Gyakorló feladatsor „A fizika numerikus módszerei I." anyagának 1. feléhez

1. a) Mennyi munkát végeztünk, ha a $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ pontbol a $\begin{pmatrix} p \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$ pontba mozdultunk el és közben $\begin{pmatrix} -13.5 \\ 24 \\ 3.14 \end{pmatrix}$ erőt fejtettünk ki? Legyen pl. $p = 24$.

b) Ábrázoljuk a végzett munkát p függvényében 1-től 50-ig!

2. Egy test az origón átmenő, $\begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ p \end{pmatrix}$ irányú tengely körül $\omega = 7$ szögsebességgel forog. Határozzuk meg a tengelyirányú egységvektort! Számoljuk ki a test $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ helykoordinátákkal rendelkező pontjának sebességvektorát!

3. a) Vetítsük a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ -24 \\ 21 \end{pmatrix}$ vektort az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix}$ vektor egyenesére, először a vetítés mátrixának megalkotása nélkül, azután a vetítés mátrixát használva!

b) Fejtsük ki a $\underline{v}$ vektort az alábbi vektorok bázisán a Cramer szabállyal. A szabályt pl. a wikipediaban (wikipedia.org) találhatjuk a Cramer's rule címszó alatt.
$\underline{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 81 \end{pmatrix}$ $\underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$

Ellenőrizzük is, hogy a kifejtés visszaadja-e a vektort!

4. a) Konstruáljunk 0,1 intervallumba eső véletlen elemekből álló 3*5 méretű A, és 5*2 méretű B mátrixot. Próbáljuk ki, hogy e mátrixok és transzponáltjaik milyen sorrendben szorozhatók, és az eredmények közt vannak-e egyszerű összefüggések!

b) A kvantummechanikában az 1/2-es spinek leírásához használjuk az ú.n. *Pauli-mátrixokat*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy ezekre a mátrixokra teljesül a

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} \cdot I,$$

összefüggés, ahol $\{A, B\} = A \cdot B + B \cdot A$ az ú.n. antikommutátor, I az egységmátrix, $a, b \in \{1, 2, 3\}$, δ_{xy} pedig a szokásos Kronecker-szimbólum.

5. Hozzuk létre egy egyenes út mentén egymástól 1-1km távol lévő 9 rádiótávcső távolság-mutató táblázatát, azaz olyan 9*9-es mátrixot, aminek minden (i,j)-dik eleme megmondja, hogy az i-dik és j-dik távcső milyen messze van egymástól! Úgy is mondhatjuk, hogy a mátrix minden eleme az a szám, ami megmondja, hogy milyen

messze van az elem a főátlótól (azaz a mátrixelem az oszlop es sorindex különbségeinek abszolút értéke). Próbáljuk ezt megtenni a) mátrix-generáló függvénnyel, b) for ciklussal! c) Írjunk függvényt, amit létrehozza a mátrixot n*n méretben!

6. Egy mérés automatikus kiértékelése során az (1+9.81*eps-1)/eps műveletsort kell elvégeznie az octave-nak. Mit várunk kipróbálás nélkül, mennyire pontosan adja ki ez a 9.81 értéket; esetleg tudjuk-e, pontosan mennyit ad? Próbáljuk ki!

7. „A kör négyszögesítése helyett négyzetes függvénnyel való közelítése” Ábrázoljuk együtt az origó körüli egységsugarú kört (a felső félkör elegendő) és az $1 - a * x^2$ függvényt az $x = 0$ közelében, és döntsük el, hogy $a = 1$ vagy $a = 0.5$ esetén simulnak jobban egymáshoz!

8. Egy tárcsás gép n db különböző kör alakú nemesfém lemezt tartalmaz, amiknek sugara 5cm-rel kezdődik és 1.5 cm-enként nő. Írjunk olyan függvényt, ami kiszámolja a gép nemesfém szükségletét, azaz összeadja a körök területét, ha n-et megadjuk neki!

9. Ellenőrizzük, hogy ha a síkban 45 fokkal negatív irányban forgatunk, azután az x tengelyre tükrözünk, azután 45 fokkal pozitív irányban forgatunk, akkor ugyanazt kapjuk, mintha az $y = x$ egyenesre tükröztünk volna!

