

Elméleti mechanika B
1. gyakorló feladatsor

1.gy./1. Egy $2l$ szélességű folyó sebességkomponensei a következők:

$$v_x = v_0 \left(\frac{y}{l} + 1 \right) \left(1 - \frac{y^2}{l^2} \right),$$

$$v_y = 0,$$

$$\forall x \in (-\infty, \infty), y \in [-l, l].$$

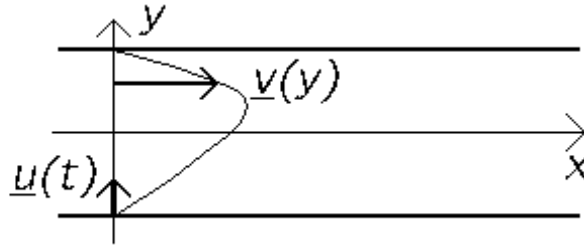
A $t = 0$ időpillanatban az $x = 0, y = -l$ pontból elindítunk egy vízen úszó szondát. A szonda sebességét a következő függvények adják meg:

$$u_x = 0,$$

$$u_y = \frac{1}{2}bt^2,$$

$$\forall t \geq 0.$$

Milyen x koordinátánál fog a szonda a túlpártba csapódni?



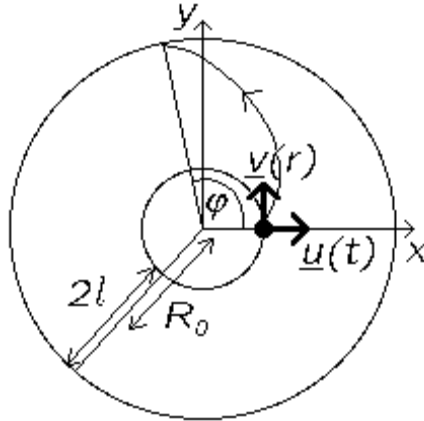
1.gy./2. Az ábrán látható, „körbefolyó” folyó sebességének radiális komponense nincs, szögsebességét pedig az alábbi függvény adja meg:

$$\omega(r) = \omega_0 \left(1 - \frac{(r - R_0)^2}{l^2} \right) \quad \forall r \in [R_0 - l, R_0 + l].$$

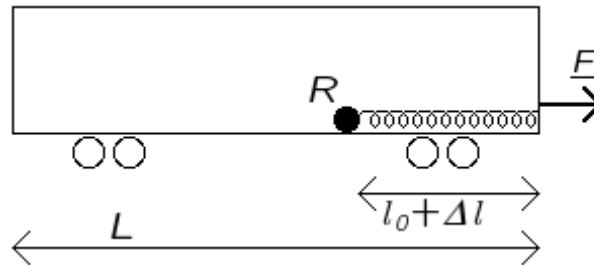
A $t = 0$ időpillanatban az $x = R_0 - l, y = 0$ pontból elindítunk egy vízen úszó szondát, melynek radiális pozícióját a következő függvény írja le:

$$r(t) = R_0 - l + \frac{1}{24}ct^4 \quad \forall t \geq 0.$$

Mekkora φ forgásszöggel sodródik el a szonda, mire megérkezik a külső partra?



- 1.gy./3. Egy m_2 tömegű, L hosszúságú vasúti kocsiiban a padlóra helyezünk egy m_1 tömegű, R sugarú golyót, és egy elhanyagolható tömegű rugóval a kocsi homlokfalához rögzítjük az ábra szerint. A kocsit a mozdony F erővel gyorsítja. A tranziens jelenségek lecsengése után, amikor a golyó a kocsihoz képest már nyugalomba került, az eredetileg l_0 hosszúságú rugó Δl megnyúlása állandó. A súrlódás minden típusa mindvégig elhanyagolható.



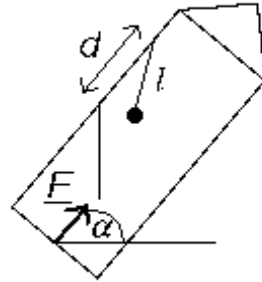
- Mekkora a kocsi gyorsulása a földhöz képest? (Nem tételezzük fel, hogy $m_2 \gg m_1$.)
- Mekkora a rugó Δl megnyúlása? Az eredmény kiszámításához dolgozzunk a kocsihoz rögzített koordináta-rendszerben!

Egyszer csak a golyó és a rugó közötti kapcsolat elenged.

- Mekkora lesz ezután a kocsi gyorsulása a földhöz képest? Mekkora lesz a golyó gyorsulása a földhöz, ill. a vasúti kocsihoz képest?
- Mennyi idő alatt éri el a golyó a hátfalat?

