Elméleti mechanika B / Mechanika 2

Zárthelyi dolgozat, 1. témakör, *hétfő*

2015. október 19.

*Minden feladatot 0 és 4 pont között értékelek. Az egyes feladatokra adott értéket az ott feltüntetett faktorral szorzom, és az így adódó pontszámok összege adja a ZH összpontszámát. Maximális összpontszám: 20 pont.*

1. Tekintsük a következő erőteret:

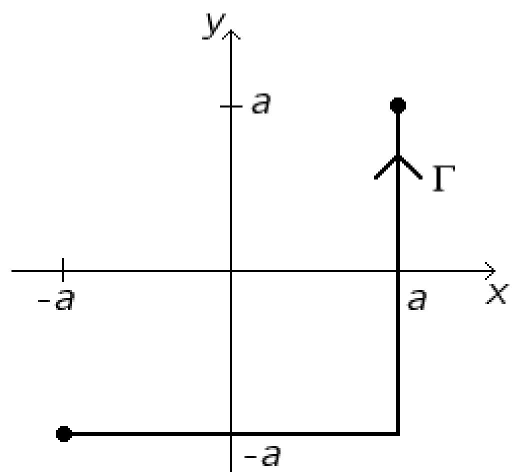
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Cr^2\mathbf{e}_- \, ,$$

ahol $C > 0$ egy konstans paraméter, $\mathbf{e}_-$ pedig az alábbi egységvektor:

$$\mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} .$$

Számítsuk ki az erő által végzett munkát az ábrán jelölt $\Gamma$ görbe mentén! Lehet-e az eredmény alapján az erőtér konzervatív, és miért?

*(1x-es szorzó)*




2. Tekintsük a következő egydimenziós potenciált:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(x+a)^2 - \frac{1}{2}ka^2 & , \text{ha}\, x \leq 0 \, , \\ V_0 e^{-x/l} - V_0 & , \text{ha}\, x > 0 \, , \end{cases}$$

ahol $k, a, V_0, l > 0$ konstans paraméterek. Egy $m$ tömegű tömegpontot elindítunk az $x = -\frac{a}{2}$ helyen $\dot{x} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ sebességgel. Hol vannak az ekkor kialakuló mozgás fordulópontjai? Írjuk fel a vonatkozó fázistérbeli trajektória koordináta-geometriai egyenletét, és nevezzük meg, milyen alakzatról van szó! Adjuk meg, hogy mekkora sebességgel halad át a tömegpont az $x = -a$ ponton! Mindezek alapján rajzoljuk fel a fázistérbeli trajektóriát! Mi lesz a tömegpont „sorsa”: periodikusan fog-e mozogni, vagy elmegy a végtelenbe?

*(2x-es szorzó)*

3. Az ábrán látható, tetszőlegesen nagynak tekinthető medencében a víz a középpontból kifelé áramlik. A víz sebességének a radiális komponense (egy szivattyúrendszernek köszönhetően) közvetlenül az idő függvénye, és a medence minden pontjában megegyezik:

$$v_{\mathrm{f}\,r} = \frac{1}{2} b_1 t^2 \,.$$

A $t = 0$ időpillanatban egy szondát indítunk el az $x = 0$, $y = R$ pontból (tömör karika) kezdősebesség nélkül. A vízhez viszonyított relatív sebességének a radiális komponense a szonda szögsebességétől és pozíciójától függ:

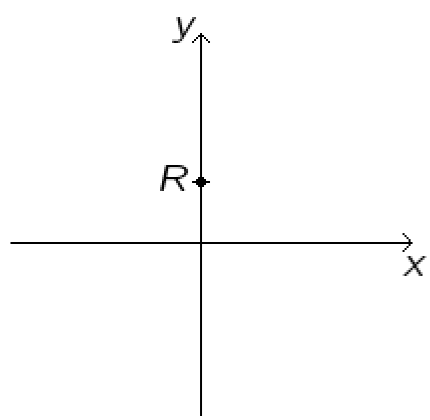
$$v_{\mathrm{rel}\,r} = u_1 (1 - \tau \dot{\varphi} \sin \varphi) \,.$$

($\varphi$ a szokásos síkbeli polárszög.) A szonda teljes $\beta$ szöggyorsulása időben állandó, és nem függ semmilyen módon a szonda pozíciójától sem:

$$\beta(t) = \beta_0 = \text{állandó} \,.$$

*(A szöggyorsulás definíció szerint a szögsebesség idő szerinti deriváltja, $\beta(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\varphi}(t) \equiv \ddot{\varphi}(t)$.)* Milyen messze lesz a szonda az origótól, amikor a kezdeti pozíciójához viszonyítva az origó átellenes oldalára érkezik (első alkalommal)? (Feltesszük, hogy a vizsgált pozíció eléréséig az origótól mért távolság soha nem csökken le 0-ra.)

*(2x-es szorzó)*




Jó munkát!