6. A Lagrange-formalizmus

A Lagrange-formalizmus alkalmazásával bizonyos fizikai rendszerek mozgásegyenleteit írhatjuk fel egyszerű módon. Az alapvető fontosságú lépés a Lagrange-függvény felírása, ebből már automatikusan származtathatjuk a mozgásegyenleteket.

A Lagrange-függvény konzervatív mechanikai rendszerekben[1] a rendszert alkotó tömegpontok, mechanikai testek vagy egyéb mechanikai objektumok összes kinetikus és potenciális energiájának a különbségeként írható fel:

$$L = T - V\,. \tag{1}$$

Egy ilyen kifejezést azonban csak akkor nevezünk Lagrange-függvénynek, ha a képletben nem szerepel más változó, mint az ún. általános koordináták (a definíciót lásd a kidolgozott példa 3.) lépésében), ezek időderiváltjai (az ún. általános sebességkomponensek), és expliciten az idő. Nem kell, hogy ezek közül mind megjelenjen, de csak ezek szerepelhetnek, definíció szerint kizárólag ezek a Lagrange-függvény változói:

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\,, \tag{2}$$

ahol $n \in \mathbb{Z}^+$ az általános koordináták száma a vizsgált fizikai rendszerben. Ezt szokás a szabadsági fokok számának is nevezni.

Ha a Lagrange-függvényt parciálisan deriváljuk valamely változója szerint, eközben minden más változót konstansnak tekintünk (bármilyen többváltozós függvényt így deriválunk parciálisan). Így például, ha a Lagrange-függvényt valamenyik általános koordináta szerint deriváljuk parciálisan, még az adott általános koordinátához tartozó általános sebességkomponenst is konstansnak gondoljuk a derivált kiszámítása során. A két változó ekkor „nem tud egymásról". Ugyanakkor később majd emlékeznünk kell arra, hogy valamely általános sebességkomponens valójában egy általános koordináta időderiváltja, és mindkettő az időnek lesz a függvénye a megvalósuló mozgás során: $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. A rendszer állapotát az általános koordinátákkal fogjuk jellemezni egy adott időpillanatban, és ezek időfejlődése fogja leírni a rendszerben létrejövő mozgásokat.

Az előző bekezdés utolsó mondatának az értelmében mi valójában a $q_i(t)$ függvényeket keressük, minden $i \in \{1, \ldots, n\}$-re. Ahhoz, hogy ezeket a függvényeket meg tudjuk határozni, n darab differenciálegyenletet kell felírnunk. Sajnos tipikusan nem tudunk minden $q_i(t)$ függvényhez egy különálló differenciálegyenletet fölírni, az n darab differenciálegyenlet csatolódni fog, és egy n változós differenciálegyenlet-rendszerünk lesz. A szóban forgó differenciálegyenleteket Euler–Lagrange-egyenleteknek nevezzük, és a következő képlet adja meg őket:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\,, \tag{3}$$

vagyis minden különböző i indexszel származtatnunk kell egy differenciálegyenletet. A (3) képletben szerepel egy nem parciális idő szerinti deriválás is. Ez azt jelenti, hogy ennek az elvégzése során már mindent deriválunk idő szerint, amit lehet. Így a $q_i(t)$ és $\dot{q}_i(t)$ változókat is az idő

[1] Más rendszerekben is létezik Lagrange-függvény, de ilyenekkel nem foglalkozunk.

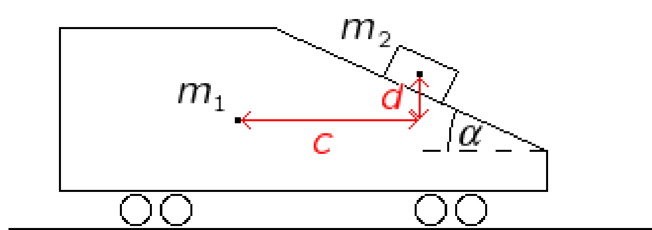
függvényének tekintjük, és a számítás során, amikor eljutunk hozzájuk, az ő idő szerinti deriváltjukat egyszerűen egy további ponttal jelezzük az eredeti jelölés felett:

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_i \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\dot{q}_i}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}_i \,. \tag{4}$$

