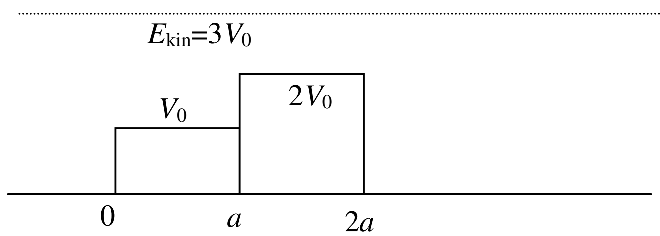
Elméleti mechanika B - 1. pótZH **2010. 12. 22.**

1. Egy v_0 sebességgel haladó részecske átmegy az alábbi potenciálfalon. Mekkora időkésést szenved ennek következtében?



Az időtartam, ami alatt áthaladna a területen, ha nem volna potenciálfal: $t_1 = \dfrac{2a}{v_0}$

Az első szakaszon: $\frac{1}{2}mv_1^2 = E_{\text{kin}1} = \frac{1}{3}mv_0^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}v_0$

A második szakaszon: $\frac{1}{2}mv_2^2 = E_{\text{kin}2} = \frac{1}{6}mv_0^2 \Rightarrow v_2 = \dfrac{v_0}{\sqrt{3}}$

Ebből az idő: $t_2 = \dfrac{a}{v_1} + \dfrac{a}{v_2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2v_0}\left(\sqrt{2}+2\right)$

Az időkésés: $\Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{a}{2v_0}\left(\sqrt{6}+2\sqrt{3}-4\right)$

2. Vízszintesen fekvő síklemez egy rajta nyugvó testtel együtt harmonikus rezgést végez a lemez síkjában. A rezgés amplitúdója A. Mekkora a lemez és a test közti súrlódási együttható, ha a test akkor kezd el csúszni a lemezen, amikor a rezgésidő kisebb lesz, mint T?

$$\mu mg = F_s = F_{\max} = ma_{\max} = \frac{4\pi^2 mA}{T^2}$$

Ebből: $\mu = \dfrac{4\pi^2 A}{gT^2}$

3. Vegyünk egy kettőscsillagot, amely mozgása során a két égitest távolsága állandó.

- Milyen pályán mozognak?
- Mekkora a keringés periódusideje?

Írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$m_1 \ddot{\underline{x}}_1 = \frac{m_1 m_2 G}{\left|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right|^3}\left(\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right)$$

$$m_1 \ddot{\underline{x}}_2 = -\frac{m_1 m_2 G}{\left|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right|^3}\left(\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right)$$

A két egyenletet összeadva, arra az eredményre jutunk, hogy a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból ($r = \left|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right|$), ekkor azt kapjuk, hogy $\ddot{r} = \frac{m_2 G}{r^2} - \frac{m_1 G}{r^2} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)G}{r^2}$. (A redukált tömeg használatával ugyanerre az egyenletre juthatunk.) Tehát a két csillag ellipszispályán kering egymás körül. Mivel a távolságuk állandó, a pálya kör lesz (legyen a sugara *R*).
Ekkor a centripetális gyorsulás képletéből:

$$\frac{1}{2\pi T} = \omega = \sqrt{\frac{\left(m_1 + m_2\right)G}{R^3}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\left(m_1 + m_2\right)G}}$$

4. Vegyünk egy szimmetrikus trapézt, melynek alapjai *a* és 2*a* hosszúságúak. Tegyünk négy tömegpontot a négy csúcspontjába. Határozd meg a pontrendszer tömegközéppontjának helyzetét tetszőlegesen választott koordinátarendszerben.

Tegyük az origót a nagyobbik alap közepére, és nézzen a trapéz pozitív irányba. Ekkor:

$$\underline{r}_{\text{tkp}} = a\frac{\begin{pmatrix} 2\left(m_4 - m_1\right) + m_3 - m_2 \\ \sqrt{3}\left(m_3 + m_2\right) \end{pmatrix}}{2\left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)}$$