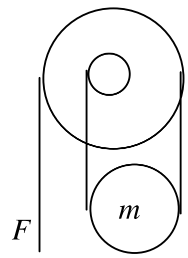
Elméleti mechanika B - 2. ZH - megoldás

1. Az ábrán látható hengerkeréken (a nagyobb henger sugara R, a kisebbé r) m tömegű súly függ. Mekkora F erővel lehet az egyensúlyt fenntartani? A virtuális munka elvét használd!



A virtuális munka elve:

$$FR\delta\varphi = F\delta s_1 = mg\delta s_2 = \tfrac{1}{2}mg\left(R-r\right)\delta\varphi$$

Ebből:

A:

$$F = \frac{mg\left(R-r\right)}{2R}$$

B:

$$\frac{M}{m} = \frac{R-r}{2R}$$

C:

$$\Delta r = \frac{mg\left(R-r\right)}{2RD}$$

2. Írd fel az előző feladat rendszerének mozgásegyenletét. A d'Alambert elvet használd!

A:

$$FR = \tfrac{1}{2}m\left(R-r\right)\left(g-a\right) \Rightarrow a = \frac{m\left(R-r\right)g - 2FR}{m\left(R-r\right)}$$

B:

$$MR\left(g-a_1\right) = \tfrac{1}{2}m\left(R-r\right)\left(g-a_2\right)$$

A gyorsulások közti összefüggés:

$$a_1 = \frac{R-r}{2R}a_2$$

Ebből:

$$2MRg - M\left(R-r\right)a_2 = m\left(R-r\right)\left(g-a_2\right)$$

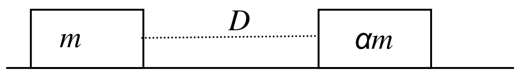
Vagyis:

$$a_2 = \frac{\left(M-m\right)\left(R-r\right)}{2MR}g$$

C:

$$a=\frac{m\left(R-r\right)g-2DR\Delta r}{m\left(R-r\right)}$$

3. Egy sík felületre ráteszünk két tömegpontot, melyek közül az egyik tömege négyszerese a másikénak, és összekötjük őket egy D rugóállandójú rugóval. Add meg a rendszer Lagrangre-függvényét, és vezesd le a mozgásegyenleteket a megmaradó mennyiségek módszerével!



Legyen X a tömegközépponti koordináta, és Y=x_1-x_2. Ekkor a Lagrange-függvény:

$$L=\frac{1+\alpha}{2}m\dot{X}^2+\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}m\dot{Y}^2-\tfrac{1}{2}DY^2$$

X ciklukus koordináta, tehát $P=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{X}}=\left(1+\alpha\right)m\dot{X}$ állandó (a mozgásegyenlet $\ddot{X}=0$).

Az energia is állandó:

$$E=\frac{1+\alpha}{2}m\dot{X}^2+\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}m\dot{Y}^2+\tfrac{1}{2}DY^2$$

Képezzük az alábbi állandót:

$$2E-\frac{P}{\left(1+\alpha\right)m}=\frac{\alpha}{(1+\alpha)}m\dot{Y}^2+DY^2$$

Ebből:

$$\ddot{Y}+\frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{D}{m}Y=0$$

α értéke: A: 4 , B: 2, C: 3

4. Összetett rendszerek

A: rugón inga

$$L=\tfrac{1}{2}m_1\dot{z}^2+\tfrac{1}{2}m_2\left(\dot{z}^2+L^2\dot{\varphi}^2+2L\dot{z}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)-m_1gz-m_2g\left(z-L\cos\varphi\right)-\tfrac{1}{2}Dz^2$$

$$L_{\mathrm{kh}}=\tfrac{1}{2}m_2\dot{z}^2+m_2L\dot{z}\dot{\varphi}\sin\varphi-m_2gz$$

B: ingán rugó

$$L=\tfrac{1}{2}m_1L^2\dot{\varphi}^2+\tfrac{1}{2}m_2\left(\dot{z}^2+L^2\dot{\varphi}^2+2L\dot{z}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)+m_1gL\cos\varphi-m_2g\left(z-L\cos\varphi\right)-\tfrac{1}{2}Dz^2$$

$$L_{\mathrm{kh}}=\tfrac{1}{2}m_2L^2\dot{\varphi}^2+m_2L\dot{z}\dot{\varphi}\sin\varphi-m_2gL\cos\varphi$$

C: 2 rugó egymáson

$$L=\tfrac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2+\tfrac{1}{2}m_2\left(\dot{z}_1^2+\dot{z}_2^2+2\dot{z}_1\dot{z}_2\right)-m_1gz_1-m_2g\left(z_1+z_2\right)-\tfrac{1}{2}D_1z_1^2-\tfrac{1}{2}D_2z_2^2$$

$$L_{\mathrm{kh}}=\tfrac{1}{2}m_2\dot{z}^2+m_2\dot{z}_1\dot{z}_2-m_2gz_1$$

5. Vegyünk egy $y = f(x)$ egyenletű függvényt, és forgassuk meg az y tengely körül. Mozogjon egy tömegpont az így kapott forgásfelületen. Írd fel a rendszer Lagrange-függvényét, és a mozgásegyenleteket.

   Segítség: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$$L = \tfrac{1}{2}m\left(x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2\left(1+f'(x)^2\right)\right) - mgf(x)$$

$$0 = \tfrac{d}{dt}\left(mx^2\dot{\varphi}\right) \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{x}\dot{\varphi}}{x}$$

$$\ddot{x}\left(1+f'(x)^2\right) + 2\dot{x}^2 f'(x)f''(x) = x\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 f'(x)f''(x) - mgf'(x)$$

A: $f(x) = a\,\mathrm{sh}(\alpha x)$**, B:** $f(x) = \sqrt{ax}$ **, C:** $f(x) = a\ln(\alpha x)$