Ha a leírtak szerint, a (3) képletet követve származtatjuk az n darab differenciálegyenletet a Lagrange-függvényből, akkor ezek a differenciálegyenletek a $q_i(t)$ függvényekre vonatkozó másodrendű differenciálegyenlet-rendszert fognak alkotni. Ezt a differenciálegyenlet-rendszert általában nem tudjuk analitikusan megoldani, de numerikus megoldást mindig tudunk számolni. A lényeg, hogy az egyenletrendszer a $q_i(t)$ függvényeket, vagyis a rendszer mozgását egyértelműen meghatározza. Konkrét (partikuláris) megoldást akkor kapunk, ha ismerjük a kezdeti feltételeket, egyébként általános megoldást írhatunk fel. Mindennek értelmében a szóban forgó differenciálegyenlet-rendszer, vagyis az Euler–Lagrange-egyenletek a vizsgált fizikai rendszer mozgásegyenlet-rendszerét alkotják.

Példa

Egy m_1 tömegű kocsi vízszintes irányban tud elmozdulni. A kocsin egy α hajlásszögű lejtő található, amire egy m_2 tömegű testet helyezünk. Az m_2 tömegű test tömegközéppontjának a kocsi tömegközéppontjához viszonyított helyzetét kezdetben az ábrán jelölt c, ill. d hosszúságú szakaszok jellemzik. A test a lejtő mentén elmozdulhat. Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét, és származtassuk belőle az Euler–Lagrange-egyenleteket!

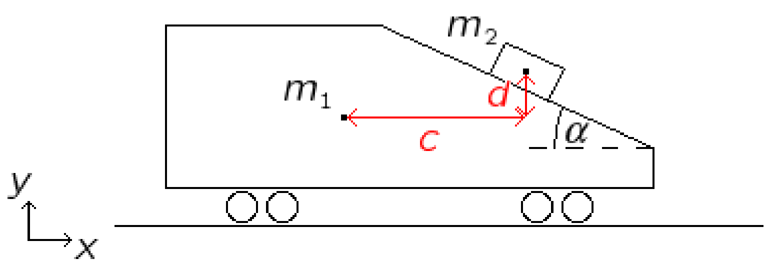


A feladat megoldásához jól körülhatárolható lépesek sorozatával juthatunk el:

1.) **Milyen koordináták felhasználásával tudom definíció szerint felírni a kinetikus és a potenciális energiát?**

Ha a rendszerben egyik test sem foroghat, akkor tipikusan az egyes testek tömegközéppontjának a koordinátáira van szükség.

A feladatban ez az 1-es test x_1 és y_1, továbbá a 2-es test x_2 és y_2 koordinátáját jelenti valamely tetszőlegesen megválasztott (az alábbi ábrán jelölt) koordináta-rendszerben. Ez összesen 4 db koordináta. Mivel a lap síkjára merőlegesen semmi nem tud elmozdulni, ezzel az iránnyal nem foglalkozunk.



2.) **Milyen kényszerek vannak a rendszerben?**

A kényszer változókra vonatkozó, előírt összefüggést (egyenletet) jelent. A kényszerek legegyszerűbb esete a geometriai kényszer, amikor csak koordinátákra vonatkozik az összefüggés, és sebesség nem szerepel expliciten benne.

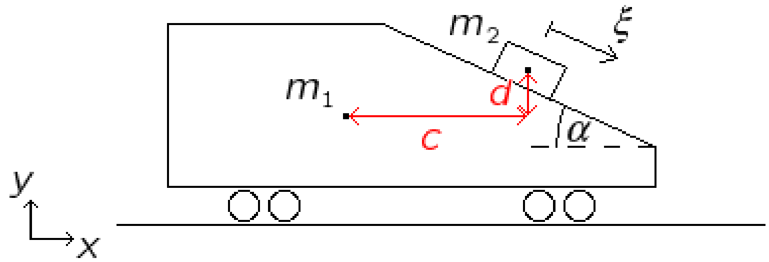
A feladatban 2 db kényszer van:

- Az 1-es testnek a talajon kell mozognia, azaz $y_1 =$ konstans (ez egy olyan összefüggés, ami csak az y_1 változóra vonatkozik).
- A 2-es testnek a lejtőn kell mozognia. Ez formálisan az $y_2 - y_1 - d = -\mathrm{tg}\,\alpha(x_2 - x_1 - c)$ összefüggést jelenti, de ennek a felírására valójában nincs szükség.

