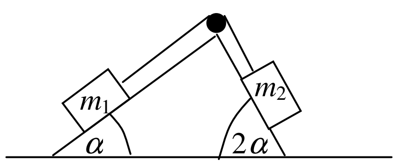
Elméleti mechanika B - 2. pótZH **2010. 12. 22.**

1. Egy a oldalú négyzet négy csúcspontjára m tömegű tömegpontokat teszünk, és a rendszert a csúcsára állítva elengedjük (a mozgás a négyzet síkjában zajlik le). Mekkora sebessége lesz a leérkezés pillanatában a tömegpontoknak?

A leérkezés pillanatában a tömegközéppont függőleges sebessége legyen v. Tömegközépponti koordinátarendszerben a testek a tömegközéppont körül forgó mozgást végeznek. Ennek kerületi sebessége legyen v'. Mivel anak a testnek a sebessége, amelyik végig a földön maradt vízszintes kell, hogy legyen: $v' = \sqrt{2}v$.

Az energiamegmaradást felírva: $v = \sqrt{ga\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$

2. Az ábrán látható rendszer milyen α szögnél lesz egyensúlyban (használd a virtuális munka elvét)? Más szögre mekkora lesz a testek gyorsulása (használd a d'Alembert elvet)?



A gyorsulásokat és a virtuális elmozdulásokat mindkét testnél lefelé vegyük fel:

$$0 = m_1\left(g\sin\alpha - a_1\right)\delta s_1 + m_2\left(g\sin 2\alpha - a_2\right)\delta s_2 =$$
$$= \delta s_1\left(m_1\left(g\sin\alpha - a_1\right) - m_2\left(g\sin 2\alpha + a_1\right)\right)$$

Ebből:

$$a_1 = -a_2 = \frac{m_1\sin\alpha - m_2\sin 2\alpha}{m_1 + m_2}g$$

3. Vegyünk egy gömbfelületen mozgó tömegpontot, amire $F = -Dx$ erő hat (x az egyik derékszögű koordináta, az origó a gömb közepe), viszont gravitáció nincs . Írd fel a rendszer Lagrange-függvényét!

$$L = K - V = \tfrac{1}{2}mR^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) - \tfrac{1}{2}DR^2\cos^2\vartheta$$

4. Számold ki az előző rendszer mozgásegyenleteit mndkét gyakorlaton tanult módszerrel!

A φ ciklikus koordináta, tehát $j = \dot{\varphi}\sin^2\vartheta$ állandó, ebből $\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + \dot{\varphi}\sin 2\vartheta = 0$.
A másik mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\vartheta} = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial L}{\partial\vartheta} = \tfrac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\sin 2\vartheta + D\cos\vartheta\sin\vartheta$$

Az energia:

$$E = K + V = \tfrac{1}{2}mR^2\left(\frac{j^2}{\sin^2\vartheta} + \dot{\vartheta}^2\right) + \tfrac{1}{2}DR^2\cos^2\vartheta$$

Ebből:

$$\tfrac{1}{2}m\left(2\ddot{\vartheta} - \frac{j^2\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right) - D\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$