Gyakorló feladatsor „A fizika numerikus módszerei I." anyagának 2. feléhez

(2008-2009. tanév 2. félévében)

1. Egy radioaktívan bomló anyag mennyiségének változását a

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

egyenlet írja le. Oldjuk meg ezt az egyenletet az Euler-módszerrel és az `octave` beépített függvényével! Ha az $N_0 = 10^7$ kezdeti feltételből indulunk ki, akkor mennyi idő szükséges ahhoz, hogy az összes atom elbomoljon (azaz $N < 0$ legyen)? Hogyan függ ez az időtartam a λ bomlási állandótól?

2. Vizsgáljuk egy $m = 1$ tömegű részecske mozgását a $V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ potenciálban!
(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet, alakítsuk át numerikusan kezelhető formába és oldjuk meg különböző kezdeti feltételekkel! Vizsgáljuk meg az $E > 0$ és az $E < 0$ eseteket is (itt E a részecske teljes energiája)!
(b) Mérjük meg a periódusidőt az energia függvényében (Figyeljünk arra, hogy *fizkailag értelmes* kezdeti feltételeket válasszunk!)!
(c) Egészítsük ki modellünket egy sebességgel arányos súrlódási taggal! Hogyan változik meg a részecske mozgása?

3. Oldjuk meg a

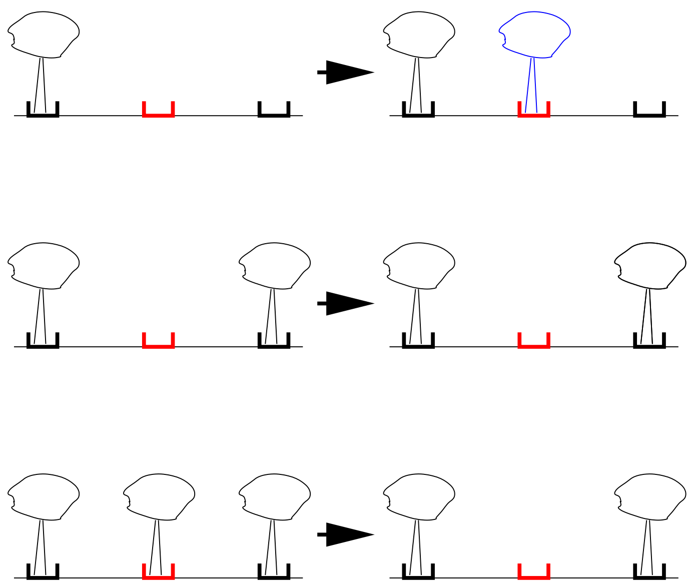
$$\frac{dx}{dt} = -2xt$$

egyenletet! Vizsgáljuk a megoldásokat különböző kezedeti feltételekre!

4. Egy tárgyból a hallgatók évvégi összpontszámai a `http://complex.elte.hu/~kaufmann/fiznum1/` címen a `pontok.txt` fileban találhatók. Az oszlopok egymás utáni évekre vonatkoznak, egymás alatt a hallgatók pontszámai találhatók. (Az adatsor nem valóságos, így fordulhat elő, hogy minden évnél 30 hallgató szerepel.) Minden évben 25 pontot kellett elérni a tárgy teljesítéséhez. Töltsük le a filet, olvassuk be, és határozzuk meg, hogy az egyes években hányan teljesítették. Mennyi az 1-est szerzők számának a szórása?

5. Kimértük egy rúgó erejét a megnyúlás függvényében, és úgy találtuk, hogy nem pontosan lineáris. Az adatok a `http://complex.elte.hu/~kaufmann/fiznum1/` címen a `data.txt` fileban találhatók: első oszlop a megnyúlás cm-ben (negatív érték összenyomásnak felel meg), a második oszlop az erő Newtonban. Illesszünk rá polinomot! Ez alapján adjuk meg, hogy ha egy gépbe szereljük, amiben időnként 2.5 cm-rel nyúlik meg, máskor ugyanennyit nyomódik össze, akkor a megnyújtott és összenyomott esetben ható erők abszolút értékeinek várhatóan mennyi a különbsége! Ha 1N-nal húzzuk, akkor várhatóan mennyit nyúlik meg?

