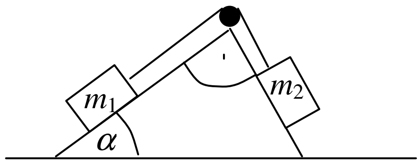
Elméleti mechanika B - 2. pótZH - megoldás

1. Az ábrán látható rendszer milyen α szögnél lesz egyensúlyban (használd a virtuális munka elvét)? Más szögre mekkora lesz a testek gyorsulása (használd a d'Alembert elvet)?



Vegyük fel a két virtuális elmozdulást úgy, hogy mindkettő jobbra mutasson, ekkor $\delta s_1 = \delta s_2$. A virtuális munka elve szerint:

$$\delta s_1 \left(m_2 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha \right) = 0 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{m_2}{m_1}$$

A d' Alembert elv szerint, felhasználva, hogy a gyorsulások is egyenlőek:

$\delta s_1 \left(m_2 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha - m_1 a - m_2 a \right) = 0$.

Ebből:

$$a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} g$$

2. Vegyünk egy forgásfelületet, amelyet a $y(x) = \sqrt{ax}$ függvény megforgatásával kapunk. Mozogjon ezen a felületen egy *m* tömegű tömegpont. Számold ki a Lagrange-függvényt, és vezesd le a mozgásegyenleteket mindkét gyakorlaton vett módszerrel!

$$L = K - V = \tfrac{1}{2} m r^2 \dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2} m \dot r^2 \left(1 + \frac{a}{4r} \right) - mg\sqrt{ar}$$

$$E = K + V = \tfrac{1}{2} m r^2 \dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2} m \dot r^2 \left(1 + \frac{a}{4r} \right) + mg\sqrt{ar}$$

A φ koordináta ciklikus, tehát $\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m r^2 \dot\varphi$ megmarad, ebből:

$$\ddot\varphi = -\frac{2\dot r \dot\varphi}{r}$$

A másik mozgásegyenlet:

$$\ddot r \left(1 + \frac{a}{4r} \right) - \frac{a\dot r^2}{8r^2} = \frac{1}{m} \tfrac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot r} + \frac{a\dot r^2}{8r^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{a\dot r^2}{8r^2} = m r \dot\varphi^2 - \tfrac{1}{2} g \sqrt{\frac{a}{r}}$$

3. A gyakorlaton szerepelt, hogy a csillapított harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye $L = \tfrac{1}{2} e^{-kt} \left(\dot x^2 + k x \dot x - \left(\tfrac{1}{2} k^2 + \omega^2 \right) x^2 \right)$. Számold ki a rendszer energiáját!

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot x} \dot x - L = \tfrac{1}{2} e^{-kt} \left(\dot x^2 + \left(\tfrac{1}{2} k^2 + \omega^2 \right) x^2 \right)$$