Gauss-Jordan elimináció (sorcserékkel)

Kondor Dániel

2012. március 20.

1. Bemenet

Legyen az egyenletrendszerünk az alábbi alakú:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

ahol $\mathbf{A}$ egy $N \times N$ méretű mátrix, az elemei a_{ij}. Kiírva komponensenként:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2 \ldots N \tag{2}$$

Ezenkívül meg akarjuk még határozni az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét is: $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$. Ehhez legyen a $\mathbf{C}$ mátrixunk eredetileg az egységmátrix: $c_{ij} = \delta_{ij}$.

A képletek egyszerűsítésére jelölje A_i az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorát.

2. Az algoritmus

Első lépésként normáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot úgy, hogy minden sorban a legnagyobb elem értéke legyen 1. Természetesen ugyanezeket a műveleteket el kell végeznünk a $\mathbf{b}$ vektoron és $\mathbf{C}$ mátrixon is:

for $i = 1 \to N$ **do**
  $\alpha \leftarrow \max_j a_{ij}$
  for $j = 1 \to N$ **do**
    $a_{ij} \leftarrow a_{ij}/\alpha$
  end for
  $b_i \leftarrow b_i/\alpha$
  for $j = 1 \to N$ **do**
    $c_{ij} \leftarrow c_{ij}/\alpha$
  end for
end for

Ezután az $\mathbf{A}$ mátrixot egységmátrix alakra hozzuk a megengedett műveletek (sorok lineárkombinációja, sorcserék és oszlopcserék) használatával:

for $i = 1 \to N$ **do** ▷ végigmegyünk minden soron
  $k \leftarrow \{k = i, i+1 \ldots N; a_{ki} = \max\}$ ▷ kiválasztjuk azt a sort, amiben az i edik elem a legnagyobb (az i-edik oszlop legnagyobb elemét)
  if $a_{ik} = 0$ **then** ▷ ha a legnagyobb elem is 0, akkor nincs megoldás
    Szinguláris mátrix!

end if
$A_i \leftrightarrow A_k$ ▷ felcseréljük az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik és k-adik sorát, az a_{ii} elem az i-edik oszlop legnagyobb eleme lesz
$b_i \leftrightarrow b_k$ ▷ a cserét végrehajtjuk az egyenletrendszer jobb oldalán
$C_i \leftrightarrow C_k$ ▷ és az egységmátrixon is
$\alpha \leftarrow a_{ii}$ ▷ Az a_{ii} elemmel kell leosztanunk az i-edik sort
for $j = i \to N$ **do** ▷ leosztjuk az i-edik sort a_{ii}-vel, így a főátlóban 1 lesz
  $a_{ij} \leftarrow a_{ij}/\alpha$
end for
$b_i \leftarrow b_i/\alpha$
for $j = 1 \to N$ **do** ▷ az egységmátrixra is
  $c_{ij} \leftarrow c_{ij}/\alpha$
end for
for $j = 1 \to N, j \neq i$ **do** ▷ minden sorból kivonjuk az i-edik sor a_{ji}-szeresét, így a_{ji} helyére 0 kerül
  $\beta \leftarrow a_{ji}$
  for $k = i \to N$ **do**
    $a_{jk} \leftarrow a_{jk} - \beta a_{ik}$
  end for
  $b_j \leftarrow b_j - \beta b_i$
  for $k = 1 \to N$ **do**
    $c_{jk} \leftarrow c_{jk} - \beta c_{ik}$
  end for
end for
end for

Ezután a $\mathbf{b}$ vektor tartalmazza az egyenletrendszer megoldását, a $\mathbf{C}$ mátrix pedig az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét (és az $\mathbf{A}$ mátrix helyén az egységmátrixot kellett kapnunk).