6. Egydimenziós erdő: Egy kerek tó körül a fák egy körvonal mentén diszkrét rácspontokon nőhetnek. Írjuk ezt le periódikus határfeltétellel, azaz legyen az n-dik rácspont jobboldali szomszédja az első rácspont! Egy helyen legfeljebb egy fa állhat. Ha egy üres hely mellett csak 1 fa áll, akkor az üres helyen kihajt egy új fa (ld. az 1. ábrát). Természetesen ha egy hely mellett nem áll fa, akkor oda nem eshet mag és így nem is hajthat ki új növény azon a helyen. Ha egy helyet két oldalról is fa határol, akkor azon a helyen nem tud kihajtani az új növény az árnyéktól és az esetleg ott levő fa is kipusztul. Más esetekben nem pusztul ki a fa.



1. ábra. Néhány tipikus szabály az erdő változására a pirossal jelölt helyen. Figyeljük meg a lokális környezet hatását!

Vizsgáljuk egy ilyen erdő fejlődését! Próbáljuk meghatározni, hogy van-e a fenti szabályokkal leírt erdőnek valamilyen végállapota? Ez függ-e a kiindulási állapottól? Próbáljuk meg feltétlenül az alábbi kezőállapotokat is:
(a) Egy helyen sem áll fa.
(b) Minden helyen fa áll.
(c) Véletlenül kiválasztott helyeken áll fa (játsszunk a kezdeti betöltési valószínűséggel!).
(d) Felváltva állnak illetve nem állnak fák az egyes helyeken.

A szimuláció során vizsgáljuk az állapotok frissítésének két fajtáját: a szekvenciális és a párhuzamos frissítést. A szekvenciális frissítés során egy lépésben egy adott helyet vizsgálunk és a így határozzuk meg az új állapotot, majd továbblépünk a következő rácspontra, így annak szomszédjaként az előbbi rácspontnak már az új állapotát használjuk. A párhuzamos eljárás során az összes rácspont állapotát egyszerre változtatjuk meg, olyan értelemben, hogy a rácspontokat sorra vesszük, de a $(t+1)$-dik állapot meghatározásához a szomszédok korábbi, t időbeli állapotait használjuk. Hogy ezek ne vesszenek el a rácspontok sorra vételekor, az új állapotukat egy külön tömbbe tegyük, és csak a rácspontok végére érve töltsük át a korábbi állapotot tartalmazó tömbbe!

Azt is vizsgálhatjuk, mit látunk páros és páratlan számú rácspont esetében.

7. Egydimenziós kert: Egy körvonal (vékony körgyűrű) alakú virágágyásban N virágnak van hely, egy sorban egymás mellett. Kétnyári virágokat ültetünk, melyek a következő tulajdonságokkal bírnak:

- egy virág két állapotban lehet (első vagy második éves), illetve lehetséges, hogy egy adott helyen nincs növény;
- egy első éves virág a következő évben második éves lesz, majd az azt követő évben elpusztul;
- egy második éves növény a szomszédságában található üres helyekre magokat szór, és ott első éves növények nőnek.

Szimuláljuk a fenti „kertet"! Vegyünk egy egydimenziós rácsot periodikus határfeltételekkel és használjunk ún. párhuzamos frissítést: a rácspontok állapotait egyszerre változtassuk meg, azaz előbb határozzuk meg (számítsuk ki) az összes rácspont új állapotát egy külön tömbbe tárolva el, mielőtt a rendszert frissítenénk, azaz mielőtt a jelenlegi állapotát tartalmazó tömböt változtatnánk.

8. Diffúziót úgy is modellezhetünk, hogy cellákra bontjuk a rendszert, és azt tároljuk, hogy az egyes cellákban a diffundáló anyagból mennyi található. Az időben egymást követő állapotokat pedig azzal a közelítéssel kapjuk, hogy minden időlépésben a cellákban tárolt mennyiséget összeátlagoljuk a szomszédaival (azaz minden cellában az új érték az adott cellához és szomszédaihoz tartozó mennyiségek átlaga lesz). Vizsgáljuk ezt a modellt egydimenzióban zárt vagy periódikus határfeltétellel! Legyen a kezdeti állapot pl. egyetlen cella betöltése!

9. Számoljuk ki az $x^p + y^p = 1$ egyenlettel adott görbe által körülzárt terület nagyságát különböző $p \in [1, \infty)$ értékekre!

10. Számoljuk ki egy vékony rúd tehetetlenségi nyomatékát, ha keresztmetszetének területe $A(x) = \cos(\pi x/a)$ függvény szerint változik a rúd hossza mentén, míg $x \in [-a/2, a/2]$! A tehetetlenségi nyomatékot a $\Theta = \int_{-a/2}^{a/2} \rho A(x) x^2 \, dx$ képlettel számolhatjuk, ahol a ρ sűrűséget vegyük 2-nek!