

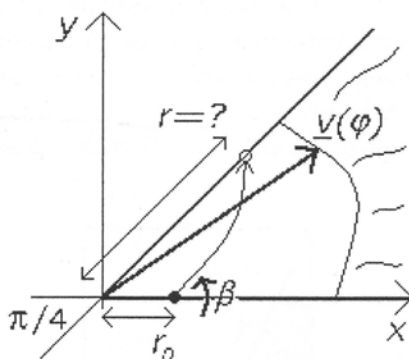
Elméleti mechanika B

1. zárthelyi dolgozat, csütörtök, 2011. november 10.

1. Az ábrán látható, forrást imitáló, $\pi/4$ nyílásszögű folyó sebességének tangenciális komponense nincs, radiális sebességét pedig az alábbi függvény adja meg a φ polárszög függvényében:

$$v_r(\varphi) = v_0 \left(1 - \frac{(\varphi - \pi/8)^2}{(\pi/8)^2} \right) \quad \forall \varphi \in [0, \pi/4].$$

A $t = 0$ időpillanatban az $x = r_0$, $y = 0$ pontból (tömör karika) kezdősebesség nélkül elindítunk egy vízen úszó szondát, amelynek radiális irányban nincs meghajtása, a szöggyorsulását¹ pedig egy állandó, β értéken tartjuk. Az origótól milyen távol (azaz milyen r koordinátánál) csapódik a szonda a túlpártba (üres karika)?



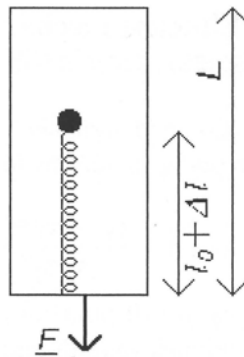
2. Egy m_2 tömegű, L magasságú liftben a padlóhoz rögzítünk egy elhanyagolható tömegű, k direkciós erejű rugót, amihez aztán egy m_1 tömegű, elhanyagolható méretű golyót rögzítünk az ábra szerint. A liftet lefelé F erővel gyorsítjuk (felfelé nem húzza semmi!). A transziens jelenségek lecsengése után, amikor a golyó a lifthez képest már nyugalomba került, az eredetileg l_0 hosszúságú rugó Δl megnyúlása állandó. A súrlódás minden típusa mindvégig elhanyagolható.

- Mekkora a lift függőleges gyorsulása a földhöz képest? (Nem tételezzük fel, hogy $m_2 \gg m_1$.)
- Mekkora a rugó Δl előjeles megnyúlása? (A pozitív előjel a megnyúláshoz, a negatív az összenyomódáshoz tartozik.) Az eredmény kiszámításához írjuk fel a golyó mozgásegyenletét a lifthez rögzített koordináta-rendszerben!

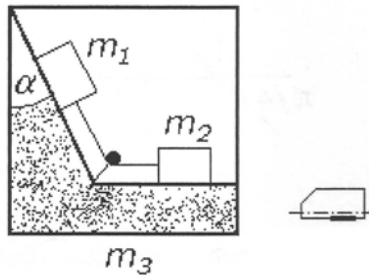
Egyszer csak a rugót eltávolítjuk.

- Mekkora lesz ezután a lift gyorsulása a földhöz képest? Mekkora lesz a golyó gyorsulása a földhöz, ill. a lifthez képest?
- Mennyi idő múlva éri el a golyó a lift belső burkolatát?

¹A szöggyorsulás a $\varphi(t)$ függvény második időderiváltja, teljesen analóg a „hagyományos” gyorsulással, csak nem (távolságdimenziójú) pozícióra, hanem (dimenziótlan) szögre vonatkozik.



3. Az ábrán látható, m_3 tömegű borg kockaúrhajó minden gravitációs vonzócentrumtól kellően távol lebeg. Benne az m_1 , ill. az m_2 tömegű testeket egy nyújthatatlan és összenyomhatatlan kötélt köti össze, és a testek kizárólag a felületekkel párhuzamosan, de súrlódás nélkül tudnak elmozdulni. Ha az m_1 tömegű test a csigához s távolsággal közelebb kerül, mennyit mozdul el a kocka a képen látható úrkomp hossz tengelyére merőlegesen? (Feltételezzük, hogy a kocka nem forog el a folyamat során, hanem csak tisztán transzlálódik.)



4. Rajzoljuk föl a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(x+a)^2 & , \text{ ha } x < 0, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ ha } x \geq 0, \end{cases}$$

ahol $a, k > 0$. Adjuk meg a mozgás megengedett tartományát a mechanikai energia függvényében, ha $E > \frac{1}{2}ka^2$! (A megfelelő egyenlőtlenség, vagy az egyik határpontra vonatkozó egyenlőség felírása után részletes számítások nélkül megadhatjátok a keresett intervallumot.) Rajzoljuk föl a megfelelő fázistérbeli trajektóriát is! Amire ez utóbbival kapcsolatban kíváncsi vagyok:

- Milyen geometriai alakzatok alkotják?
- Hol metszi az "x" tengelyt?
- Mekkora \dot{x} értékeket vesz fel az $x = -a$, az $x = 0$ és az $x = a$ pontokban?

Jó munkát!