3.) **Általános koordináták kiválasztása**

Ebben a lépésben olyan változókat kell kiválasztanunk, amelyekkel az összes szükséges (az 1.) lépésben felsorolt) koordinátát ki tudjuk fejezni, vagyis a rendszer állapota velük teljeskörűen jellemezhető. Az általános koordinátákra már nem vonatkozhatnak kényszerek, az előző mondattal együtt ez adja a definíciójukat. Ennek megfelelően az általános koordináták száma az összes koordináta számának és a kényszerek számának a különbségeként adódik. Az általános koordináták száma megadja, hogy hányféle független mozgást végezhet a rendszer, ezért ezt a számot a szabadsági fokok számának is nevezzük. Ez gyakran egyszerűen „leolvasható” az ábráról. Ha ezt meg tudjuk tenni, akkor a kényszereket nem is muszáj sorra vennünk. A szabadsági fokok számának a megállapításához a Függelék ad további segítséget.

A feladatban $4-2=2$ db általános koordinátát kell választanunk, ezt onnan is lehet látni, hogy az egész kocsi (a rajta lévő testtel együtt) vízszintes irányban tud mozogni, és a 2-es test ettől függetlenül a lejtő mentén is mozoghat. Legyenek az általános koordináták x_1 és ξ: x_1 az 1-es test tömegközéppontjának a vízszintes koordinátája (ezt már az 1.) lépésben bevezettük), ξ pedig a 2-es test lejtő menti elmozdulását jelöli (lásd a lenti ábrát). ξ előjeles mennyiség: pozitív, ha a test lefelé mozdul el, és negatív, ha felfelé.



4.) **A koordináták és időderiváltjaik kifejezése az általános koordináták és általános sebességkomponensek segítségével**

A Lagrange-függvény olyan függvény, ami definíció szerint csak az általános koordinátáktól és ezek időderiváltjaitól, az általános sebességkomponensektől függhet. A teljes definíció szerint közvetlenül az időtől is függhet még, de ebben a jegyzetben ilyen esetekkel nem fogunk foglalkozni. A Lagrange-függvényt a kinetikus és a potenciális energia különbségeként tudjuk kiszámítani ($L=T-V$), ezt a két mennyiséget azonban a definíciójuk szerint az 1.) pontban összegyűjtött koordinátákkal és azok időderiváltjaival tudjuk felírni. Ahhoz, hogy az így kapott kifejezést Lagrange-függvénynek nevezhessük és a feladat további részében felhasználhassuk, a kinetikus és a potenciális energiában megjelenő változókat (a már említett koordinátákat és időderiváltjaikat) ki kell fejeznünk az általános koordináták és ezek időderiváltjai segítségével.

A feladatban tehát ki kell fejeznünk az 1.) pontban összegyűjtött változókat és ezek időderiváltjait x_1, ξ, $\dot{x}_1$ és $\dot{\xi}$ függvényeként. Tekintsük először az 1-es testet:

$$x_1 = x_1\,,$$
$$y_1 = d_1\,.$$

x_1-et „önmagával fejeztük ki”, lényegében csak tudomást vettünk róla, hogy ő egy általános koordináta. y_1-ről tudjuk, hogy a fentebb említett kényszer szerint konstansnak kell maradnia a mozgás során, ezt muszáj jeleznünk, mivel a későbbiekben egy ilyen mennyiséget már nem tekinthetünk változónak. d_1 a konstans konkrét értékét jelöli, ilyen messze van az 1-es test tömegközéppontja az origótól függőleges irányban. d_1 pontos értéke attól függ, hogyan választjuk meg a koordináta-rendszerünket, így d_1 nem egy megadott paramétere a feladatnak, hanem egy általunk tetszőleges módon felvett érték.

