Ha a kereket forgásba hozza, a zsámollyal együtt ellentétes forgásba jön, de ha a kereket magához szorítva lefékezi: a zsámoly forgása is megszűnik.

9) Vezesse le a precessziós mozgásra jellemző szögsebességet!

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_p$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = M \quad \Rightarrow \Delta N = M\Delta t$$
$$|\Delta N| = N \cdot \sin\vartheta \cdot \Delta\varphi = \mu\Delta t$$

innen:

$$\left.\begin{array}{c} M = mg\sin\vartheta \cdot s \\ N = \Theta_c\omega_c \\ \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{M}{N\cdot\sin\vartheta} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \omega_p = \frac{mg \cdot \cancel{\sin\vartheta} \cdot s}{\Theta_c\omega_c \cancel{\sin\vartheta}} = \frac{mg \cdot s}{\Theta_c\omega_c}$$

10) Igazolja Arkhimédész-törvényét folyadékba merülő, függőleges tengelyű henger vagy hasáb esetén!

Az alaplapokra ható erő:

$$F_1 = A \cdot P_{h_1} = A \cdot h_1 \cdot \rho_f \cdot g$$
$$F_2 = A \cdot P_{h_2} = A \cdot h_2 \cdot \rho_f \cdot g$$

Az oldallapokra ható erők eredője nulla:

$$F_3 + F_4 = 0$$
$$F_5 + F_6 = 0$$

A felhajtóerő:

$$F = F_2 - F_1 = A \cdot \rho_f \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = V \cdot \rho_f \cdot g$$

A felhajtóerő megegyezik a test tömege által kiszorított víz súlyával.

11) Mutassa meg, hogyan kell egy folyadék sűrűségét meghatározni!

A folyadék sűrűségének meghatározásához merítsük az testet egy ismeretlen sűrűségű folyadékba úgy, hogy az ellepje.
A folyadék sűrűsége számítható:

$$\rho_f = \frac{G_L - G_f}{G_L} \cdot \rho_t$$

12) Mutassa meg, hogyan kell egy merev test sűrűségét meghatározni!

A folyadékba merülő testre felhajtóerő hat, melynek nagysága egyenlő a test által kiszorított folyadék súlyával. Ha a test súlya a levegőn G_L , és ismert sűrűségű folyadékban, például vízben G_v, akkor a testre ható felhajtóerő:

$$F_f = G_L - G_v$$

Ebből a test térfogata:

$$V_t = \frac{G_L - G_v}{\rho_v \cdot g}$$

Mivel a test sűrűsége:

$$\rho_t = \frac{G_L}{V_t \cdot g}$$

ebből a test térfogatára kapott kifejezést behelyettesítve:

$$\rho_t = \frac{G_L \cdot \rho_v}{G_L - G_v}$$

13) A közelítések ismertetése mellett, Boyle-Mariotte törvény ismeretében vezesse le a barometrikus magasságformulát!

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} \rightarrow \rho = p \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \\ \Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta h \\ \Delta h \rightarrow 0, \ \ \frac{\partial p}{\partial h} = -\rho \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial h} = -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot p$$

innen:

$$p = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho \cdot g}{p_0} \cdot h}$$

14) Vezesse le a kinetikus gázelmélet felhasználásával az ideális gáz nyomását és Boyle-Mariotte törvényét!

15) Vezesse le a görbületi nyomás képletét szappanbuborék belsejében!

Állandó sebességgel felfújjük a hártyát:

$$R \Rightarrow R + \Delta R$$

Energiamegmaradás: $W = \Delta E_p \Rightarrow c \cdot P_g$

ΔA felületekre bontjuk:

$$W = \sum_i F_i \Delta R = \sum P_g \cdot \Delta A \cdot \Delta R = P_g \cdot \Delta R \cdot \sum \Delta A = P_g \Delta R \cdot 4\pi R^2$$

$$\Delta A = 8\pi R \Delta R$$

A buborék miatt két szabad felület van:

$$\Delta E_p = 2\alpha \cdot \Delta A = 2\alpha \cdot 8\pi R \Delta R$$

$$W = \Delta E_p \Rightarrow P_g \cdot \Delta R \cdot 4R^2\pi = 16\alpha \cdot \pi R \Delta R \qquad / \cdot 4\pi R \Delta R$$

2 db felületre:

$$P_g = \frac{4\alpha}{R}$$

1 db felületre:

$$P_g = \frac{2\alpha}{R}$$

16) Vezesse le a kapilláris emelkedést r sugarú kapilláris csőben!