10. Próbáljuk ki mit okoz, ha a megoldandó lineáris egyenletrendszerben a mátrix közel szinguláris! Keressük meg a

$$\begin{pmatrix} 40 & 24 \\ 120.01 & 72 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 335 \\ 1005.05 \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldását, ahol láthatóan a második sor közel azonos az elsőnek a háromszorosával! Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a jobb oldali vektor második elemét 0.1-del megnöveljük, ill. ha a mátrixban a 120.01 helyére 120.001-et írunk! Hasonlítsuk ezt össze azzal, ha hasonló változtatásokat végzünk a $\begin{pmatrix} 40 & 60 \\ -60 & 135 \end{pmatrix}$ mátrix esetén!

11. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Oldjuk meg az $Ax = b$ egyenletrendszert az A invertálásával és az `octave` szokásos eljárásával! Hasonlítsuk össze a két eredményt! b) Cseréljük át az A-ban levő 10-est 9-re! Így is oldjuk meg és hasonlítsuk össze a két eredményt! Mi lehet a különbség oka? (Javaslat: nézzük meg A determinánsát! Miért kapunk mégis megoldást?)

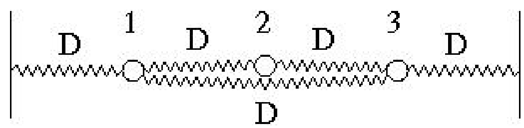
12. Modellezzük egy távcső képének elmosódását a következők szerint! Bontsuk a kép egydimenziós metszetét véges számú (10–20) képpontra! Mindegyik képpontnak a tárgy (égbolt) egy-egy pontja felel meg. Azokból azonban a fénynek csak egy része érkezik a megfelelő képpontba, helyette a szomszédos képpontokból szóródik oda, mégpedig a j-edik pontból a k-adikba a fény $c \cdot \exp(-(k-j)^2/3)$ szerinti hányada kerül.

a) Határozzuk meg a c szorzót a normálásból és írjuk le a kép keletkezését $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$ alakban!

b) Vizsgáljuk meg, hogy hány képpont távolságban levő csillagokat tudunk e távcsővel felbontani!

c) Próbáljuk meg az 1, 2 v. 3 csillagra előállított képből az egyenletrendszer megoldásával visszakapni a kiindulási fényeloszlást! Milyen pontosság várható, ha 3 jegy pontosan tudunk mérni?

13.* Az ábra szerinti rúgós rendszerben a tömegpontok vizszintes asztallapon súrlódásmentesen tudnak mozogni:



Az őket összekötő rugók direkciós ereje $D = 10$. Kezdetben a rúgók megnyújtatlanok. Tekintsük úgy, hogy a rugóerők jó közelítéssel egy egyenesben hatnak, és súrlódás a rugók közt sincs!

a) Határozzuk meg a testek egyensúlyi kitérését, amikor a rájuk ható hosszirányú külső erőkből alkotott vektor $\underline{F} = (1, 6, c)^T$!

14.* Egy körgyűrű alakú csatornában 4 csónak van sorban rúgókkal összekötve. (mint pl. egy vidámparkban) A csatorna olyan keskeny, hogy a csónakok csak körkörös irányban tudnak mozogni és a rúgók is a csatorna kör alakját követik. A rúgók direkciós ereje felváltva $D = 20$, ill. $d = 10$. Mennyit mozdulnak el a csónakok egyensúlyi helyzetükből, ha $F_1 = 5N, F_2 = -4N, F_3 = 5N, F_4 = -6N$ erőkkel hatunk az egyes csónakokra, mindegyikre a kört érintő irányban, és pozitív előjel a pozitív körüljárásnak felel meg? Tegyük fel, hogy a csónakok és a rúgók a csatorna falán súrlódásmentesen tudnak csúszni!

Sajátérték-probléma

15. Határozzuk meg a 13. feladatban szereplő rendszer sajátfrekvenciáit!

16. Alkossunk 6×6 méretű felső háromszögmátrixot (olyan mátrixot, aminek csak a főátlójában és felette vannak 0-tól különböző elemei), és vizsgáljuk meg, milyenek a sajátértékei és a sajátvektorai! Ehhez legyenek a mátrix nemnulla elemei

a) $\underline{A}_{j,k} = j \cdot k$

b) véletlen számok.

17. Az x tengely körüli 60 fokos forgatás után a z tengely körül forgatunk 30 fokkal. A két forgatás együttese milyen tengely körüli milyen szögü forgatással helyettesíthetö?