A 2-es test kapcsán visszagondolhatunk a jelen feladat geometriai elrendezését tárgyaló házi feladatra, ahol a lényegi lépéseket már elvégeztük. ξ-t megfeleltethetjük s-nek, ha ξ

pozitív. Utána lehet gondolni, hogy a házi feladatban felírt összefüggések az $s \to \xi$ csere után akkor is igazak maradnak, ha ξ negatív. Így tehát:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + c + \xi \cos\alpha \,, \\ y_2 &= y_1 + d - \xi \sin\alpha = d_1 + d - \xi \sin\alpha \,. \end{aligned}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy az 1.) lépésben összegyűjtött koordinátákat ki lehet fejezni az általunk választott általános koordináták segítségével.

Ha ez sikerül, és az általános koordináták száma megfelel a várakozásunknak, akkor az azt jelenti, hogy helyesen választottunk általános koordinátákat.

Ha idáig eljutottunk, még az 1.) lépésben összegyűjtött koordináták időderiváltjait kell felírnunk x_1, ξ, $\dot{x}_1$ és $\dot{\xi}$ függvényében. Ezt egyszerűen az imént levezetett összefüggések idő szerinti deriválásával tehetjük meg, ilyenkor mindent deriválunk idő szerint, amit csak lehet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_1 \,, \\ \dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{\xi} \cos\alpha \,, \\ \dot{y}_2 &= -\dot{\xi} \sin\alpha \,. \end{aligned}$$

Ezzel a 4.) lépés végére értünk, az itt levezetett összefüggések felhasználásával már felírható a kinetikus és a potenciális energia mint az általános koordinátáknak és ezek időderiváltjainak a függvénye, így fel tudjuk írni a Lagrange-függvényt.

5.) **A Lagrange-függvény felírása**

A rendszer teljes kinetikus energiája a rendszerben jelenlévő testek vagy tömegpontok kinetikus energiáinak az összege. Valamely test vagy tömegpont kinetikus energiája $m/2$-ször a test sebességnégyzete.

A konkrét feladatban két testünk van, így a kinetikus energia definíció szerint a következő lesz:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left(v_{x1}^2 + v_{y1}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{x2}^2 + v_{y2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) \,. \end{aligned}$$

Eddig a definíció. Számunkra ez az alak nem megfelelő, ugyanis itt nem csak a 3.) lépésben választott általános koordináták vagy ezek időderiváltjai jelennek meg. Ehhez be kell helyettesítenünk a 4.) lépésben kapott összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2+0\right)+\frac{1}{2}m_2\left((\dot{x}_1+\dot{\xi}\cos\alpha)^2+(-\dot{\xi}\sin\alpha)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_1^2+2\dot{x}_1\dot{\xi}\cos\alpha+\dot{\xi}^2\cos^2\alpha+\dot{\xi}^2\sin^2\alpha\right)\\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_1\dot{\xi}\cos\alpha+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\xi}^2\cos^2\alpha+\dot{\xi}^2\sin^2\alpha\right)\\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+m_2\cos\alpha\dot{x}_1\dot{\xi}+\frac{1}{2}m_2\dot{\xi}^2\,.
\end{aligned}$$

Ez a kifejezés már valóban nem tartalmaz nem kívánt változót, ebben a konkrét példában kizárólag az általános sebességkomponensek jelennek meg.

A rendszer teljes potenciális energiája szintén a jelenlévő mechanikai objektumok potenciális energiáinak az összege. Az Elméleti mechanika gyakorlaton leggyakrabban gravitációs potenciál és rugók fordulnak elő a tekintett feldatokban.

Jelen feladatban potenciális energia kizárólag a gravitációs mezőtől származik:

$$\begin{aligned}
V &= m_1gy_1+m_2gy_2\\
&= m_1gd_1+m_2g\left(d_1+d-\xi\sin\alpha\right)\\
&= -m_2g\sin\alpha\xi+m_1gd_1+m_2g\left(d_1+d\right)=-m_2g\sin\alpha\xi+\text{konstans}\,.
\end{aligned}$$

Az első sor jelenti a potenciális energia definícióját. A második sorban behelyettesítettük a 4.) lépés összefüggéseit (ezt ugye muszáj megtennünk, ill. éppen ezért csináltuk a 4.) lépést), az utolsó sorban pedig külön gyűjtöttük a konstans tagokat. Ha visszagondolunk az Euler–Lagrange egyenletek (3) alakjára, feltűnhet, hogy bennük csak a Lagrange-függvény valamilyen deriváltjai szerepelnek, így a Lagrange-függvényben megjelenő konstans tagok már nem jelennek meg a rendszer mozgásegyenleteiben, ezek valójában nem kapnak semmilyen fizikai szerepet. Így a potenciálban megjelenő konstans tagokat is joggal „felejthetjük el" a későbbi számításaink során, ez összhangban van a fizikai világképünk potenciálokra vonatkozó részével is (ti. hogy a potenciálok egy additív konstans erejéig határozatlanok).