$$\cos\Theta = \frac{Rr}{R} \quad ; \quad R = \frac{r}{\cos\vartheta}$$

$$P_g = \frac{2\alpha}{R} = \frac{\cos\vartheta \cdot 2\alpha}{r}$$

$$F = P_g \cdot \pi r^2 = mg \Rightarrow \frac{\cos\vartheta \cdot 2\alpha}{r} \cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} = h \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} \rho \cdot g$$

tehát a magasság:

$$h = \frac{\cos\vartheta \cdot 2\alpha}{r \cdot \rho g}$$

17) Vezesse le a Bernoulli-egyenletet súrlódásmentes folyadék stacionárius áramlása esetén!

$$\Delta E_m = W = W_1 + W_2$$

$$W_1 = mg \cdot (h_1 - h_2) = V \cdot \rho \cdot g(h_1 - h_2)$$

$$p_1 \Rightarrow F_1 = p_1 A_1 \qquad p_1 \Rightarrow F_2 = p_2 A_2$$

$$W_2 = F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \qquad\qquad V_1 = V_2$$

tehát az energiaváltozás:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho V v_1^2$$

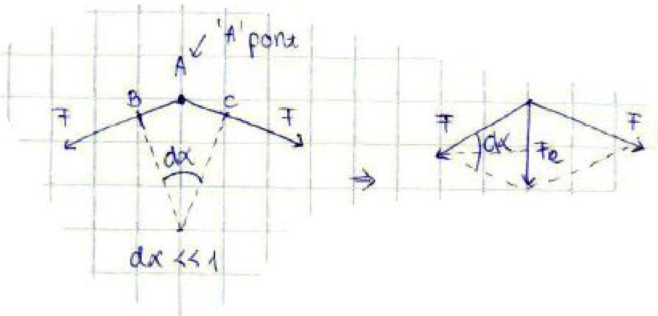
az egyenletet rendezve:

$$\frac{1}{2}\rho \cancel{V} v_2^2 - \frac{1}{2}\rho \cancel{V} v_1^2 = \cancel{V} \rho g(h_1 - h_2) + p_1 \cancel{V} - p_2 \cancel{V}$$

$$-p_1 - \frac{1}{2}\rho V v_1^2 - \rho g h_1 = -p_2 - \frac{1}{2}\rho V v_2^2 - \rho g h_2$$

ebből következik, hogy:

$$p + \frac{1}{2}\rho V v^2 + \rho g h = const.$$



18) Vezesse le a húron (feszített kötélen) terjedő transzverzális hullám terjedési sebességét!

$$F_e = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{\mathrm{d}\alpha}{2} \approx F \cdot \mathrm{d}\alpha$$

Körmozgás során:

$$\left.\begin{array}{c} F_{cp} = F_e = F \cdot \mathrm{d}\alpha \\ F_{cp} = m \cdot \frac{c_T^2}{R} \\ m = R \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot A \cdot \rho \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F \cdot \cancel{\mathrm{d}\alpha} = R \cdot \cancel{\mathrm{d}\alpha} \cdot A\rho \cdot \frac{c_T^2}{R}$$

$$c_T^2 = \frac{F}{A \cdot \rho} = \frac{\sigma}{\rho} \Rightarrow \quad c_T = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

19) Vezesse le a rugalmas közegben (rúdban) terjedő longitudinális hullám terjedési sebességét!

$$l = c \cdot \tau$$

$$\left.\begin{array}{c} F = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot A \\ m = A \cdot \rho \cdot c \cdot \tau \\ v = \frac{\Delta l}{\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow F \cdot \tau = m \cdot v$$

innen:

$$E \cdot \frac{\cancel{\Delta l}}{l} \cdot \cancel{A} \cdot \tau = \cancel{A} \cdot \rho \cdot c \cdot \cancel{\tau} \frac{\cancel{\Delta l}}{\cancel{\tau}}$$

$$\frac{E \cdot \tau}{l} = \rho \cdot c$$

$$E = \frac{\rho \cdot c \cdot l}{\tau} \leftarrow \frac{l}{\tau} = c$$

tehát:

$$E = \rho \cdot c^2 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

20) Vezesse le a hullámegyenletet a hullámfüggvény ismeretében!

A hullámegyenlet:

$$y(x, t) = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

lederiváljuk a függvényt kétszer t szerint:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A \cdot (\frac{2\pi}{T})^2 \cdot \sin\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$$

majd kétszer x szerint:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A \cdot (\frac{2\pi}{\lambda})^2 \cdot \sin\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0\right]$$

$$\lambda = cT \Rightarrow \lambda^2 = c^2T^2$$

tehát, a két második derivált egy konstans szorzatban különbözik:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

21) Vezesse le az interferenciai maximális erősítés és teljes kioltás feltételeit!

$$f_1 = A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$f_2 = A \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$f_1 + f_2 = 2A \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2})$$

maximális, ha $\cos\frac{\varphi}{2}$ is maximális:

$$f_1 + f_2 = 2A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

minimális, ha $\cos\frac{\varphi}{2}$ is minimális:

$$f_1 + f_2 = 0$$