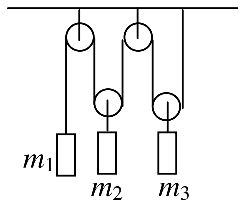
Elméleti mechanika B - 2. pótZH - megoldás

1. Add meg a virtuális munka elvének segítségével, hogy milyen tömegarányok mellett lesz egyensúly.



A virtuális elmozdulások közti kapcsolat:

$$\delta s_1 + 2\delta s_2 + 2\delta s_3 = 0$$

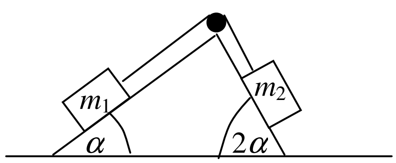
A virtuális munka elve:

$$0 = m_1 g \delta s_1 + m_2 g \delta s_2 + m_3 g \delta s_3 = g\left(\delta s_2 \left(m_2 - 2m_1\right) + \delta s_3 \left(m_3 - 2m_1\right)\right)$$

Vagyis:

$$m_2 = m_3 = 2m_1$$

2. Az ábrán látható rendszerben mekkora lesz a testek gyorsulása (használd a d'Alembert elvet)?



A gyorsulásokat és a virtuális elmozdulásokat mindkét testnél lefelé vegyük fel:

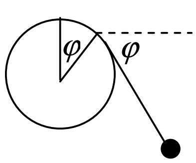
$$0 = m_1\left(g\sin\alpha - a_1\right)\delta s_1 + m_2\left(g\sin 2\alpha - a_2\right)\delta s_2 =$$

$$= \delta s_1\left(m_1\left(g\sin\alpha - a_1\right) - m_2\left(g\sin 2\alpha + a_1\right)\right)$$

Ebből:

$$a_1 = -a_2 = \frac{m_1\sin\alpha - m_2\sin 2\alpha}{m_1 + m_2} g$$

3. Készítsünk ingát úgy, hogy egy m tömegű testet rákötünk egy l hosszúságú tömegtelen és nyújthatatlan fonálra. Majd a fonál végét rögzítsük egy R sugarú függőleges síkban rögzítetten álló korong tetején. Írd fel a rendszer Lagrange-függvényét!



Az ábrán látható két szög egyenlő, hiszen merőleges szárú szögek.
A Lagrange-függvény pedig:

$$L = \tfrac{1}{2} m\dot{\varphi}^2 \left(l - R\varphi\right)^2 + mg\left(\left(l - R\varphi\right)\sin\varphi - R\cos\varphi\right)$$

4. Vegyünk egy tömegpontot, ami egy fekvő hengerfelületen mozoghat, és csak a nehézségi erő hat rá. Írd fel a Lagrange-függvényt, és a mozgásegyenleteket.

Legyen a henger sugara r, és válasszuk általános koordinátáknak a hengeren a hosszirányú z koordinátát és a φ szöget (gyakorlatilag egy hengerkoordináta-rendszer), aminek nullhelye legyen fölül. Ekkor a Lagrange-függvény:

$$L = \tfrac{1}{2} m\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cos\varphi$$

A z-re vonatkozó mozgásegyenlet (ciklikus koordináta):

$$0 = \tfrac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}$$

És a φ-re vonatkozó:

$$g\sin\varphi = \frac{1}{mr}\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{1}{mr}\tfrac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r\ddot{\varphi}$$

5. A gyakorlaton kiszámoltuk, hogy a kettős inga Lagrange-függvénye:

$$L = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) +$$
$$+\left(m_1 + m_2\right) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Számold ki a rendszer energiáját úgy, hogy más információt nem használsz ezen kívül!

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\dot{\varphi}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\dot{\varphi}_2 - L = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 +$$
$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \left(m_1 + m_2\right) g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$