Elméleti mechanika B - 1. ZH - megoldás

1. Vízszintes, súrlódásmentes felületen egy L hosszúságú, elhanyagolható tömegű rudat tartunk labilis egyensúlyban. A rúd végeihez kis méretű, m tömegű golyókat erősítettünk. Egy adott pillanatban a rudat elengedjük. Mikor a rúd α szöget zár be a földdel, eltörik. Egymástól milyen messze érnek földet a golyók?

Nevezzük v-nek az alsó golyó sebességét az eltörés pillanatában. A vízszintes irányú impulzus megmaradása miatt ennyi a felső golyó vízszintes sebességének vízszintes komponense is, és a sebesség iránya merőleges a rúd irányára.
Az energiamegmaradás értelmében:

$$mgL\left(1-\sin\alpha\right)=\tfrac{1}{2}mv^2\left(2+\operatorname{ctg}\alpha\right)\Rightarrow v=\sqrt{gL\frac{2\left(1-\sin\alpha\right)}{2+\operatorname{ctg}\alpha}}$$

A felső test mozgása ferde hajítás lesz, a földetéréshez szükséges idő:

$$t=\frac{\sqrt{v^2\operatorname{ctg}^2\alpha+gL\sin\alpha}-v\operatorname{ctg}\alpha}{g}$$

Ebből a földetérési távolság:

$$s=2vt+L\cos\alpha$$

A: α=45°, B: α=60°, C: α=30°

2. 1d potenciál (A: visszaverődés, B,C: rezgés):

$$\text{A,B: } V\left(x\right)=V_0\operatorname{tg}^2\frac{x}{x_0}\text{, C: } V\left(x\right)=-\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{x_0}}$$

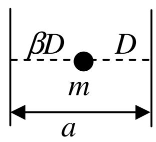
A:

$$T=\sqrt{2m}\int_0^{x_0\operatorname{arctg}\frac{E}{V_0}}\frac{dx}{\sqrt{E-V_0\operatorname{tg}^2\frac{x}{x_0}}}=x_0\sqrt{\frac{2m}{E+V_0}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{E}{V_0}}\right)\right)$$

B: ugyanennek a kétszerese
C:

$$T=2\sqrt{2m}\int_0^{x_0\operatorname{ch}\frac{V_0}{E}}\frac{dx}{\sqrt{\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{x_0}}-E}}=2\pi x_0\sqrt{\frac{2m}{E}}\frac{E+V_0}{E}$$

3. Egy m tömegű pontszerű testet két ideális rugóval egy-egy falhoz erősítünk. A két fal távolsága a, a rugók feszítetlen állapotban αa hosszúságúak, egyik rugóállandója β-szorosa a másikénak. A test csak a rugók irányában képes elmozdulni! Hol lesz a test egyensúlyi helyzetben?



$$\beta D\left(\left(\alpha-\tfrac{1}{2}\right)a-x\right)=F_1=F_2=D\left(\left(\alpha-\tfrac{1}{2}\right)a+x\right)$$

$$x=\frac{(\beta-1)\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\beta+1}a$$

A: $\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=3$ B: $\alpha=\frac{3}{4},\ \beta=2$ C: $\alpha=1,\ \beta=4$

4. Mozogjon egy m tömegű test körpályán a $V(r)$ centrális potenciálban. Mekkora sebességgel tartható körpályán?

$$\frac{mv^2}{r}=F_{cp}=\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{r}{m}\frac{\partial V}{\partial r}}$$

A: $V(r)=V_0\ln\frac{r}{r_0}$

B: Akkor, ha $V(r)$ logaritmusfüggvény.

C: $V(r)=-w_0r^n\ \ n>0$

5. A: Helyezzünk négy tömegpontot egy a oldalú négyzet csúcsaiba. Határozd meg az egyes tömegpontok távolságát a tömegközépponttól.

Legyen az m_1 tömegű tömegpont az origóban, és a négyzet legyen a jobb felső síknegyedben. Ekkor a tömegközéppont helye:

$$\underline{r}_1=\frac{a}{\sum_{i=1}^{4}m_i}\begin{pmatrix}m_3+m_4\\ m_2+m_3\end{pmatrix}$$

A távolsága m_1-től:

$$r_1=\frac{a}{\sum_{i=1}^{4}m_i}\sqrt{(m_2+m_3)^2+(m_3+m_4)^2}$$

Szimmetriaokok miatt a távolság a többi tömegponttól:

$$r_2 = \frac{a}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\sqrt{\left(m_1+m_4\right)^2+\left(m_3+m_4\right)^2}$$

$$r_3 = \frac{a}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\sqrt{\left(m_1+m_2\right)^2+\left(m_1+m_4\right)^2}$$

$$r_4 = \frac{a}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\sqrt{\left(m_1+m_2\right)^2+\left(m_2+m_3\right)^2}$$

B: Vegyünk egy paralelogrammát, melynek oldalai *a*, illetve 2*a* hosszúságúak, a köztük lévő hegyesszög nagysága pedig α. Helyezzünk a csúcsaiba négy tömegpontot. Határozd meg a tömegközéppont helyzetét szabadon választott koordinátarendszerben! (Előzőhöz hasonló koordinátarendszert használok.)

$$\underline{r}_1 = \frac{a}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\begin{pmatrix} 2\left(m_3+m_4\right)+\left(m_2+m_3\right)\cos\alpha \\ \left(m_2+m_3\right)\sin\alpha \end{pmatrix}$$

C: Vegyünk egy deltoidot, melynek két megegyező szöge derékszög, hosszabb oldalai *a* hosszúságúak, a köztük lévő hegyesszög nagysága pedig 2α. Helyezzünk a csúcsaiba négy tömegpontot. Határozd meg a tömegközéppont helyzetét szabadon választott koordinátarendszerben!

Legyen az origó az átlók metszéspontjában, ekkor:

$$\underline{r}_1 = \frac{a}{\sum_{i=1}^{4} m_i}\begin{pmatrix} \left(m_4-m_2\right)\sin\alpha \\ m_3\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha - m_1\cos\alpha \end{pmatrix}$$