- 1.gy./4. Az ábrán látható, m_2 tömegű rakétára a gravitáción kívül F nagyságú, a vízszintessel α szöget bezáró tolóerő hat, mely pontosan „előre” tolja a rakétát, és a feladat során soha nem forgatja el azt. A „plafon” egyik csatlakozási pontjából éppen függőlegesen lefele egy lemez indul ki. Az ettől d távolságra lévő másik csatlakozási ponthoz egy

elhanyagolható tömegű, l hosszúságú kötelet rögzítünk, aminek a végére egy m_1 tömegű, pontszerűnek tekinthető golyót helyezünk, és megvárjuk a tranziens jelenségek lecsengését.

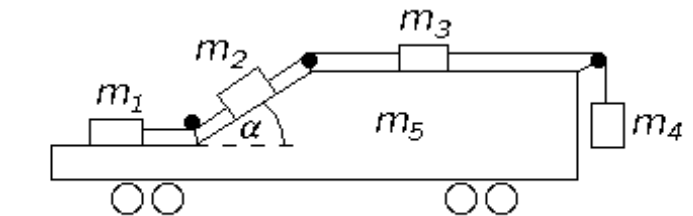


- Mekkora a rakéta gyorsulásának vízszintes, ill. függőleges komponense a földhöz képest? (Nem tételezzük fel, hogy $m_2 \gg m_1$.)
- Milyen szöget zár be a köté a függőleges iránnyal? Az eredmény kiszámításához dolgozzunk a rakétához rögzített koordináta-rendszerben!

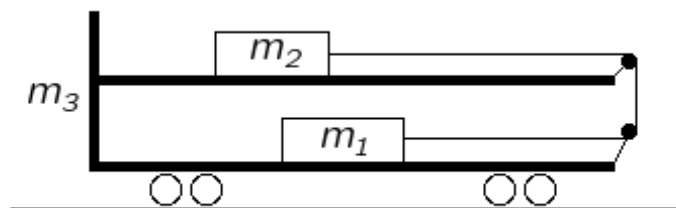
Egyszer csak elvágjuk a kötelet.

- Mekkora lesz ezután a rakéta gyorsulása a földhöz képest? Mekkora lesz a golyó gyorsulása a földhöz, ill. a rakétához képest? Minden esetben adjuk meg a vízszintes és a függőleges komponens is!
- Milyen messze fogja eltalálni a golyó a lemezt annak csatlakozási pontjától mérve? (Feltételezzük, hogy a lemez kellően hosszú.)

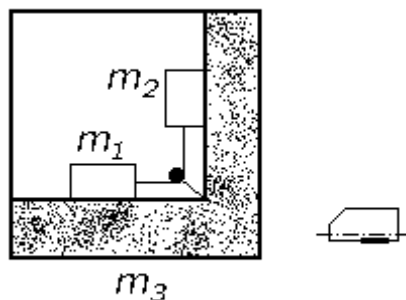
1.gy./5. Mennyit mozdul el az ábrán látható, m_5 tömegű kocs, miközben az m_4 tömegű testnek a földtől mért távolsága h -val csökken? (A súrlódás elhanyagolható, a testek nem érik el a csigákat.)



- 1.gy./6. Mekkora-nak válasszuk az m_2 tömeget, ha az m_1 tömeget és a kocsit m_3 tömegét ismerjük, és azt szeretnénk, hogy a kocsi Δx_3 elmozdulásának és az m_1 tömegű test *kocsához viszonyított* $\Delta x_1^{(s)}$ elmozdulásának az aránya egy adott q érték legyen? Mit mondhatunk a $q = 0$ esetről? (A súrlódás elhanyagolható, a testek nem érik el a csigákat.)



- 1.gy./7. Az ábrán látható, m_3 tömegű, kocka alakú úrhajó (egy borg kocka) minden gravitációs vonzócentrumtól kellően távol lebeg. Benne az m_1 , ill. az m_2 tömegű testeket egy nyújthatatlan kötélt köti össze, és a testek kizárólag a felületekkel párhuzamosan, de súrlódás nélkül tudnak elmozdulni. Ha az m_2 tömegű test a *csigától* s távolsággal távolabb kerül, mekkora szöget fog bezárni az egész kocka elmozdulása a képen látható űrkomp hossz tengelyével?



1.gy./8. Rajzoljuk föl a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(x+a)^2 & , \text{ ha } x < -a, \\ V_0 \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & , \text{ ha } |x| \leq a, \\ \frac{1}{2}k(x-a)^2 & , \text{ ha } x > a, \end{cases}$$

ahol $a, k, V_0 > 0$. Adjuk meg a mozgás periódusidejét a mechanikai energia függvényében, ha

a) $0 < E < V_0$, ill. ha

b) $E > V_0$!

Rajzoljuk föl a megfelelő fázistérbeli trajektóriákat is!

1.gy./9. Egy α hajlásszögű (nem mozgó) lejtőn súrlódás nélkül csúszik le egy m tömegű test. Írjuk fel a Lagrange-függvényt, és származtassuk belőle az Euler-Lagrange-egyenletet! (Miért lesz csak 1 ilyen egyenlet, ha egyszer 2 dimenzióban dolgozunk?)

