Elméleti mechanika B - 1. ZH - A csoport - Megoldás

1. Egy E energiájú részecske mozog az alábbi potenciálban:
$$V(x) = A\sqrt[3]{x}$$
Mekkora a mozgás periódusideje?

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{6a^2x^2 - 8abx + 16b^2}{15a^3}\sqrt{ax+b}$$

Először határozzuk meg a fordulópontok helyzetét: $E = A\sqrt[3]{a} \Rightarrow a_{1,2} = \pm\frac{E^3}{A^3}$.

Ekkor a tanult képletet alkalmazva:

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^{\frac{E^3}{A^3}} \frac{dx}{\sqrt{E - A\sqrt[3]{x}}} = 6\sqrt{\frac{2m}{A}}\int_0^{\frac{E}{A}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{\frac{E}{A} - y}} = \tfrac{4}{5}\sqrt{\frac{2m}{A}}\left[-\left(3y^2 + 4y\frac{E}{A} + 8\frac{E^2}{A^2}\right)\sqrt{\frac{E}{A} - y}\right]_0^{\frac{E}{A}} =$$

$$= \frac{32E^2\sqrt{2mE}}{5A^3}$$

2. Vízszintes síkon nyugvó $2m$ tömegű testre D rugóállandójú rugó tetején nyugvó $3m$ tömegű testet erősítünk. A rugót összenyomjuk, aztán elengedjük. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor az alsó test fölugrik a talajról?

$$\Delta x = \frac{g}{\omega^2} = \frac{5mg}{D}$$

3. Egy űrhajó r_0 sugarú körpályán kering a Föld körül. Hajtóművét egy pillanatra bekapcsolva sebességét 1,25-szörösére növeli. Az új pályán maximum milyen messze kerül a Föld középpontjától?

Legyen M a Föld tömege, ekkor a centripetális erő képletéből az űrhajó gyorsítás előtti sebességére $v_0 = \sqrt{\frac{MG}{r_0}}$ adódik.

Írjuk fel az impulzusmomentum megmaradást (r_1 a keresett távolság, v_1 az űrhajó sebessége ekkor, és α=1,25):

$$m\alpha v_0 r_0 = m v_1 r_1 \Rightarrow v_1 = \frac{\alpha v_0 r_0}{r_1} = \frac{\alpha\sqrt{MGr_0}}{r_1}$$

Végül írjuk fel az energiamegmaradást:

$$\tfrac{1}{2}m\alpha^2 v_0^2 + \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}m v_1^2 + \frac{GMm}{r_1}$$

Mindent beírva a következő másodfokú egyenletre jutunk:

$$r_1^2 - \frac{2r_0}{\alpha^2+2}r_1 - \frac{\alpha^2 r_0^2}{\alpha^2+2} = 0$$

Végül azt kapjuk, hogy $r_1 = \frac{4r_0}{57}\left(4+\sqrt{41}\right)$.

4. Helyezzünk három tömegpontot egy olyan egyenlő szárú háromszög csúcsaiba, melynek szárai *a* hosszúságúak, és a köztük lévő szög 120°. Határozd meg a tömegközéppont helyzetét szabadon választott koordinátarendszerben.

Legyen az origó az alap közepén, ekkor:

$$\underline{r}_{\text{tkp}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{a}{2\left(m_1+m_2+m_3\right)}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\left(m_3-m_1\right)\\ m_2\end{pmatrix}$$

Elméleti mechanika B - 1. ZH - B csoport - Megoldás

1. Egy E energiájú részecske mozog az alábbi potenciálban:
$$V(x) = A\sqrt{x}$$
Mekkora a mozgás periódusideje?
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2ax-4b}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

Először határozzuk meg a fordulópontok helyzetét: $E = A\sqrt{a_1} \Rightarrow a_{1,2} = \pm\frac{E^2}{A^2}$.

Ekkor a tanult képletet alkalmazva:

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^{\frac{E^2}{A^2}} \frac{dx}{\sqrt{E-A\sqrt{x}}} = 4\sqrt{\frac{2m}{A}}\int_0^{\frac{E}{A}} \frac{ydy}{\sqrt{\frac{E}{A}-y}} = \tfrac{8}{3}\sqrt{\frac{2m}{A}}\left[-\left(y+2\frac{E}{A}\right)\sqrt{\frac{E}{A}-y}\right]_0^{\frac{E}{A}} =$$
$$= \frac{16E\sqrt{2mE}}{3A^2}$$

2. Vízszintes síkon nyugvó m tömegű testre D rugóállandójú rugót erősítünk, majd ennek tetejére egy $2m$ tömegű testet. Mennyire nyomhatjuk össze a rugót, ha azt akarjuk, hogy a kialakuló mozgás során az alsó test ne ugorjon fel a talajról?

Akkor nem ugrik fel, ha a rugó által kifejtett erő kisebb, mint a gravitációs erő, vagyis:

$$D\Delta x \le m_2 g \Rightarrow \Delta x_{\max} = \frac{mg}{D}$$

3. Mozogjon egy m tömegű tömegpont harmonikus potenciálban. Legyen a vonzócentrumtól R távolságban sebessége v_0, és az ütközési paraméter b. Mekkora távolságra közelíti meg a vonzócentrumot?

Írjuk fel az impulzusmomentum- és energiamegmaradást:
$$\tfrac{1}{2}DR^2 + \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Dr_{\min}^2$$
$$v_0 b = v r_{\min}$$
Ebből:
$$Dr_{\min}^4 - \left(DR^2 + mv_0^2\right)r_{\min}^2 + mv_0^2 b^2 = 0$$
Ennek megoldása:
$$r_{\min} = \sqrt{\frac{DR^2 + mv_0^2 - \sqrt{\left(DR^2+mv_0^2\right)^2 - 4Dmv_0^2 b^2}}{2D}}$$

4. Vegyünk egy rombuszt, melynek oldalai a hosszúságúak, a köztük lévő hegyesszög nagysága pedig 60°. Helyezzünk a csúcsaiba négy tömegpontot. Határozd meg a tömegközéppont helyzetét szabadon választott koordinátarendszerben!

Vegyük fel a koordinátarendszer origóját a rombusz középpontjában. Ekkor:

$$\underline{r}_{\mathrm{tkp}} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{a}{2\sum_i m_i} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(m_3 - m_1\right) \\ m_2 - m_4 \end{pmatrix}$$