Elméleti mechanika B - 1. pótZH - megoldás

1. Vegyünk egy egyenlő oldalú (l oldalhosszú) háromszöget, melynek csúcsaira m tömegű tömegpontokat teszünk, és ideális tömegtelen rudakkal összekötjük őket. Állítsuk az egyik csúcsára, a labilis egyensúlyi helyzetbe, és engedjük el. Mekkora lesz a sebességük, amikor földet érnek (a mozgás végig a háromszög síkjában történik)?

A mozgást bontsuk fel két részre, egyrészt az alsó tömegpont (továbbiakban 1. tömegpont) körüli forgásra (a másik két tömegpont kerületi sebessége v_2 az őket az 1.-el összekötő rúdra merőlegesen), és egyenletes mozgásra (v_1 sebességgel vízszintesen), amik között kapcsolatot az teremt, hogy a vízszintes irányú impulzus megmaradása miatt a tömegpontok vízszintes sebességeinek összege 0, vagyis:

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} v_2$$

A sebességek nagysága az energiamegmaradásból adódik:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} mgl = \tfrac{1}{2} m \left(2v_1^2 + \tfrac{5}{4} v_2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - v_1 \right)^2 \right) = 15 m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3} gl}{30}}$$

2. Egy v_0 sebességű m tömegű részecske halad át az alábbi potenciálgát fölött:

$$V(x) = \begin{cases} 0 \le x < a : \dfrac{m v_0^2}{8a} x + \tfrac{1}{8} m v_0^2 \\ a \le x < 2a : \dfrac{m v_0^2}{8a} x - \tfrac{1}{8} m v_0^2 \\ x < 0 \vee x \ge 2a : 0 \end{cases}$$

Mekkora időkésést szenved a részecske a potenciálgát miatt?

Az eredmény ugyanaz marad, ha a fenti potenciál két felét megcseréljük, így a következő függvényt kapjuk 0 és $2a$ között: $V(x) = \frac{m v_0^2}{8a} x$. Az az idő ami alatt a potenciálgát nélkül haladna át a területen: $t_1 = \frac{2a}{v_0}$. Ugyanez a potenciálgáttal:

$$t_2 = \frac{2\sqrt{a}}{v_0} \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{4a - x}} = \frac{\sqrt{a}}{v_0} \left[\sqrt{4a - x} \right]_{2a}^{0} = \frac{a}{v_0} \left(2 - \sqrt{2} \right)$$

Ebből:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{\sqrt{2} a}{v_0}$$

3. Vízszintesen fekvő síklemez egy rajta nyugvó testtel együtt harmonikus rezgést végez a lemez síkjában. A rezgés amplitúdója *A*. Mekkora a lemez és a test közti súrlódási együttható, ha a test akkor kezd el csúszni a lemezen, amikor a rezgésidő kisebb lesz, mint *T*?

$$\frac{4\pi^2 mA}{T^2} = mA\omega^2 = ma_{\max} = F_{\mathrm{s}} = mg\mu$$

Tehát:

$$\mu = \frac{4\pi^2 A}{gT^2}$$

4. Mozogjon egy *m* tömegű tömegpont $V(r) = \frac{1}{2}Dr^2$ harmonikus potenciálban. A végtelenben vett sebessége v_0, és az impakt paraméter *b*. Milyen távolságra közelíti meg a vonzócentrumot, és mekkora lesz itt a sebessége?

Írjuk fel az impulzusmomentum- és energiamegmaradást:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dr_{\min}^2$$
$$v_0 b = v r_{\min}$$

Ebből:

$$v^4 - v^2 v_0^2 + \frac{Dv_0^2 b^2}{m} = 0$$

Ennek megoldása:

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + v_0\sqrt{v_0^2 - \frac{4Db^2}{m}}}}{\sqrt{2}}$$

Ebből

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{2}v_0 b}{\sqrt{v_0^2 + v_0\sqrt{v_0^2 - \frac{4Db^2}{m}}}}$$

5. Vegyünk egy egyenlő szárú háromszöget, melynek rövidebb oldalai *a* hosszúságúak, a köztük lévő szög nagysága pedig 120°. Helyezzünk a csúcsaiba három tömegpontot. Határozd meg a tömegközéppont helyzetét szabadon választott koordinátarendszerben!

Legyen az origó az alap közepén, ekkor:

$$\underline{r}_{\mathrm{tkp}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{a}{2(m_1 + m_2 + m_3)}\begin{pmatrix} \sqrt{3}(m_3 - m_1) \\ m_2 \end{pmatrix}$$