A Lagrange-függvény a kinetikus és a potenciális energia különbségeként adódik:

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+m_2\cos\alpha\dot{x}_1\dot{\xi}+\frac{1}{2}m_2\dot{\xi}^2+m_2g\sin\alpha\xi-m_1gd_1-m_2g\left(d_1+d\right)\,.$$

Ne feledkezzünk meg arról, hogy a potenciált *kivonjuk* a kinetikus energiából. Továbbá állapítsuk meg egyszer utoljára, hogy a felírt Lagrange-függvényünk valóban csak a megfelelő változóktól függ.

6.) **Az Euler–Lagrange-egyenletek származtatása**

Most már semmilyen más dolgunk nincs, mint alkalmazni a (3) képletet a 3.) pontben előforduló összes általános koordinátára.

A feladatban két általános koordinátánk van, így két Euler–Lagrange-egyenletet kell fölírnunk. Egyrészt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 \cos\alpha \dot{\xi}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 \cos\alpha \ddot{\xi}\,,$$

vagyis

$$0 = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 \cos\alpha \ddot{\xi}\,.$$

Másrészt:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = m_2 g \sin\alpha\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m_2 \cos\alpha \dot{x}_1 + m_2 \dot{\xi}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = m_2 \cos\alpha \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{\xi}\,,$$

azaz

$$m_2 g \sin\alpha = m_2 \cos\alpha \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{\xi}\,.$$

Láthatóan tényleg két másodrendű differenciálegyenlet rendszerét kaptuk, ami a keresett $x_1(t)$ és $\xi(t)$ függvényekre vonatkozik. A differenciálegyenletek azt mutatják, hogy a gyorsulások konstansok, így a megoldás egyenletesen gyorsuló mozgásokra vezet.

A végére értünk tehát a feladatnak. Ha alaposabban megnézzünk, gondolkozni, ötletelni lényegében csak az 1.), a 3.) és a 4.) lépésben kell. A 2.) lépés elhagyható, ill. a 4.) lépés kiváltja. („Fordítva” is lehet haladni, azaz a 2.) lépést ténylegesen végiggondolni, és ezzel megkönnyíteni a 4.) lépést.) Az 5.) és a 6.) lépés már csak egy algoritmus egyértelmű alkalmazásáról szól. A konkrét példát még meg tudtuk volna oldani Newton-képben is, de a Lagrange-formalizmus használata könnyebben vezetett eredményre (azaz mozgásegyenletekre). Számos olyan feladat létezik, ami Newton-képben praktikusan végiggondolhatatlan lenne.

Függelék

Az általános koordináták egy-egy szabadsági fokhoz, vagyis különböző változóval jellemezhető és egymástól függetlenül megvalósulni képes mozgáshoz rendelhetők. Ha van két változónk, amelyek jelöltjeink arra, hogy általános koordináták legyenek, a következő módon bizonyosodhatunk meg a két változó függetlenségéről: Rögzítsük le az egyik változót valamilyen állandó értékre, azaz állítsuk meg a rendszer minden olyan mozgását, ami az adott változó megváltozásával járna. Vizsgáljuk meg, hogy ebben az állapotban tudjuk-e úgy mozgatni a rendszert (természetesen figyelembe véve a rendszer geometriai kötöttségeit), hogy a másik változó értéke eközben változzon. Ha igen, akkor a változók függetlenek, és használhatjuk őket két általános koordinátának. Ha nem, akkor biztosak lehetünk benne, hogy a két változó között van valamilyen geometriai összefüggés, még akkor is, ha ezt korábban nem sikerült felírnunk vagy számba vennünk.