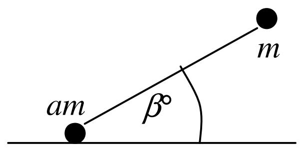
Elméleti mechanika B - 2. ZH – megoldás **2010. 12. 15.**

1. Két tömegpontot kössünk össze egy L hosszúságú tömegtelen rúddal, és engedjük el az ábrán látható helyzetből. Hol fog földet érni a jobboldali tömegpont?



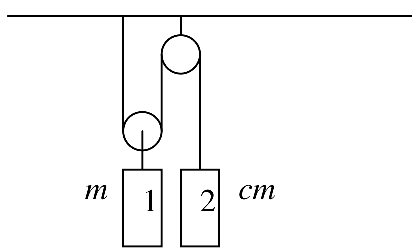
Az esés során a tömegközéppont x koordinátája változatlan, ha az origó a baloldali test kezdeti helyzeténél található, akkor ez:

$$x_{\text{tkp}} = \frac{mL\cos\beta}{m(a+1)}$$

Ebből a jobboldali test földetérésének helye:

$$x = L\frac{a+\cos\beta}{a+1}$$

2. Állapítsd meg a d'Alembert-elv segítségével, hogy az alábbi ábrán látható csigás rendszerben mennyi a két súly gyorsulása (a csigák tömegtelennek tekinthetők, a kötél ideális).



Mivel a kötél nyújthatatlan, $a_2=-2a_1$ és $\delta s_2= -2\delta s_1$ (mindegyik mutasson lefele). Ezek után írjuk föl a d'Alembert-elvet:

$$0 = m(g-a_1)\delta s_1 + cm(g-a_2)\delta s_2 = m\delta s_1\left(g-a_1-2c(g+2a_1)\right)$$

Ebből:

$$a_1 = -\frac{2c-1}{4c+1}g \quad a_2 = \frac{4c-2}{4c+1}g$$

3. Vegyünk egy olyan forgásfelületet, amit a $f(x)=\pm ax^d$ függvény megforgatásával kapunk. Ennek a belső felületén mozogjon egy m tömegű tömegpont. Írd fel a rendszer Lagrange-függvényét.

$$L = \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2\left(1+d^2a^2r^{2d-2}\right) \mp magr^d$$

4. Vezesd le az előző feladatban ismertetett rendszer mozgásegyenleteit mindkét a gyakorlaton tanult módon.

A φ ciklikus koordináta, tehát a hozzá tartozó általános impulzus állandó:

$$j = r^2\dot{\varphi} = \text{konst} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{\varphi}\dot{r}}{r}$$

Az energia:

$$E = \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2\left(1 + d^2a^2r^{2d-2}\right) \pm magr^d = \tfrac{1}{2}m\frac{j^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2\left(1 + d^2a^2r^{2d-2}\right) \pm magr^d$$

Ebből:

$$\frac{j^2}{r^3} = \ddot{r}\left(1 + d^2a^2r^{2d-2}\right) + a\left|d\right|gr^{d-1} + \dot{r}^2\left(d-1\right)d^2a^2r^{2d-3}$$

Még egy deriválással j is eltüntethető.

A φ-re vonatkozó Euler-Lagrange egyenlet a fentivel egyezik meg, az r-re vonatkozó pedig:

$$r\dot{\varphi}^2 - a\left|d\right|gr^{d-1} - \dot{r}^2\left(d-1\right)d^2a^2r^{2d-3} = \ddot{r}\left(1 + d^2a^2r^{2d-2}\right)$$