Elméleti mechanika B - 2. ZH, 2. csoport megoldás

1. A gyakorlaton kiszámoltuk, hogy a kettős inga Lagrange-függvénye:
   $$L = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) +$$
   $$+\left(m_1 + m_2\right) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$
   Számold ki a rendszer energiáját úgy, hogy más információt nem használsz ezen kívül!

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$E = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \dot{\varphi}_i - L = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) -$$
$$-\left(m_1 + m_2\right) g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

2. Vegyünk egy olyan l hosszúságú és m tömegű matematikai ingát, melynek felfüggesztési pontja vízszintesen mozoghat, az inga lengési síkjára merőlegesen. Határozd meg a megmaradó mennyiségeket, és írd fel a mozgásegyenleteket ezek segítségével!

$$L = K - V = \tfrac{1}{2} m\left(l^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2\right) + mgl\cos\varphi$$

Az x koordináta ciklikus, tehát $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ állandó, tehát $\ddot{x} = 0$.

$E = K + V = \tfrac{1}{2} m\left(l^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2\right) - mgl\cos\varphi$ állandó.

$$E - \frac{p}{2m} = \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi \Rightarrow l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

3. Vegyünk egy tömegpontot, amely R sugarú gömbfelületen tud mozogni, és helyezzük a rendszert z irányú harmonikus potenciálba. Írd fel a Lagrange-függvényt és a mozgásegyenleteket!

$$L = K - V = \tfrac{1}{2} m R^2 \left(\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + \ddot{\vartheta}\right) - \tfrac{1}{2} D R^2 \left(\cos\vartheta - 1\right)^2$$

A φ ciklikus koordináta, tehát $mR^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta$ állandó, ebből $\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + \dot{\varphi}\sin 2\vartheta = 0$.

A másik mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\vartheta} = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \tfrac{1}{2} m\dot{\varphi}^2 \sin 2\vartheta + D\left(\cos\vartheta - 1\right)\sin\vartheta$$